

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ УДАРНЫХ НАГРУЗКАХ

МОВСИСЯН Л. А.

Со времени появления первой работы [1] по устойчивости стержней и цилиндрических оболочек при импульсивной нагрузке накопилось большое количество исследований. Не считая численных работ [2—5 и др.], где в линейной или нелинейной постановке изучается процесс возрастания прогибов, все аналитические работы можно разделить на две группы. Для работ первой группы [1, 6 и др.] характерным является то, что распространением продольных волн пренебрегают, то есть по всей длине стержня принимается одинаковая сжимающая сила. Во второй группе работ (начиная с [7]), как будто это учитывается, однако, при рассмотрении уравнения устойчивости изучается только часть стержня за фронтом продольной волны и получается своего рода стержень переменной длины, причем переменность условная, так как время входит как параметр. То, что неоднородностью сжимаемой силы при медленных скоростях нагружения можно пренебречь, как, например, в [6], очевидно. Скорость упругой волны $a = \sqrt{E/\rho}$ для материалов типа стали и дюралюминия имеет порядок 5 км/сек и за период колебаний по основной форме шарнирно опертой незагруженной балки (прямоугольного сечения $l = 25h = 1\text{ м}$) упругая волна успевает 500 раз отразиться. Однако, если прилагается большая нагрузка или если стержень нагружается с большой скоростью, он теряет устойчивость задолго до того, как продольная волна сможет хоть несколько раз отразиться; понятно, что сжимающую силу однородной принять нельзя, то есть вместо точного выражения $\sigma = Ev/a$ при $0 \leq x \leq at$ и $\sigma = 0$ при $at < x < l$ для $at < l$ нельзя принять $\sigma = Evt/l$, где v — скорость движения конца стержня). Как показано в [8], для упругой балки при $v/a > 10^{-2}$ предположение однородности сжимающей силы приводит уже к неверным результатам. С другой стороны, например, для вышеуказанных материалов $\sigma/E = 10^{-3}$ ($v/E = v/a$ при первом прохождении упругой волны), то есть для реальных материалов при интенсивных нагружениях помимо неоднородности сжимающей силы должны быть учтены также пластические деформации.

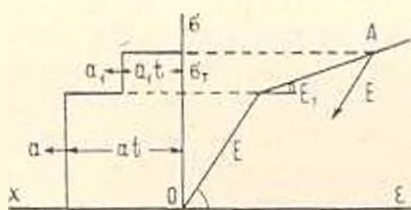
В настоящей работе изучается устойчивость стержня при ударных нагрузках в упругопластической постановке. Учитывается процесс распространения и отражения продольных волн, а также волны разгрузки в случае, когда нагружение осуществляется в конечном промежут-

ке времени. Определяется критическое время (критическая длина) потери устойчивости.

1. Пусть имеется идеально прямой стержень постоянного сечения, один конец которого закреплен (в продольном направлении), а к другому концу мгновенно прикладывается постоянное напряжение (или другой конец ударяется бесконечной массой со скоростью v , или этот конец движется в сторону первого с такой же скоростью [6, 8]), превышающее предел пропорциональности, точка A на фиг. 1. Будем принимать, что материал стержня подчиняется линейному упрочнению и характеризуется соответственно постоянными E и E_1 до и после предела текучести.

Напряженное состояние такого стержня известно. Пока примем, что в общем виде имеем выражение сжимающего напряжения $\sigma(x, t)$ и займемся решением уравнения устойчивости. Уравнение устойчивости (уравнение возмущенного движения) имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\bar{E} J \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma F \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Здесь все обозначения общепринятые, только следует отметить, что в зависимости от начального напряженного состояния изгибная жесткость $\bar{E}J$ будет переменной. Примем ее, как и σ , произвольной, но известной, и в каждой задаче их будем конкретизировать. Пусть балка на концах шарнирно оперта,

то есть

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x=0, \quad x=l \quad (1.2)$$

