ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIX, № 1, 1986 Механика

УДК 624.074.4

К ОДНОМУ МЕТОДУ РАСЧЕТА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ СРЕДЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСИВНЫХ НАГРУЗОК

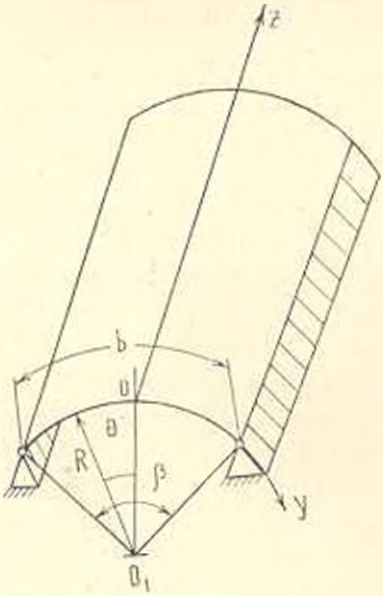
НГУЕН ХОА ТХИНЬ

В статье рассматривается расчет цилиндрической панели (фиг. 1) в нелинейно-упругой среде под действием импульсивных нагрузок. Уделено внимание исследованию взаимодействия среды с панелью и влияния на него параметров уравнения поведения среды и жесткости панели.

Исследуется идеальная плотная среда и жидкая многокомпонентная среда, в которых отсутствуют касательные напряжения. Для этих сред замыкается система уравнений движения частиц среды и неразрывности только одним уравнением, определяющим объемную сжимаемость среды

$$p=f(V) \quad \text{или} \quad p=\varphi(\varepsilon) \tag{1}$$

где p—давление, V—удельный объем среды, ε—объемная деформация, причем $V=V_0(1+\varepsilon)$, V_0—удельный объем среды в невозмущенной зоне.



Фиг. 1

В приближенной линеаризованной постановке задачи кривая „деформация—напряжение" заменяется ломаной с прямолинейными звеньями вида

$$p_{(k)}=A_{(k)}\varepsilon+B_{(k)} \tag{2}$$

где $A_{(k)}$, $B_{(k)}$—параметры уравнения поведения k-ого звена.

Для диаграммы, которая выпукла к оси деформаций, $B_{(k)}<0$.

Пусть волна в среде создается ударной нагрузкой, равномерно распределенной по поверхности полупространства, меняющейся во времени по закону

$$p=\begin{cases} p_m\left(1-\dfrac{t}{T}\right) & \text{при} \quad 0\leq t<T \\ 0 & \text{при} \quad t\geq T \end{cases} \tag{3}$$

где T—продолжительность действия нагрузки.

Принят поверхность полупространства за начальное сечение, запишем систему уравнений движения частиц среды и неразрывности в поле падающей волны в виде [2]

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}=0$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+v_x\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial v_x}{\partial x}=0 \qquad (4)$$

Эта система уравнений замыкается уравнением поведения среды (2), которое записывается в виде

$$p_{(k)}=A_{(k)}\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)+B_{(k)} \qquad (5)$$

В уравнениях (4)—(5) p—давление, v_x—скорость движения частиц среды в направлении распространения падающей волны, ρ—плотность среды, ρ_0—плотность в невозмущенной зоне.

Решение системы уравнений (4)—(5) должно удовлетворять следующим условиям: условию (3) при $x=0$;

$$p=p_0,\quad \rho=\rho_0,\quad v_x=v_0=0 \quad \text{при} \quad t=0,\ x>0 \qquad (6)$$

и условиям на скачке и на поверхности панели; последние будут изложены ниже.

В некоторый момент времени t_1 волна напряжений достигает поверхности панели и отражается от нее.

Отражение от поверхности панели, кроме ее верхней части, происходит как наклонное отражение от плоскости. Однако, вследствие того, что значение угла β (фиг. 1) малое, можно считать, что давление в отраженной волне не зависит от угла θ и характер его изменения во времени такой же, как при $\theta=0$ (то есть в верхней точке поверхности оболочки). В этом случае отраженную волну от поверхности панели приближенно считаем плоской, уравнения движения частиц среды и неразрывности в поле отраженной волны имеют вид

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}+v\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{\partial p}{\partial r}=0,\qquad \frac{\partial \rho}{\partial \tau}+v\frac{\partial \rho}{\partial r}+\rho\frac{\partial v}{\partial r}=0 \qquad (7)$$

Между t и τ, x и r существуют следующие соотношения:

$$r=H-x,\quad \tau=t-t_1,$$

где H—расстояние от поверхности полупространства до верхней точки поверхности панели.

