ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVIII, № 6, 1985 Механика

УДК 532.5

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИЗГИБНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАСТИНЕ, НАХОДЯЩЕЙСЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

АВАГЯН С. Г.

В настоящей работе рассматриваются задачи о распространении волн с медленно меняющимися амплитудами и фазами [1] на поверхности раздела жидкости с физически нелинейной упругой пластиной при наличии изгибных волн в ней. Получается нелинейное дисперсионное соотношение, играющее основную роль в условиях устойчивости решений уравнений модуляции амплитуд и фаз. Применяется вариационный принцип для системы жидкость-пластина путем сложения проинтегрированных по глубине лагранжианов жидкости [1] и пластины [2]. Решение для бесконечно глубокой жидкости, покрытой пластиной, получено [4], где дается решение как указанным методом, так и путем прямого решения уравнения Лапласа для жидкости и удовлетворения граничных условий на границе раздела, причем решение ищется в форме разложения Стокса [1] в виде суммы последовательных гармоник. Совпадение решений, полученных последним и вариационным методами для бесконечно глубокой жидкости, дает уверенность в том, что метод настоящей работы является соответствующим рассматриваемой задаче. Показано, что наличие пластины увеличивает продольную и уменьшает поперечную устойчивость [3] модулированных волн в некотором диапазоне.

В работах [7, 8] имеется обзор задач распространения линейных и нелинейных волн по поверхности жидкости, покрытой упругой пластиной. Линейная задача об изгибе пластины под действием сосредоточенной силы с нахождением асимптотики в виде волн с медленно меняющейся амплитудой решена в [6]. Исследование уточненных теорий для пластин, которое необходимо при высоких частотах, дано в работе [9]. Для жидкости конечной глубины со свободной поверхностью уравнения модуляции амплитуд и фаз квазимонохроматических волн и условие устойчивости волновых пакетов рассмотрены в [1].

Рассмотрим волны на поверхности жидкости конечной глубины, ограниченной нелинейной упругой пластиной. Для решения данной задачи применим вариационный принцип. Сущность задачи заключается в следующем: несжимаемая весомая жидкость конечной глубины h_0 покрыта вдоль поверхности $z=0$ пластиной. С помощью вариационного подхода находится усредненный лагранжиан. Движение жидкости рассматривается в эйлеровых координатах X, Y, Z, а уравнение пластины — в лагранжевых x, y, z. В силу того, что пренебрегается геометрическая нелинейность, уравнение пластины можно записывать также в эйлеровых координатах

$$X=x+u_x, \quad Y=y+u_y, \quad Z=z+u_z \tag{1}$$

где u_x, u_y, u_z — компоненты перемещений точек срединной плоскости пластины по направлению x, y, z. Надо отметить, что ось z направлена вверх. В силу симметрии задачи достаточно рассмотреть плоскость xz. Вариационный принцип дается равенством

$$\delta \iint_R L\,dx\,dt=0$$

где L — осредненный по z лагранжиан. Для нашего случая лагранжиан равен сумме лагранжианов жидкости и пластины

$$L=L_ж+L_п \tag{2}$$

Усредненный по фазе лагранжиан находится по формуле [1]

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L d\theta \tag{3}$$

где θ — фазовая функция. Из (2) и (3) следует, что

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_ж+\mathscr{L}_п \tag{4}$$

Таким образом, для нахождения усредненного лагранжиана надо вычислить усредненный лагранжиан жидкости $\mathscr{L}_ж$ и пластины $\mathscr{L}_п$. Лагранжиан жидкости вычисляется по формуле [1]

$$L_ж=-\rho_0\int_{-h_0}^{\eta}\left[\varphi_t+\frac{1}{2}(\Delta\varphi)^2+gz\right]dz \tag{5}$$

