

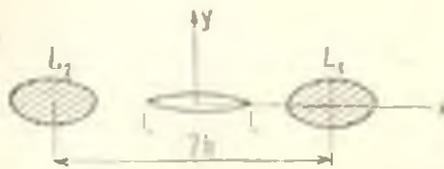
УДК 539.375

АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ТЕЛА С ТРЕЩИНОЙ И
 ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ УПРУГИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

КАЛОЕРОВ С. А.

В работе [1] приведен метод определения напряженного состояния и коэффициента интенсивности напряжений для антиплоской деформации многосвязного тела с трещинами, исследовано влияние их близости к поверхностям цилиндрических полостей и «степень» анизотропии материала на концентрацию напряжений. В данной статье исследуется влияние упругих включений на изменение концентрации напряжений. Аналогичные исследования влияния круговых упругих включений для плоской задачи изотропного тела приведены в работах [3—7].

§ 1. Рассмотрим бесконечное ортотропное или изотропное тело с двумя одинаковыми эллиптическими (круговыми) цилиндрическими включениями из упругого материала и симметричной «туннельной» трещиной между ними. Будем предполагать, что на поверхности соприкосновения имеют место условия идеального контакта, на бесконечности тело загружено усилиями $\tau_{yz} = \rho$, $\tau_{xz} = 0$. В сечении тела с



Фиг. 1

плоскостью, перпендикулярной оси продольного сдвига, получается многосвязная область, ограниченная эллипсами L_1 , L_2 и разрезанная отрезком длины $2l$ (фиг. 1). Обозначим полуоси эллипсов и расстояние между их центрами через a , b и $2h$. В качестве частного случая будем рассматривать также тело с трещиной и одним правым включением.

Определение напряженного состояния рассматриваемого кусочно-однородного тела сводится [1] к нахождению комплексных потенциалов $\varphi_2(z_2)$ и $\varphi_1^*(z_1^*)$ из соответствующих граничных условий.

Функция $\varphi_2(z_2)$ кусочно-голоморфна в многосвязной области S_2 , ограниченной контурами L_{21} , L_{22} , получаемыми из L_1 и L_2 аффинным преобразованием $z_2 = x + i\beta_2 y$, где $\beta_2 = \sqrt{G_{12} G_{22}}$; G_{12} , G_{22} — модули сдвига для соответствующих напряжений. Отрезок $[-l, l]$ является линией скачков $\varphi_2(z_2)$.

Функция $\varphi_1(z_1) = \varphi_1^*(z_1^*)$ имеет вид [1]

$$\phi_3(z_3) = \frac{d_{30} z_3}{\lambda(z_3)} + \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{\lambda(z_3)} \left[\frac{1}{z_3^k} + \frac{r(-1)^{k+1}}{z_3^k} \right] \quad (1.1)$$

Здесь $d_{30} = p/2$; $\lambda(z_3) = \sqrt{z_3^2 - l^2}$
 z_3 — переменные, определяемые из зависимостей

$$z_3 - h = R_3 \left(z_2 + \frac{m_3}{z_2} \right); \quad z_3 + h = R_3 \left(z_2 + \frac{m_3}{z_2} \right) \quad (1.2)$$

$$R_3 = \frac{a + \beta_3 b}{2}; \quad m_3 = \frac{a - \beta_3 b}{a + \beta_3 b} \quad (1.3)$$

r — величина, равная 0 для случая одного включения и 1 для случая двух включений; b_k — неизвестные вещественные постоянные.

Функция $\varphi_3^1(z_3^1)$ голоморфна в эллипсе L_{31}^1 , получаемом из L_3 аффинным преобразованием $z_3^1 = x + i\beta_3 y$, где $\beta_3^1 = \sqrt{G_{xz}^1 G_{yz}^1}$, G_{xz}^1 , G_{yz}^1 — модули сдвига для материала включений. Поэтому $\varphi_3^1(z_3^1)$ можно разложить в ряд по полиномам Фабера для эллипса L_{31}^1 [2]

$$\varphi_3^1(z_3^1) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k P_k(z_3^1) \quad (1.4)$$

Здесь

$$P_0 = 1, \quad P_k(z_3^1) = z_3^{k+1} + m_3^{k+1} z_3^{-k-1} \quad (1.5)$$

z_3^1 — переменная, определяемая из зависимости

$$z_3^1 - h = R_3^1 \left(z_2 + \frac{m_3^1}{z_2} \right); \quad R_3^1 = \frac{a + \beta_3^1 b}{2}; \quad m_3^1 = \frac{a - \beta_3^1 b}{a + \beta_3^1 b} \quad (1.6)$$

Из условий идеального контакта (напряжения и перемещения на поверхности равны) получим

$$2 \operatorname{Re} \varphi_3(z_3) = 2 \operatorname{Re} \varphi_3^1(z_3^1); \quad 2 \operatorname{Re} [i \varphi_3(z_3)] = \frac{x^1}{z} 2 \operatorname{Re} [i \varphi_3^1(z_3^1)] \quad (1.7)$$