Система уравнений (7) замыкается также уравнением поведения среды (5) и ее решение должно удовлетворять следующим условиям:

условию на поверхности панели

$$v = \frac{\partial x}{\partial \tau} - \frac{\partial w}{\partial \tau} \quad \text{при} \quad r = 0, \text{ то есть при } x = H \tag{8}$$

где $(\partial x/\partial \tau)$ — скорость движения панели как твердого тела в направлении координаты x, $\partial w/\partial \tau$ — радиальная составляющая скорости движения элементов панели

условию (3) при $r = H$ (то есть при $x = 0$),

условиям на скачке, и начальным условиям

$$\rho = \rho(t_1), \quad v = v(t_1), \quad p = p(t_1) \quad \text{при } \tau = 0, \text{ (то есть при } t = t_1) \tag{9}$$

Отражающаяся от панели волна двигается в сторону поверхности полупространства и в некоторый момент времени t_2 достигает этого сечения, отражается от него, возникает третья волна, движущаяся к панели. В некоторый момент времени t_3 третья волна достигает поверхности панели и происходит отражение, зарождается четвертая волна напряжений.

Описанный процесс распространения и отражения возмущений в среде продолжается до того момента времени, когда максимальное значение давления вторичных волн уменьшается приблизительно до нуля.

Для исследования влияния упругих деформаций панели на взаимодействие между средой и панелью и для определения напряженно-деформируемого состояния панели нужно решать совместно систему уравнений (7), (5) и уравнение движения элементов панели.

Предположим, что панель шарнирно закреплена вдоль сторон, параллельных образующей, к основанию с большой массой. Поэтому можно считать $(\partial x/\partial t) \sim 0$, то есть что панель неподвижна.

Вследствие того, что нагрузка равномерно распределена по поверхности полупространства, условия закрепления одинаковые по обоим торцам и всей длине панели, причем среда однородная и изотропная, в рассматриваемой задаче можно считать, что все параметры движения среды и панели не зависят от координаты z.

В этом случае уравнение движения элементов панели примет вид

$$\frac{D}{h}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R}\sigma_y + \frac{p_2}{y} - \rho_* \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \tag{10}$$

где D — цилиндрическая жесткость, ρ_* — плотность материала панели; h, R — толщина и радиус панели, p_2 — сила, вызванная взаимодействием среды с панелью, величину σ_y найдем из условия закрепления краев.

Применяем выражение для прогибов

$$w = \sum_n f_n \cos\frac{n\pi y}{b} \tag{11}$$

Поскольку движение панели начинается лишь с момента времени, когда падающая волна достигает панели, начальные значения для прогибов и радиальных составляющих скоростей движения элементов панели берутся нулевыми

$$w = \partial w/\partial \tau = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0 \tag{12}$$

Здесь время отсчитывается от момента контакта падающей волны с панелью.

После интегрирования уравнения (10) с учетом выражения для прогибов (11) методом Бубнова-Галёркина в первом приближении (при $n=1$) получим обыкновенное дифференциальное уравнение [1]

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{\pi^4}{12(1+\nu^2)}\,\frac{c^2h^2}{b^4}\left(1+\frac{96}{\pi^2}k^2\right)(\zeta - M\zeta^2 + N\zeta^3) - \frac{q_n}{h} = 0 \tag{13}$$

где $\zeta = f/h$, $k = b^2/Rh$, $c = \sqrt{E/\rho_*}$, $M = \dfrac{3k}{\dfrac{\pi^2}{12} + \dfrac{8}{\pi^2}k^2}$

$$N = \frac{1}{\dfrac{1}{3} + \dfrac{32}{\pi^6}k^2}, \quad q_n = \frac{p_{2n}}{\rho_* h^2}, \quad p_{2n} = \frac{2}{b}\int_{-y_1}^{y_1} p_2 \cos\frac{\pi y}{b}\,dy, \quad 0 \leq y_1 \leq \frac{b}{2}$$

Перейдем к методике решения системы уравнений (5), (7), (13) при заданных начальных и граничных условиях.