где ρ_0 — плотность жидкости, φ — потенциал скоростей, $\varphi_t=\partial\varphi/\partial t$. Наиболее общая форма периодического волнового пакета для одномерного случая такова: $\varphi=\beta x-\gamma t+\Phi(\theta, z)$, $\theta=kx-\omega t$, $\eta=N(\theta)$, где $\eta=N(\theta)$ — уравнение поверхности $z=0$. $\Phi(\theta, z)$, как и $N(\theta)$, периодические функции от θ, ω — частота, k — волновое число. Параметр β — средняя горизонтальная скорость φ_x, а величина γ связана со средней высотой волн. Подставляя значение φ в (5), получим

$$L_ж=-\rho_0\int_{-h_0}^{N}\left[-\gamma-\omega\Phi_\theta+\frac{1}{2}(\beta+k\Phi_\theta)^2+\frac{1}{2}\Phi_z^2+gz\right]dz=\rho_0\left(\gamma-\frac{1}{2}\beta^2\right)(N+$$

$$+h_0)-\frac{1}{2}\rho_0 g(N^2-h_0^2)+(\omega-\beta k)\rho_0\int_{-h_0}^{N}\Phi_\theta dz-\rho_0\int_{-h_0}^{N}\left(\frac{1}{2}\Phi_z^2+\frac{1}{2}k^2\Phi_\theta^2\right)dz$$

Нижними индексами обозначены производные по θ и z соответственно. Периодические функции $\Phi(\theta, z)$ и $N(\theta)$ представляются в виде рядов Фурье

$$\Phi(\theta, z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{A_n}{n} \operatorname{ch} kn(z+h_0) \sin n\theta \tag{6}$$

$$N(\theta) = b + a\cos\theta + \sum_{2}^{\infty} a_n \cos n\theta \tag{7}$$

где a—амплитудный параметр, а b—средняя высота поверхности волы. Так как для наших целей достаточно первых нелинейных членов в $\mathcal{L}$, то удовлетворимся членами порядка a^3 включительно, поэтому из (6) и (7) принимаем

$$\Phi = A_1 \operatorname{ch} k(z+h_0)\sin\theta + \frac{A_2}{2}\operatorname{ch} 2k(z+h_0)\sin 2\theta$$

$$N = b + a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta$$

где $a_1 = a$. После соответствующих вычислений получаем

$$L_\varkappa = \rho_0\left(\gamma - \frac{1}{2}\beta^2\right)(b+h_0+a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta) - \frac{1}{2}\rho_0 g[(b+a_1\cos\theta+$$

$$+a_2\cos 2\theta)^2 - h_0^2] + \frac{(\omega-\beta k)\rho_0}{k}\Bigg[A_1\cos\theta\operatorname{sh}k(b+h_0+a_1\cos\theta+a_2\cos 2\theta)+$$

$$+\frac{A_2}{2}\cos 2\theta\operatorname{sh}2k(b+h_0+a_1\cos\theta+a_2\cos 2\theta)\Bigg] - \frac{\rho_0 k^2}{2}\Bigg\{\frac{A_1^2}{4k}\operatorname{sh}2k(b+h_0+$$

$$+a_1\cos\theta+a_2\cos 2\theta)+\frac{A_1^2}{2}(2h_0+b+a_1\cos\theta+a_2\cos 2\theta)\cos 2\theta+$$

$$+\frac{A_2^2}{8k}\operatorname{sh}4k(b+h_0+a_1\cos\theta+a_2\cos 2\theta)+\frac{A_2^2}{2}(2h_0+b+a_1\cos\theta+$$

$$+a_2\cos 2\theta)\cos 4\theta+\frac{1}{3}A_1A_2\cos\theta\operatorname{sh}3k(b+h_0+a_1\cos\theta+a_2\cos 2\theta)+$$

$$+A_1A_2\cos 3\theta\operatorname{sh}k(b+h_0+a_1\cos\theta+a_2\cos 2\theta)\Bigg\}$$

Обозначая $h = b+h_0$, будем иметь

$$-\frac{\mathcal{L}_\varkappa}{\rho_0} = \left(\frac{1}{2}\beta^2-\gamma\right)h + \frac{1}{2}gb^2 - \frac{1}{2}gh_0^2 + \frac{1}{4}ga_1^2 + \frac{1}{4}ga_2^2 -$$

$$-\frac{(\omega-\beta k)}{k}(\mu_1 A_1+\mu_2 A_2) + k\left(\frac{1}{2}\mu_{11}A_1^2+\mu_{12}A_1A_2+\frac{1}{2}\mu_{22}A_2^2\right)+O(a_1^4) \tag{8}$$