Решение (1.1) будем искать в виде ряда, удовлетворяющего условиям (1.2)

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) \sin \lambda_m x, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{l} \quad (1.3)$$

Представив произвольные пока $\bar{E}$ и σ также в виде рядов

$$\bar{E} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(t) \cos \lambda_k x, \quad \sigma = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t) \cos \lambda_k x \quad (1.4)$$

и производя некоторые преобразования в (1.1), для неизвестных получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 f_m}{dt^2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}(t) f_k = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

Здесь

$$2pFa_{mk} = \begin{cases} \lambda_m^2 [D_m^2(2b_0 - b_{2m}) + F(2c_0 + c_{2m})], & m = k \\ \lambda_m \lambda_k [J \lambda_m \lambda_k (b_{m-k} - b_{m+k}) + F(c_{m-k} + c_{m+k})], & m \neq k \end{cases} \quad (1.6)$$

Возможны два пути для дальнейшего исследования. Если об устойчивости стержня судить, исходя из условий допускаемых перемещений, то система (1.5) во много удобнее для численного интегрирования (задача с начальными условиями), чем уравнение (1.1). При упругой постановке таким образом была решена задача в [8], а в [4] численно решалось (1.1).

Но, чтобы быть верным классическому понятию устойчивости, необходимо определить некоторый критический параметр. Таковым в рассматриваемой задаче является критическая длина потери устойчивости, или, что то же самое, критическое время. В отличие от статической потери устойчивости, где для заданной длины стержня определяется критическая сила, при ударе вопрос ставится следующим образом: для заданной силы найти критическую длину потери устойчивости, или длину распространения продольной волны, при которой возможна потеря устойчивости.

Критическое время для (1.5) (укороченная система) можно получить, исходя из понятия устойчивости для конечного интервала времени (например, [9]). Однако, помимо чисто технических трудностей, в этой области имеется такой произвол в выборе начальной области и допустимых значений, что уместно привести слова: «Ни одна из известных постановок задач по устойчивости на конечном промежутке времени не заняла сейчас доминирующего положения. Более того, нет еще ощущения неактуальности поиска новых вариантов определений понятия устойчивости на конечном промежутке времени» [9].

Здесь мы критическое время будем определять как время, при котором «мгновенная частота» (1.5) равна нулю, т. е. считается, что критическая длина потери устойчивости эта такая длина распространения волны, при которой, если сообщить продольному движению изгибное возмущение, то оно неограниченно может возрасти [10]. Являясь обобщением динамического критерия потери устойчивости для статических задач [11] на случай ударных нагрузок, он, во-первых, очень просто приводит к результатам, и что самое главное объясняет все экспериментально наблюдаемые факты.

Кстати, такую точку зрения отстаивает и В. М. Даревский [12—13] более десяти лет и критическое время, определенное таким образом, трактуется как время для рассматриваемого состояния, для изменения которого потребуется значительно меньше внешнего воздействия, чем в другой момент времени. Следует отметить, что если неоднородность сжимающей силы не учесть, или более обще уравнение начального состояния не решать точно с начальными и граничными условиями, то такой критерий кроме эйлеровой силы ничего нового не дает.

Итак, критическое время будем определять как наименьший корень уравнения

$$\det \|a_{mk}(t)\| = 0 \quad (1.7)$$

Что касается форм потери устойчивости, то они не будут отдельные гармоники, хотя бы не совпадающие со статическими, как часто утверждают, а определяются рядом (1.3), причем для различных критических времен формы потери устойчивости различные.

2. Теперь приступим к рассмотрению конкретных задач и определению коэффициентов b_k и c_k . Будем изучать две задачи: когда на конце стержня мгновенно прикладывается нагрузка σ_0 , которая в дальнейшем поддерживается постоянной и вторую задачу, когда прилагается прямоугольный импульс продолжительностью $\bar{b}$ (случай удара бесконечной массой или движение конца с постоянной скоростью можно получить отсюда).