При этом

$$x = \sqrt{1/G_{xz} G_{yz}}; \quad x^1 = \sqrt{1/G_{xz}^1 G_{yz}^1}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.7) на контуре L_3 (при этом в случае двух включений условия на L_2 и силу использованной симметрии удовлетворяются автоматически) таким же образом, как и в работе [1], получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для определения b_k , β_k :

$$\sum_{k=1}^n (B_{k-1} - m_3 B_{k+1}) b_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^n [(1 + \beta_n^1 m_3) B_{k-n-1} - m_3 B_{k+n+1} + (1 + m_3^2) r (D_{kn-1} - m_3 D_{kn+1})] b_k + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} (1 - \beta_n^1) m_3^k B_{k-1} b_{n-k} - \sum_{k=1}^{n-1} m_3^{k-1} B_{k-1} b_{n-k-2} + \sum_{k=n}^{\infty} (1 - \beta_n^1) m_3 B_{k-n+1} b_k =$$

$$\begin{aligned}
-\sum_{k=n+2}^{\infty} B_{k-n-1} b_k - \frac{n}{R_3} (1+m_3^n) \beta_n &= -(1+m_3^n) d_{30} (B_{1n-1} - m_3 B_{1n-1}) \\
\sum_{k=1}^{\infty} [B_{k+n-1} - m_3 B_{k+n-1} + r(D_{k,n-1} - m_3 D_{k,n+1})] b_k &- \\
-\frac{n}{2R_3} \left[1 + \frac{x^2}{z} + m_3^{1n} \left(1 - \frac{x^2}{z} \right) \right] \beta_n &= -d_{30} (B_{1n-1} - m_3 B_{1n-1})
\end{aligned} \quad (1.8)$$

где B_n, B_{1n}, D_{kn} — коэффициенты следующих разложений:

$$X^{-1}(z_3) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(z_3); \quad z_3 X^{-1}(z_3) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{1n} P_n(z_3) \quad (1.9)$$

$$(-1)^{k+1} X^{-1}(z_3) [z_3(z_3)]^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} D_{kn} P_n(z_3)$$

$P_n(z_3)$ — полиномы Фабера для эллипса L_{31} .

После решения системы (1.8) будут известными функции $\Phi_3(z_3)$ и $\Phi_3^1(z_3^1) = \Phi_3^{-1}(z_3^1)$. Это позволяет найти напряжения

$$\begin{aligned}
\tau_{xz} &= -2 \operatorname{Re} [i \beta_3 \Phi_3(z_3)]; \quad \tau_{yz} = 2 \operatorname{Re} \Phi_3(z_3) \\
\tau_{xz}^1 &= -2 \operatorname{Re} [i \beta_3^1 \Phi_3^1(z_3^1)]; \quad \tau_{yz}^1 = 2 \operatorname{Re} \Phi_3^1(z_3^1)
\end{aligned} \quad (1.10)$$

а также коэффициент интенсивности напряжений [1]

$$k_3^{\pm} = 2d_{30} \sqrt{l} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2b_k}{\pm \sqrt{l}} \left[\frac{1}{z_3^k(\pm l)} + \frac{r(-1)^{k+1}}{z_3^k(\pm l)} \right] \quad (1.11)$$

При вычислении $\Phi_3^1(z_3^1)$ нужно пользоваться формулой [2]

$$\begin{aligned}
P_{k+1}^1(z_3^1) &= \frac{k+1}{k} \frac{z_3^1 - h}{R_3^1} P_k^1(z_3^1) - \frac{k+1}{k-1} m_3^1 P_{k-1}^1(z_3^1) \quad (k=2, 3, \dots) \\
P_1^1(z_3^1) &= \frac{1}{R_3^1}; \quad P_2^1(z_3^1) = \frac{2(z_3^1 - h)}{(R_3^1)^2}
\end{aligned} \quad (1.12)$$

§ 2. Численные исследования были проведены для случая, когда упругие постоянные включений были пропорциональны упругим постоянным тела

$$G_{xz}^1 = \lambda G_{xz}; \quad G_{yz}^1 = \lambda G_{yz} \quad (2.1)$$

Для таких включений

$$\beta_3^1 = \beta_3; \quad R_3^1 = R_3; \quad m_3^1 = m_3; \quad x^1/z = \lambda^{-1} \quad (2.2)$$

В табл. 1 приведены значения k_{30} — отношения коэффициента интенсивности напряжения k_3 к соответствующему коэффициенту $k_3^0 = \rho \sqrt{l}$ для бесконечного однородного тела с трещиной, а в табл. 2 с точностью до множителя ρ — значения максимальных нормальных напряжений в теле около контура его контакта с правым включением. При этом счи-

талось, что $b/a=1$, $h/a=1,25$; $\varepsilon=1/(h-a)=0,5$. Коэффициент k_{30}^+ и данные табл. 2 относятся к случаю двух включений, k_{30}^+ , k_{30}^- — коэффициенты для правого и левого концов трещины соответственно; значение $\lambda^{-1}=\infty$ соответствует случаю неподкрепленных полостей.