где

$$\mu_1 = \frac{1}{2}ka_1\operatorname{ch}kh + \frac{1}{4}k^2a_1a_2\operatorname{sh}kh + \frac{1}{16}k^3a_1^3\operatorname{ch}kh$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2}ka_2\operatorname{ch}2kh + \frac{1}{4}k^2a_1^2\operatorname{sh}2kh$$

$$\mu_{11} = \frac{1}{4}\,\mathrm{sh}\,2kh + \frac{1}{4}\,k^2 a_1^2\,\mathrm{sh}\,2kh + \frac{1}{4}\,ka_2$$

$$\mu_{12} = \frac{1}{4}\,ka_1\,\mathrm{ch}\,3kh, \qquad \mu_{22} = \frac{1}{8}\,\mathrm{sh}\,4kh$$

Для нахождения A_1 и A_2 (8) варьируем по A_1 и A_2, при этом получим

$$\mathcal{L}_{ж_{A_1}} = \mu_{11} A_1 + \mu_{12} A_2 - \frac{\omega - 3k}{k^2}\,\mu_1 = 0, \qquad \mathcal{L}_{ж_{A_2}} = \mu_{12} A_1 + \mu_{22} A_2 - \frac{\omega - 3k}{k^2}\,\mu_2 = 0$$

Подставляя A_1 и A_2 в $\mathcal{L}_ж$, можно получить

$$-\mathcal{L}_ж = \rho_0\left(\frac{1}{2}\,\beta^2 - \gamma\right)h + \frac{1}{2}\,\rho_0 g b^2 - \frac{1}{2}\,\rho_0 g h_0^2 + \frac{1}{4}\,\rho_0 g a_1^2 + \frac{1}{4}\,\rho_0 g a_2^2 -$$

$$-\frac{1}{4}\,\rho_0\,\frac{(\omega - 3k)^2}{kT}\left[a_1^2 - \frac{2T^2 - 1}{4T^2}\,k^2 a_1^4 - \frac{3 - T^2}{2T}\,ka_1^2 a_2 + (1 + T^2)\,a_2^2\right]$$

где $T = \mathrm{th}\,kh$. Как известно, лагранжиан равен разности кинетической и потенциальной энергий. Тогда лагранжиан пластины будет

$$L_п = K - \Pi \tag{9}$$

где K — кинетическая энергия пластины, а Π — потенциальная энергия. Пусть срединная плоскость пластинки в недеформированном состоянии совпадает с плоскостью $z = 0$. Кинетическая энергия пластинки вычисляется по формуле

$$K = \frac{1}{2}\,\rho\int_{-\bar{h}/2}^{\bar{h}/2}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2\right]dz \tag{10}$$

так как скорости частиц $V_x = \dfrac{\partial u_x}{\partial t}$, $V_y = \dfrac{\partial u_y}{\partial t}$, $V_z = \dfrac{\partial u_z}{\partial t}$, причем производные вычисляются в лагранжевых координатах, где ρ — плотность пластины, $\bar{h}$ — толщина. Из теории пластинок известно [2], что потенциальная энергия пластины имеет следующий вид:

$$\Pi = \int_{-\bar{h}/2}^{\bar{h}/2}\left(\frac{9}{2}\,K_1 \varepsilon_0^2 + 3K_1 \varkappa_1 \varepsilon_0^3 + \frac{3}{4}\,G\psi_0^2 + \frac{3}{8}\,G\gamma_2\psi_0^4\right)dz \tag{11}$$

где K_1 — модуль объемного сжатия, G — модуль сдвига, $\varkappa_1$ — функция удлинения, γ_2 — функция сдвига, ψ_0 — интенсивность деформации сдвига

$$\psi_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{3}\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 - \varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_y\varepsilon_z - \varepsilon_z\varepsilon_x\right) + \frac{1}{2}\,\gamma_{xy}^2} \tag{12}$$

Как и в линейной теории упругой среды, примем, что поперечное удлинение ε_z равно $\varepsilon_z = -\dfrac{\nu}{1-\nu}\,(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$, где ν — коэффициент Пуассона.