Картина напряженного состояния, в общем, известна [14, 15]. От ударяемого конца распространяются две волны (фиг. 1): упругая волна движется со скоростью $a = \sqrt{E/\rho}$ и напряжение за ее фронтом есть $\sigma = \sigma_0$ и пластическая волна — со скоростью $a_1 = \sqrt{E_1/\rho}$ с напряжением за фронтом $\sigma = \sigma_0$, то есть будем иметь

$$\sigma, \bar{E} = \begin{cases} \sigma_0, T & \text{при } 0 \leq x \leq a_1 t \\ \sigma_0, T & \text{при } a_1 t \leq x \leq at \\ 0, E & \text{при } at \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.1)$$

Выражения (2.1) верны для $t \leq l/a$. После отражения волны последняя будет уже распространяться со скоростью a_1 и картина напряженно-деформированного состояния будет такова:

$$\sigma, \bar{E} = \begin{cases} \sigma_0, T & \text{при } 0 \leq x \leq a_1 t \\ \sigma_0, T & \text{при } a_1 t \leq x \leq l - a_1(t - l/a) \\ \sigma_1, T & \text{при } l - a_1(t - l/a) \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.2)$$

Решение (2.2) верно в интервале $l/a \leq t \leq t_1$. Здесь $\sigma_1 = \sigma_0(1 + a_1/a) -$ значение напряжения в отраженной части, $t_1 = l(a + 3a_1)/2aa_1$ — время встречи отраженной волны с пластической волной с напряжением σ_0 , T — приведенный модуль или модуль Кармана. В той части стержня, где уже имеется пластическая зона, при рассмотрении уравнения устойчивости функцию $\bar{E}(x, t)$ можно приближенно принять равной T , как это принято в литературе, например, при статических [2] и динамических [16] задачах, а в упругой части — $\bar{E} = E$.

Мы будем изучать устойчивость стержня вплоть до t_1 .

Распределение напряжений для двух моментов времени приведено на фиг. 2.

Соответственно с (2.1) и (2.2) коэффициенты b_k и c_k для обоих случаев определяются формулами

$$b_0 = E + (T - E)\tau, \quad b_k = \frac{2}{k\pi} (T - E) \sin k\pi\tau$$

$$c_k = \tau [\sigma_0 \sqrt{\lambda} + \sigma_1 (1 - \sqrt{\lambda})] \quad (2.3)$$

$$c_h = \frac{2}{k\pi} \{ \sigma_0 \sin k\pi\tau \sqrt{\lambda} + \sigma_1 (\sin k\pi\tau - \sin k\pi\tau \sqrt{\lambda}) \}$$

$$b_0 = T, \quad b_h = 0, \quad c_0 = \sigma_0 \tau \sqrt{\lambda} + \sigma_1 [1 - \tau \sqrt{\lambda} + \lambda(\tau - 1)] \quad (2.4)$$

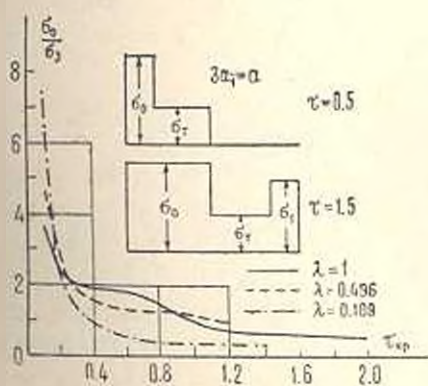
$$c_h = \frac{2}{k\pi} \{ \sigma_0 \sin k\pi\tau \sqrt{\lambda} + \sigma_1 [(-1)^h \sqrt{\lambda} \sin k\pi(\tau - 1) \sqrt{\lambda} - \sin k\pi\tau \sqrt{\lambda}] \}$$

Здесь $\lambda = E_1/E$, $\tau = at/l$ и (2.3) верно при $0 \leq \tau \leq 1$, а (2.4) — при $1 \leq \tau \leq (1 + 3\sqrt{\lambda})/2\sqrt{\lambda}$.