Таблица 1

$\frac{\sigma_{xz}}{\sigma_{yz}}$	k_{30}	λ^{-1}						
		∞	100	10	2	0.5	0.1	0.01
0.5	k_{30}^+	3.267	3.192	2.648	1.509	0.630	0.254	0.160
	k_{30}^-	1.913	1.891	1.716	1.263	0.789	0.480	0.295
	k_{30}^{\pm}	1.682	1.665	1.536	1.197	0.826	0.607	0.542
1.0	k_{30}^+	3.147	3.083	2.601	1.521	0.602	0.178	0.067
	k_{30}^-	1.781	1.765	1.634	1.254	0.752	0.401	0.286
	k_{30}^{\pm}	1.621	1.603	1.506	1.204	0.800	0.514	0.420
2.0	k_{30}^+	2.977	2.919	2.482	1.493	0.606	0.155	0.027
	k_{30}^-	1.635	1.624	1.529	1.227	0.753	0.352	0.204
	k_{30}^{\pm}	1.532	1.523	1.445	1.192	0.789	0.440	0.310

Таблица 2

$\frac{\sigma_{xz}}{\sigma_{yz}}$	λ^{-1}	λ	λ							
			0	30	60	90	120	150	165	180
0.5	∞	∞	2.69	1.90	0.86	0.16	0.56	1.94	3.16	4.80
	2	∞	1.45	1.14	0.59	0.03	0.54	1.15	1.49	1.93
	0.5	2	0.00	0.62	1.07	1.23	-1.01	-0.56	-0.31	0.00
	0.1	2	0.00	0.78	1.31	1.51	-1.22	-0.58	-0.27	0.00
1.0	∞	∞	2.22	1.96	1.25	0.28	0.77	2.01	2.82	4.29
	2	∞	1.38	1.20	0.71	0.05	0.62	1.20	1.43	1.87
	0.5	2	0.00	0.66	1.13	1.29	-1.07	-0.55	-0.29	0.00
	0.1	2	0.00	0.88	1.51	1.69	-1.32	-0.54	-0.22	0.00
2	∞	∞	1.89	1.90	1.70	0.49	1.00	1.96	2.53	3.89
	2	∞	1.31	1.22	0.89	0.10	0.74	1.20	1.37	1.80
	0.5	2	0.00	0.70	1.21	1.37	-1.11	-0.53	-0.26	0.00
	0.1	2	0.00	1.03	1.75	1.93	-1.44	-0.47	-0.15	0.00

Из таблицы следует, что подкрепление полостей упругими включениями приводит к снижению концентрации напряжений около трещины и полостей. Анизотропия материала существенно влияет на напряженное состояние тела, если жесткость включений значительно отличается от жесткости материала тела ($\lambda \geq 10$; $\lambda \leq 0,1$).

ՀԱՔՐՈՎ ԵՎ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ՆԵՐՊՐԱԿՆԵՐՈՎ
ՄԱՐՄՆԻ ՀԱԿԱՀԱՐԹ ԿԵՅՈՐՈՒՄՑԻԱՆ

Ս. Ա. ԿԱՌԵՐՈՎ
Ս. Ա Փ Ո Փ Ո Ս

[1] աշխատանքում բերված է ճաբով բաղմաչևրտ մարմնի հակահարթ ղեՖորմացիայի համար լարվածային վիճակի և լարումների ինտենսիվության

դորձակցի որոշման մեթոդ ներկա աշխատանքում Եւտադոտոված է լարում-
ների կոնցենտրացիայի փոփոխման վրա առաձգական ներդրակների ազդե-
ցությունը:

ANTIPLANE BODY DEFORMATION WITH CRACK AND ELLIPTICAL ELASTIC INCLUSIONS

S. A. KALOYEROV

S u m m a r y

The distribution of strains in an anisotropic or isotropic body with "tunnel" crack and elliptical elastic inclusions is investigated.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Калоев С. А. Антиплоская деформация упругих тел с трещинами.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1985, т. 38, № 6.
2. Космодамианский А. Г., Калоев С. А. Температурные напряжения в многосвязных пластинках. Киев-Донець: Внша школа, Головное изд-во, 1982. 159 с.
3. Atkinson C. The interaction between a crack and an inclusion.—Int. J. Eng. Sci., 1972, vol. 10, № 2, pp. 127—136.
4. Erdogan F., Gupta G. D. The inclusion problem with a crack crossing the boundary.—Int. J. Fract., 1975, vol. 11, № 1, pp. 13—27.
5. Erdogan F., Gupta G. D., Ratwan M. Interaction between a circular inclusion and an arbitrarily oriented crack.—J. Appl. Mech., Trans. ASME, ser. E, 1974, vol. 41, № 4, pp. 1007—1013.
6. Hsu Y. C., Shivakumar V. Interaction between an elastic circular inclusion and two symmetrically placed collinear cracks.—Int. J. Fract., 1976, vol. 12, № 4, pp. 619—630.
7. Tamate O. The effect of a circular inclusion on the stresses around a line crack in a sheet under tension.—Int. J. Fract. Mech., 1968, vol. 4, № 3, pp. 257—266.

Донецкий государственный университет

Поступила в редакцию
14.11.1983