Для среднего удлинения имеем

$$\varepsilon_0 = -\frac{1}{3}\frac{1-2\nu}{1-\nu} z\Delta u_z$$

где Δ — оператор Лапласа, равный $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Исходя из линейной теории тонких пластинок при небольших прогибах и предполагая, что $u_x = 0$, $u_y = 0$, получим [2]

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\,\partial y}$$

Тогда из (12) квадрат интенсивности деформации сдвига будет

$$\gamma_0^2 = \frac{8}{9}\left\{\nu_1\left[\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)^2\right] + \nu_2\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + 3\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right\} z^2$$

где $\nu_1 = \frac{\nu}{(1-\nu)^2} + 1$, $\nu_2 = \frac{2\nu}{(1-\nu)^2} - 1$

Имея в виду соотношение $\nu = \frac{1}{2}\frac{3K_1 - G}{3K_1 + G}$, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, из (11) получим

$$\Pi = \int_{-\bar{h}/2}^{\bar{h}/2}\left\{\frac{E(1-2\nu)}{6(1-\nu)^2} z^2\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)^2 - \frac{E\varkappa_1}{1-2\nu}\frac{z^3}{27}\frac{(1-2\nu)^3}{(1-\nu)^3}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)^3 + \right.$$

$$+ \frac{Ez^2}{3(1+\nu)}\left[\frac{1-\nu+\nu^2}{(1-\nu)^2}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{1-\nu+\nu^2}{(1-\nu)^2}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)^2 + \frac{4\nu-1-\nu^2}{(1-\nu)^2}\cdot\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \right.$$

$$\left. + 3\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial y}\right)^2\right] - \frac{8}{27}G\gamma_2 z^4\left[\frac{1-\nu+\nu^2}{(1-\nu)^2}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)^2 + \frac{1-\nu+\nu^2}{(1-\nu)^2}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)^2 + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{4\nu-1-\nu^2}{(1-\nu)^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + 3\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial y}\right)^2\right]^2\right\} dz$$

После интегрирования имеем

$$\Pi = \frac{E\bar{h}^3}{24(1-\nu^2)}\left[\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)^2\right] + \frac{E\bar{h}^3\nu}{12(1-\nu^2)}\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} +$$

$$+ \frac{E\bar{h}^3}{12(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial y}\right)^2 - \frac{G\gamma_2\bar{h}^5}{270}\left\{\frac{1-\nu+\nu^2}{(1-\nu)^2}\left[\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)^2\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{4\nu-1-\nu^2}{(1-\nu)^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + 3\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}^2 \tag{13}$$

Учитывая тот факт, что $u_x = 0$, $u_y = 0$, из (10) после интегрирования для кинетической энергии пластины будем иметь

$$K = \frac{1}{2}\rho\bar{h}\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2 \tag{14}$$

Подставляя (13) и (14) в (9), получим

$$L_{n}=\frac{1}{2}\rho\bar{h}\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2-\frac{G\bar{h}^3}{12(1-\nu)}\left[\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)^2\right]-\frac{G\bar{h}^3}{6}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial y}\right)^2-$$

$$-\frac{G\bar{h}^3\nu}{6(1-\nu)}\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}-\frac{G\gamma_2\bar{h}^5}{270}\left\{\frac{1-\nu+\nu^2}{(1-\nu)^2}\left[\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{4\nu-1-\nu^2}{(1-\nu)^2}\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+3\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}^2$$

Имея в виду, что $u_z=N=b+a_1\cos\theta+a_2\cos 2\theta$, $\theta=kx-\omega t$, после вычисления по (3) усредненный лагранжиан пластины можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{L}_n=\frac{1}{4}\rho\bar{h}\omega^2(a_1^2+4a_2^2)-\frac{G\bar{h}^3k^4}{24(1-\nu)}(a_1^2+16a_2^2)-$$

$$-\frac{G\gamma_2\bar{h}^5}{270}\,\frac{(1-\nu-\nu^2)^2}{(1-\nu)^4}\,k^8\left(\frac{3}{8}a_1^4+48a_1^2a_2^2\right)$$

При решении рассматривался одномерный случай. Полагая $\theta=\alpha_1 x+$ $+\alpha_2 y-\omega t$, нетрудно показать, что L для пространственного случая дается в одномерном виде, где нужно полагать $k^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2$. Из (4) для общего усредненного лагранжиана будем иметь

$$\mathcal{L}=-\rho_0\left(\frac{1}{2}\beta^2-\gamma\right)h-\frac{1}{2}\rho_0 g h^2+\frac{1}{2}\rho_0 g h_0^2-\frac{1}{4}\rho_0 g a_1^2-\frac{1}{4}\rho_0 g a_2^2+$$

$$+\frac{1}{4}\rho_0\frac{(\omega-\beta k)^2}{kT}\left[a_1^2-\frac{2T^2-1}{4T^2}k^2a_1^4-\frac{3-T^2}{2T}ka_1^2a_2+(1+T^2)a_2^2\right]+$$