При пренебрежении влияния упругих деформаций панели на взаимодействие ее с средой, то есть в случае, когда отражение от поверхности панели происходит как от твердого недеформируемого препятствия, сначала можно отдельно решить систему уравнений движения частиц среды и неразрывности (7), замыкающуюся уравнением поведения среды (5), после чего найдем силу, действующую на поверхность панели. Затем, решив дифференциальное уравнение (13), определим параметры движения и напряженно-деформируемое состояние панели.

Задача взаимодействия волны с плоской преградой была решена Ляховым Г. М. и другими методом характеристик [2]. Здесь к решению системы уравнений (7), (5) применяется разностный метод, описанный Рихтмайером Р., Мортоном К. [3]. Для того, чтобы обойти трудность выполнения условий на скачке, введем фиктивную силу псевдовязкости в следующем виде [3]:

$$Q = \begin{cases} l^2\rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)^2 & \text{при} \quad \dfrac{\partial v}{\partial r} < 0 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{14}$$

где $l = a\Delta r$, Δr — шаг переменной Эйлера r, a — число узлов сетки, захватываемых скачками.

В этом случае вместо системы уравнений (7) следует решить систему уравнений вида

$$\begin{gathered} \rho\left(\frac{\partial v}{\partial \tau} + v\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{\partial(p+Q)}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + v\frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho\frac{\partial v}{\partial r} = 0 \end{gathered} \tag{15}$$

Эта система уравнений замыкается уравнением поведения (5) и выражением для силы псевдовязкости (14).

Разностная система уравнений, соответствующая системе (5), (14), (15) при применении первоначальной схемы имеет вид

$$\rho^n_{j+1/2}(v^{n+1}_j - v^n_j)/\Delta\tau + \rho^n_{j+1/2} v^n_j (v^n_{j+1} - v^n_j)/\Delta r +$$

$$+ [(p^n_{j+1/2} - p^n_{j-1/2}) + (Q^n_{j+1/2} - Q^n_{j-1/2})]/\Delta r = 0 \qquad (a)$$

$$(\rho^{n+1}_{j+1/2} - \rho^n_{j+1/2})/\Delta\tau + v^{n+1}_j (\rho^n_{j+1/2} - \rho^n_{j-1/2})/\Delta r + \rho^n_{j+1/2}(v^{n+1}_{j+1} - v^{n+1}_j)/\Delta r = 0 \qquad (b)$$

$$p^{n+1}_{j+1/2} = A_{(k)}\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho^{n+1}_{j+1/2}}\right) + B_{(k)} \qquad (c)$$

$$Q^{n+1}_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{1}{2} a^2 (\rho^{n+1}_{j+1/2} + \rho^n_{j+1/2})(v^{n+1}_{j+1} - v^{n+1}_j)^2 & \text{при } v^{n+1}_{j+1} - v^{n+1}_j < 0 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \qquad (d)$$

(16)

Заменяя граничные условия на начальном сечении и на поверхности панели, применяемые к системе уравнений (16), их конечноразностными эквивалентами и разрешая полученную систему уравнений, найдем значения искомых параметров в момент времени $t = t^{n+1}$, если все искомые параметры известны при $t = t^n$.

Вышеуказанная схема расчета принадлежит Рихтмайеру Р. и Мортону К. [3].

В численном расчете было выбрано значение $a = 2$, отношение шагов $\Delta t/\Delta r$ выбрано из условия обеспечения устойчивости решения задачи.

После определения параметров движения частиц среды и давления, действующего на поверхность панели, перейдем к решению уравнения (13). Это уравнение будем интегрировать методом Рунге-Кутта. Расчет проводится на ЭВМ по стандартной программе RKGS. Программа, используемая для решения системы уравнений (16), входит в программу RKGS как ее подпрограмма.

Таким образом, при пренебрежении влияния упругих деформаций панели на взаимодействие ударных волн с нею решение совместно системы уравнений (7), (5) и уравнения (13) можно разделить на два этапа. Первым из них будет определение внешней нагрузки, действующей на поверхности панели, а вторым—собственно решение уравнения движения элементов панели (13) при найденной внешней нагрузке.

При учете влияния упругих деформаций панели на взаимодействие ударных волн с нею вышеуказанная схема двухэтапного расчета не применима, а необходимо решить совместно систему уравнений (7), (5) и уравнение движения элементов панели (13) как единую систему уравнений. Ее решение должно удовлетворить условию на поверхности панели (8)

$$v = -\partial w/\partial \tau \quad \text{при } r = 0$$

В этом случае расчет проводится по разностному методу.