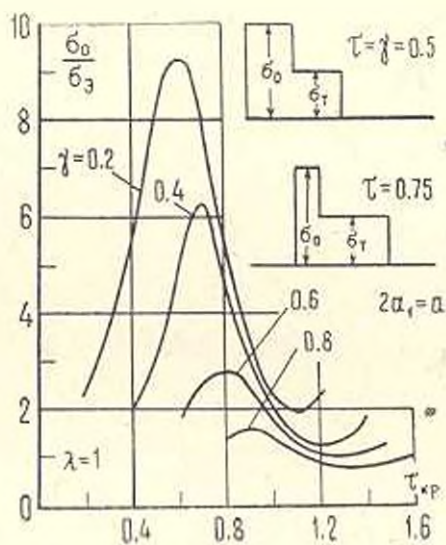
Для второй задачи, когда действует прямоугольный импульс с продолжительностью $\theta < l/a$, момент удаления нагрузки вызывает волну разгрузки, также распространяющуюся со скоростью a и картина напряженного состояния и выражение $\bar{E}(x, t)$ для $t \leq \theta$ будут, как в предыдущей задаче, а для $\theta \leq t \leq l/a$:

$$\sigma, \bar{E} = \begin{cases} 0, E & \text{при } 0 \leq x \leq a(t - \theta) \\ \sigma_0, T & \text{при } a(t - \theta) \leq x \leq a_1 t \\ \sigma_1, T & \text{при } a_1 t \leq x \leq at \\ 0, E & \text{при } at \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.5)$$

Для двух моментов времени распределения напряжений показаны на фиг. 3.



Фиг. 2



Фиг. 3

После отражения $t \geq l/a$

$$\sigma, \bar{E} = \begin{cases} 0, E & \text{при } 0 \leq x \leq a(t - \theta) \\ \sigma_0, T & \text{при } a(t - \theta) \leq x \leq a_1 t \\ \sigma_1, T & \text{при } a_1 t \leq x \leq l - a_1(t - l/a) \\ \sigma_1, T & \text{при } l - a_1(t - l/a) \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.6)$$

Последние выражения верны для $t = \min(t_1, t_2)$, где t_2 — время, при котором волна разгрузки достигает фронта пластической волны — $t_2 = a\delta/(a - a_1)$.

Здесь коэффициенты b_k и C_k определяются формулами

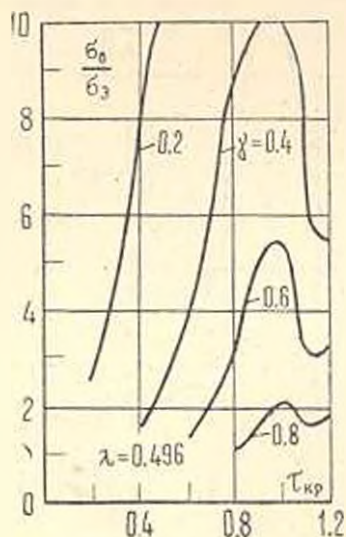
$$b_0 = (1 - \gamma)E + \gamma T, \quad b_k = \frac{2}{k\pi} |\sin k\pi(\tau - \gamma) - \sin k\pi\tau| (E - T) \\ c_0 = \sigma_0[\tau(\sqrt{\lambda} - 1) + \gamma] + \sigma_1\tau(1 - \sqrt{\lambda}) \quad (2.7)$$

$$c_k = \frac{2}{k\pi} \{ \sigma_0 |\sin k\pi\tau\sqrt{\lambda} - \sin k\pi(\tau - \gamma)| + \sigma_1 (\sin k\pi\tau - \sin k\pi\tau\sqrt{\lambda}) \}$$