$$+\frac{1}{4}\rho\bar{h}\omega^2(a_1^2+4a_2^2)-\frac{G\bar{h}^3k^4}{24(1-\nu)}(a_1^2+16a_2^2)-\frac{G\gamma_2\bar{h}^5}{270}\,\frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^4}\,k^8\times$$

$$\times\left(\frac{3}{8}a_1^4+48a_1^2a_2^2\right)\qquad(15)$$

В общем случае изменение средних значений γ, β, h связано с волновым движением, и, как показывается [1], изменения этих величин имеют порядок $O(a_1^2)$. Поэтому в членах с a_1^4 можно считать $T=T_0=$ $=\operatorname{th} kh_0$. Варьируя по a_2 (15), получим

$$\mathcal{L}_{a_2}=0;\ -\frac{\rho_0 g a_2}{2}-\frac{\rho_0(\omega-\beta k)^2}{4kT_0}\left[\frac{3-T_0^2}{2T_0}ka_1^2-2(1+T^2)a_2\right]+$$

$$+2\rho\bar{h}\omega^2a_2-\frac{4}{3}\,\frac{G\bar{h}^3k^4}{1-\nu}\,a_2=0$$

Отсюда $a_2=\varkappa a_1^2$, где

$$\varkappa=-\frac{3-T_0^2}{4T_0}\,\frac{\rho_0(\omega-\beta k)^2k}{\rho_0 gkT_0-4\rho\bar{h}kT_0\omega^2-\rho_0(\omega-\beta k)^2(1+T_0^2)+\frac{8}{3}\,\frac{G\bar{h}^3k^5T_0}{(1-\nu)}}$$

Дисперсионное соотношение $\mathcal{L}_{a_1}=0$ из (15) дает

$$-\frac{\rho_0 g}{4}+\frac{\rho_0}{4}\frac{(\omega-\beta k)^2}{kT_0}\left(1-\frac{2T_0^2-1}{2T_0^2}k^2a_1^2-\frac{3-T_0^2}{2T_0}ka_2\right)+\frac{1}{4}\rho\bar{h}\omega^2-$$

$$-\frac{G\bar{h}^3k^4}{24(1-\nu)}-\frac{G\gamma_2\bar{h}^5}{360}\frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^4}k^8a_1^2 \qquad (16)$$

При нулевом среднем значении $\eta=0$, $\varphi_x=0$ имеем $a_1=0$, $\beta=0$ и из (16) получится частота линейной теории

$$\omega_0^2=\frac{g\rho_0+G\bar{h}^3k^4/6(1-\nu)}{\rho\bar{h}+\rho_0/kT_0}$$

Подставляя в (16) $a_2=\varkappa a_1^2$ и полагая $\omega=\omega_0+\left(\frac{\partial\omega}{\partial a_1^2}\right)_0 a_1^2$, получим

$$\rho_0 g-\frac{\rho_0}{kT_0}\left|\omega_0-\beta k+\left(\frac{\partial\omega}{\partial a_1^2}\right)_0 a_1^2\right|^2\left(1-\frac{2T_0^2-1}{2T_0^2}k^2a_1^2-\frac{3-T_0^2}{2T_0}k\varkappa a_1^2\right)-$$

$$-\rho\bar{h}\left|\omega_0+\left(\frac{\partial\omega}{\partial a_1^2}\right)_0 a_1^2\right|^2+\frac{G\bar{h}^3k^4}{6(1-\nu)}+\frac{G\gamma_2\bar{h}^5}{90}\frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^4}k^8a_1^2=0$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial a_1^2}\right)_0=\frac{\frac{\rho_0\omega_0^2}{2T_0}\left(\frac{2T_0^2-1}{2T_0^2}k+\frac{3-T_0^2}{2T_0}\right)+\frac{G\gamma_2\bar{h}^5}{180}\frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^4}k^8+\frac{\rho_0\omega_0\beta}{T_0a_1^2}}{\rho\bar{h}\omega_0+\rho_0\omega_0/kT_0} \qquad (17)$$

Нам остается найти значение β. Для этой цели используем следующие соотношения:

$$\mathscr{L}_b=0,\quad -\rho_0 gb+\rho_0\gamma-\frac{\rho_0\omega_0^2a_1^2}{4\,\mathrm{sh}^2kh_0}=0,\quad -\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{L}_\gamma+\frac{\partial}{\partial x}\mathscr{L}_\beta=0,\quad \frac{\partial\beta}{\partial t}+\frac{\partial\gamma}{\partial x}=0 \qquad (18)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{L}_\omega+\frac{\partial}{\partial x}\mathscr{L}_k=0,\qquad \frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial\omega}{\partial x}=0 \qquad (19)$$