В качестве примера исследуется цилиндрическая панель, погруженная в грунты. К грунтам применяется модель нелинейно-упругой среды. Кривая «деформация—напряжение» среды заменяется двумя звеньями вида (5), параметры которой для четырех вариантов приведены в таблице 1.

Таблица 1

Варианты среды	$p_г$ (МПа)	A_1 (МПа)	B_1 (МПа)	A_2 (МПа)	B_2 (МПа)
1	3,00	45,6	0	140	—7,12
2	2,00	34,5	0	135	—5,85
3	1,00	20,0	0	132	—5,68
4	1,00	16,0	0	105	—5,85

В табл. 1 $p_г$—значение давления в точке пересечения двух звеньев диаграммы «деформация-напряжение».

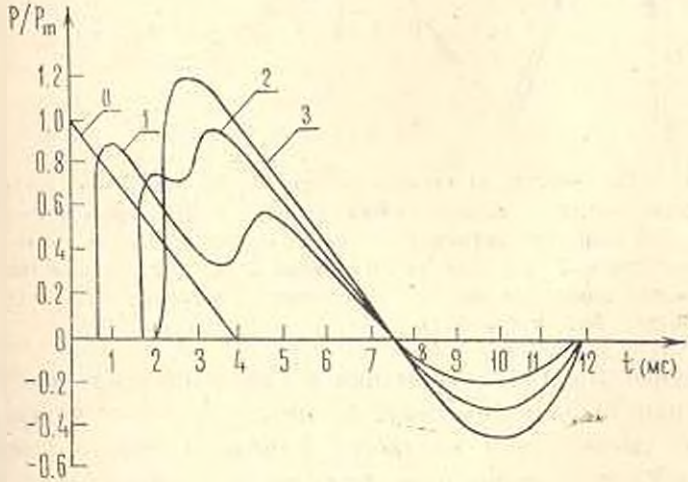
Панель изготовляется из стали с размерами h/R = 0,1; 0,02; 0,03; 0,04; b=6 м; H=0,5 м.

Давление на поверхности полупространства изменяется во времени по закону (3), причем $T=1\cdot10^{-1}$ с.

При расчете выбран шаг по времени $\Delta t=2\cdot10^{-4}$ с., шаг по координате Δr=0,005 м.

На фиг. 2 представлена зависимость $p(t)$ в различных сечениях и на поверхности панели, на фиг. 3 приведены зависимости прогибов и скоростей движения элементов панели при $\theta=0$ от времени.

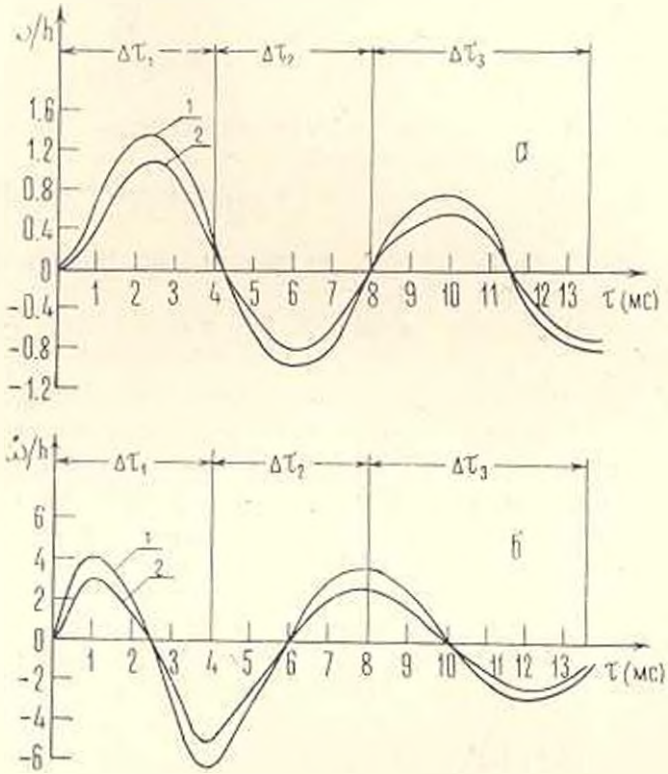
В табл. 2 приведены максимальные значения прогибов и радиальных составляющих скоростей движения при разных значениях h/R и разных вариантах среды.