$$b_0 = E(\tau - \gamma) + T(1 - \tau + \gamma), \quad b_k = \frac{2}{k\pi} (E - T) \sin k\pi(\tau - \gamma) \\ c_0 = \sigma_0(\tau\sqrt{\lambda} + \gamma - \tau) + \sigma_1(1 - \tau\sqrt{\lambda} + \tau - \lambda) \quad (2.8)$$

$$c_k = \frac{2}{k\pi} \{ \sigma_0 |\sin k\pi\tau\sqrt{\lambda} - \sin k\pi(\tau - \gamma)| - \sigma_1 [\sin k\pi\tau\sqrt{\lambda} + \\ + (-1)^{k+1}\sqrt{\lambda} \sin k\pi\sqrt{\lambda}(\tau - 1)] \}$$

Формулы (2.7) верны при $\gamma \leq \tau \leq \min(1, \tau_1)$, а (2.8) — при $1 \leq \tau \leq \min(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 = \tau(t_1)$, $\gamma = a\delta/l$.



Фиг. 4

3. В качестве примера возьмем двутавровый стержень — $T = 2EE_1/(E + E_1)$ из дюралюминия D16T [2] с данными $\tau_1/E = 0,2667 \cdot 10^{-2}$. Для λ взяты три значения $\lambda = 1$ (упругий случай), $\lambda = 0,496$ и $\lambda = 0,1093$.

Известно, что для многих материалов предел текучести зависит от скорости деформирования. В данной работе эта зависимость не учитывается, как и в [14, 15]. Приведенное решение можно рассматривать как для материалов, для которых нет такой зависимости.

Кривые безразмерного критического напряжения σ_0/σ_1 ($\sigma_1 = E/l^2/\pi^2/F$) для первой задачи в зависимости от безразмерного критического времени $\tau_{кр}$ приведены на фиг. 2.

Аналогичные кривые для второй задачи для случаев $\lambda = 1$ и $\lambda = 0,496$ приведены на фиг. 3 и 4 ($F/l^2/\pi^2/F = 120$).

По этим кривым можно определить, когда (на каком расстоянии) произойдет потеря устойчивости при заданном напряжении. Как видно из графиков, учет пластических деформаций не однозначным об-

разом определяет тенденцию критического напряжения в сторону увеличения и уменьшения. Это и понятно. Там, где уже пластическая зона, изгибная жесткость уменьшается, но, с другой стороны, приложенная максимальная нагрузка передается не по всей длине этой зоны, а только на части $0 \leq x \leq a_1 l$.

Если вместо заданного напряжения на конце производится удар бесконечной массой со скоростью v , или край движется в сторону другого края с такой же скоростью и требуется определить критическую длину при заданной скорости, то σ_0 в предыдущих соотношениях должно быть заменено

$$\sigma_0 = \sqrt{EE_1} \frac{v}{a} - \tau_1 (1 - 2\lambda + \sqrt{\lambda}) \quad (3.1)$$

Приведенные графики показывают, во-первых, каким образом стержень может нести нагрузку выше эйлеровой и не терять устойчивости, и во-вторых, что потеря устойчивости при ударе носит локальный характер. При этом, как хорошо видно, если при определенной силе она не происходит у ударяемого конца, то при той же силе может произойти у другого конца после отражения волны. Потеря устойчивости не может произойти локально в средней части стержня.

В заключение необходимо сделать еще пару замечаний.

Вместо приведенного модуля T можно было использовать касательный модуль E_1 в уравнении устойчивости там, где пластическая зона.

Уравнение (1.1) имеет разрывные коэффициенты при первых двух слагаемых и стоит сказать, по-видимому, несколько слов о законности приведенного решения. В случае, когда терпит разрыв только второй коэффициент, можно доказать сходимость процесса определения собственных значений или нормальность определителя (1.7). При разрыве в первом коэффициенте этого делать невозможно и только численный эксперимент доказывает сходимость процесса. Стоит также провести сравнение с задачами, решенными обычным путем: путем решения для различных частей непрерывности коэффициентов и последующим сопряжением. В работе [10] рассматривается устойчивость упругой балки при продольном ударе вышеприведенным способом. Оттуда, как частный случай, получается решение задачи статической устойчивости частично сжатой балки. Значения критической силы, определенные таким образом во втором приближении (детерминант второго порядка) и обычным образом [17], для статической устойчивости упругой балки, нагруженной продольной силой посередине, одинаковые — $P_{cr} = 18,7 EJ/l^2$.