имеем

$$\mathscr{L}_\gamma=(h_0+b)\rho_0,\quad \mathscr{L}_\beta=-\beta h\rho_0-\frac{\rho_0\omega_0}{2T_0}a_1^2,\quad \mathscr{L}_\omega=\left(\frac{\rho_0}{2kT_0}+\frac{\rho\bar{h}}{2}\right)\omega_0a_1^2 \qquad (20)$$

Для волн, движущихся по спокойной воде глубиной h_0, можно предположить, что β и $b=h-h_0$ малы и линеаризовать уравнения (18), (19), после чего, решая все совместно, получим, имея в виду, что $\frac{\partial}{\partial t}=-C_0(k)\frac{\partial}{\partial x}$

$$\beta=-\frac{\frac{g\omega_0}{2T_0}+\frac{\omega_0^2C_0(k)}{4\,\mathrm{sh}^2kh_0}}{gh_0-C_0^2(k)} \qquad (21)$$

где $C_0(k)$ — групповая скорость, которая равна $C_0(k)=\frac{\partial\omega_0}{\partial k}$, то есть

$$C_g(k)=\frac{1}{2}c_0(k)\left(\frac{4Dk^4}{g\rho_0+Dk^4}+\frac{\rho_0+\dfrac{2\rho_0 kh_0}{\operatorname{sh}2kh_0}}{\rho_0+\rho\bar{h}kT_0}\right)$$

где $c_0(k)$ — фазовая скорость

$$c_0(k)=\sqrt{\frac{(g\rho_0+Dk^4)T_0}{k(\rho_0+\rho\bar{h}kT_0)}}$$

D — цилиндрическая жесткость пластины $D=\frac{G\bar{h}^3}{6(1-\nu)}$. Подставляя значение β из (21) в (17), получим

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial a_1^2}\right)_0=$$

$$=\frac{\dfrac{\rho_0\omega_0^2}{2T_0}\left(\dfrac{2T_0^2-1}{2T_0^2}k+\dfrac{3-T_0^2}{2T_0}\varkappa\right)+\dfrac{G_{12}\bar{h}^5}{180}\dfrac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^4}k^8-\dfrac{\dfrac{g\omega_0}{2T_0}+\dfrac{\omega_0^2C_0(k)}{4\operatorname{sh}^2kh_0}}{gh_0-C_0^2(k)}\dfrac{\rho_0\omega_0}{T_0}}{\rho\bar{h}\omega_0+\rho_0\omega_0/kT_0}$$

Полученное соотношение необходимо при определении условий устойчивости волновых пакетов, представляющих решения вида (6), (7) уравнений для медленных изменений амплитуд A_c, a_1, b и фаз нелинейных волн [1]. Дадим вывод уравнений для амплитуд a_1 и волновых чисел k_i квазимонохроматических волн, обобщающих уравнения [1] на неоднородную среду и выведем из них условия устойчивости решений полученных уравнений, причем для рассматриваемой изотропной среды получаются, в частности, условия продольной и поперечной устойчивости [3]. Пусть имеем фазовую функцию $\theta(X,t)$, где $X=(x_1,x_2,x_3)$, тогда частота ω и волновые числа k_i определяются формулами $\omega=-\frac{\partial\theta}{\partial t}$, $k_i=\partial\theta/\partial x_i$. Очевидно тогда равенство

$$\frac{\partial\omega}{\partial x_i}+\frac{\partial k_i}{\partial t}=0 \tag{22}$$

Имеем еще следующее соотношение:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_\omega+\frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{L}_{k_i}=0 \tag{23}$$

Так как $\frac{\partial}{\partial t}=-C_i\frac{\partial}{\partial x}$, то получится $\mathcal{L}_{k_i}=-C_i\mathcal{L}_\omega$, где $C_i=\frac{\partial\omega_0}{\partial k_i}$ — групповая скорость. Из (20)

$$\mathcal{L}_\omega=qa_1^2,\quad \text{где}\quad q=\frac{1}{2}\rho\bar{h}\omega_0+\frac{\rho_0\omega_0}{2kT_0}$$