Фиг. 2. Зависимость $P(t)$ в различных сечениях и на поверхности панели: 0—в начальном сечении, 1—при $x/H=0,25$; 2—при $x/H=0,75$; 3—на поверхности панели. (среда №3).

Из анализа приведенных результатов следует:

1. С одной стороны, чем больше выпуклость диаграммы «деформация-напряжение» относительно оси деформации, тем больше интенсивность угасания давления с увеличением расстояния от поверхности полупространства, с другой стороны, тем больше значение коэффициента отражения от поверхности панели. Поэтому закономерность влияния параметров уравнения поведения среды на напряженно-деформируемое состояние панели определяется только через конкретный анализ численных соотношений между соответствующими параметрами (H, $A_{(k)}$, $B_{(k)}$, ρ_0, E, ρ_*, h/R, ...).



Фиг. 3. Зависимости от времени а) прогиба, б) радиальной составляющей скорости верхней точки панели: 1—при пренебрежении влияния скоростей движения элементов панели на взаимодействие с нею среды, 2—с учетом этого влияния, $\Delta\tau_i$, $i=1, 2, 3, \ldots$—интервал времени пробега волны на расстояниях, кратных $2H$ (среда варианта № 3, $h/R=0{,}01$).

2. Влияние упругих деформаций и скоростей движения точек поверхности панели на взаимодействие между средой и панелью увеличивается с уменьшением жесткости панели (здесь с уменьшением значений h/R) и с увеличением параметров уравнения поведения среды.

Из фиг. 3 видно, что наибольшее значение прогибов и скоростей движения элементов панели возникает в процессе распространения

первых вторичных волн после соприкосновения падающей волны с панелью и отражения от нее. Поэтому решение задачи на этом этапе имеет важное значение для практики.

Таблица 2

Значения w_{max}/h при w_{max}/h при разных значениях h/R и разных вариантах сред

Варианты сред	h/R	(1)		(2)	
		w_{max}/h	w_{max}/h	w_{max}/h	w_{max}/h
1	0,01	1,37	6,09	1,02	5,01
2	0,01	1,39	6,17	1,09	5,08
	0,01	1,42	6,24	1,14	5,25
	0,02	0,380	1,56	0,320	1,41
3	0,03	0,157	0,700	0,134	0,630
	0,04	0,071	0,310	0,067	0,290
4	0,01	1,45	6,18	1,17	5,12

В табл. 2 в графе (1) дан результат расчета при пренебрежении влияния скоростей движения элементов панели на взаимодействие ее с средой, а в графе (2) — с учетом этого влияния.

ԻՄՊՈՒԼՍԱՅԻՆ ԲԵՌՆԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՍԱԼԻ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՄԻ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ

ՆԳՈՒԻԵՆ ԽՈԱ ՏԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում կատարված է գլանաձև սալի հաշվարկը ոչ գծային առաձգական միջավայրում իմպուլսային ուժի ազդեցության տակ։

Ավելորդ ճնշումը հետադարձ ալիքի դաշտում որոշվում է սալի մակերևույթի կետերում ելնելով ճակատային ալիքի ճնշումից։

Ներկայացված է կատարված հաշվարկի արդյունքները, ցույց է տրված միջավայրի վիճակի հավասարման ազդեցության չափերը և սալի ամրությունը միջավայրի և սալի միջև եղած ազդեցությունից։

A METHOD OF DETERMINING CYLINDRICAL PANEL IN NON-LINEAR ELASTIC MEDIUM ON ACTION OF IMPULSIVE LOADS

NGUYEN HOA THINH

Summary

The paper considers the estimation of cylindrical panel in non-linear elastic medium with impulsive actions.

Excessive pressure in the field of the reflected wave at the points of shell surfaces is determined from the general ratio on the front of wave of tention.

The results of calculation are presented. The influence of the parameters of equation of the state of medium and the rigidity of the shell on the interaction between the shell and the medium is shown.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
2. *Ляхов Г. М.* Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. М.: Наука, 1982. 286 с.
2. *Ляхов Г. М.* Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. М.: Наука, 418 с.

Ростовский инженерно-строительный институт

Поступила в редакцию 4.1. 1985