В [18] рассмотрена задача другого типа, когда жесткость стержня претерпевает разрыв, и в частности, когда на разных половинах стержня жесткости отличаются в четыре раза, критическая сила, определенная при двучленном приближении, от точного значения отличается $\approx$ на 4%.

ՀԱՐՎԱԾԱՑԻՆ ԲԵՌՆԱՎՈՐՄԱՆ ԴԵՊԲՈՒՄ ԱՌԱՋԳԱՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ
ՉՈՂԻ ԿԱՑՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Վ

Դիտարկվում է ձողի կայունությունը հարվածի դեպքում ընդունելով, որ նյութը ենթարկվում է դժային ամրապնդման: Հաշվի է առնվում ինչպես երկայնական ալիքների տարածումը և անդրադառնալն, այնպես էլ բևեռացման ալիքն իմպուլսային բևեռավորման դեպքում:

ON THE STABILITY OF ELASTIC-PLASTIC BARS FOR IMPACT LOADS

L. A. MOVSISIAN

S u m m a r y

The present paper takes into consideration the stability of bars upon impact in assumption that the material is submitted to linear hardening.

The propagation and reflection of longitudinal waves as a process are taken into account as well as unloaded waves during impulse loading.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем.—Докл. АН СССР, 1949, 64, № 6, с. 779—782.
2. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
3. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
4. Eugene Sevin, On the elastic bending of columns due to dynamic axial force including effects of axial inertia.—J. Appl. Mechanics, series E, 1960, Vol. 27, № 4, pp. 125—131.
5. Ari-Gur J., Weller T. and Singer J. Experimental and theoretical studies of columns under axial impact.—Int. J. Solids Structures, 1982, Vol. 18, № 7, pp. 616—641.
6. Гоф Н. Динамика устойчивости упругих колонн. Механика. Сб. переводов иностранной пер. лит., 1952, № 3, с. 117—128.
7. Джерард Дж. и Беккер Г. Поведение стержней при внезапном воздействии скорости. Механика. Сб. переводов иностранной пер. лит., 1953, № 2, с. 135—139.
8. Мовсисян Л. А. Устойчивость упругой балки при быстрых нагружениях.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1971, т. 24, № 1, с. 38—50.
9. Абгарян К. А. Устойчивость движения на конечном интервале. ВИНТИ, Итоги науки и техники. Общая механика, М.: 1976, т. 3, с. 43—124.
10. Мовсисян Л. А. Об устойчивости упругой балки при продольном ударе.—Докл. АН АрмССР, 1969, т. 49, № 3, с. 124—130.
11. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 191 с.
12. Даревский В. М. Устойчивость оболочки при динамической нагрузке. Труды Всесоюзной конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1970, с. 224—225.

13. Даревский В. М. Критерий устойчивости мгновенного состояния упругого тела при динамической нагрузке. XIII Всесоюзная конференция по теории пластин и оболочек. Таллин, 1983, т. 11, с. 47—52.
14. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Изд. лит. по строительству, 1976. 448 с.
15. Рахматулин Х. А. и Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Госиздат, 1961. 399 с.
16. Корнев В. М., Маркин А. В., Яковлев И. Я. Развитие динамических форм выпучивания упругопластических стержней при интенсивном нагружении.—ЖПМТФ, 1980, № 3, с. 121—126.
17. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1967. 552 с.
18. Иовисян Л. А. Об устойчивости термочувствительных цилиндрических оболочек и пластин.—Механика, Межауз. сб. научных трудов, из-во ЕГУ, 1982, вып. 2, с. 75—80.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
14.XI.1983