С учетом последних значений $\mathcal{L}_\omega$ и $\mathcal{L}_{k_i}$ получим из (23)

$$a_1^2\frac{\partial q}{\partial t}+q\frac{\partial a_1^2}{\partial t}+q\frac{\partial\omega_0}{\partial k_i}\frac{\partial a_1^2}{\partial x_i}+a_1^2\frac{\partial\omega_0}{\partial k_i}\frac{\partial q}{\partial x_i}+a_1^2q\frac{\partial^2\omega_0}{\partial k_i\partial x_i}=0$$

После соответствующих выкладок, полагая, что

$$\frac{\partial q}{\partial x_i} = \frac{\partial q}{\partial x_i}\bigg|_{k_j=\mathrm{const}} + \frac{\partial q}{\partial k_j}\frac{\partial k_j}{\partial x_i};\quad \frac{\partial \omega_0}{\partial x_i} = \frac{\partial \omega_0}{\partial x_i}\bigg|_{k_j=\mathrm{const}} + \frac{\partial \omega_0}{\partial k_j}\frac{\partial k_j}{\partial x_i}$$

получим

$$\frac{\partial a_1^2}{\partial t} + \frac{\partial \omega_0}{\partial k_i}\frac{\partial a_1^2}{\partial x_i} + a_1^2\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x_i \partial k_i} + \frac{a_1^2}{q}\left(\frac{\partial \omega_0}{\partial k_i}\frac{\partial q}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega_0}{\partial x_i}\frac{\partial q}{\partial k_i}\right) = 0$$

Для однородной среды $\frac{\partial q}{\partial x_i} = \frac{\partial \omega_0}{\partial x_i} = 0$ и будем иметь

$$\frac{\partial a_1^2}{\partial t} + \frac{\partial \omega_0}{\partial k_i}\frac{\partial a_1^2}{\partial x_i} + a_1^2\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial k_i \partial k_j}\frac{\partial k_i}{\partial x_j} = 0 \qquad (24)$$

Выведем условия устойчивости. Полагая в (22) и (24) $k_i = k_{i_0} + \mu_i$; $a_1^2 = a_0^2 + a'$ и линеаризируя относительно малых значений μ_i, a', а также полагая $a' = A\exp[i(\Omega t - k_i' x_i)]$, $\mu_i = K_i \exp[i(\Omega t - k_i' x_i)]$, получим Ω, которое является вещественным при выполнении соотношения

$$\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial k_i \partial k_j}\left(\frac{\partial \omega}{\partial a_1^2}\right)_0 k_i' k_j' > 0$$

Выберем ось x_1 по нормали к волне и учтем малость k_2, k_3. Полагая $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$, получим условия устойчивости

$$\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial k^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial a_1^2}\right)_0 k_1'^2 + \frac{1}{k}\frac{\partial \omega_0}{\partial k}\left(\frac{\partial \omega}{\partial a_1^2}\right)_0 (k_2'^2 + k_3'^2) > 0$$

Для продольной устойчивости $k_2' = 0$, $k_3' = 0$ и поэтому получим $\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial k^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial a_1^2}\right)_0 > 0$

Для поперечной устойчивости $k_1' = 0$, поэтому $\left(\frac{\partial \omega}{\partial a_1^2}\right)_0 > 0$.

Таблица 1

F	$-4\cdot 10^3$														
E	10^2			$8\cdot 10$			$4\cdot 10$			0,01			0,001		
ψ	0,1			0,12			0,2			10			100		
kh_0	1	2	∞	1	2	∞	1	2	∞	1	2	∞	1	2	∞
$\left(\frac{\partial \omega}{\partial a_1^2}\right)_0 \frac{1}{\omega_0 k^2}$	−0,88	0,14	0,28	−0,5	−0,09	0,34	−0,74	−0,08	−0,002	−39603,94	−39603,936	−39603,9	−3996004	−3996004	−3996004
$\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial k^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial a_1^2}\right)_0 \frac{1}{gk}$	19,62	−5,35	−7,54	22,08	3,92	−3,53	39,88	4,74	0,04	−795[illegible],6	−7679,88	−7696,41	−80059	−79526	−79648

$$\psi = \frac{\rho h k}{\rho_0},\quad E = \frac{g\rho_0}{Dk^4},\quad F = \frac{1}{30}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^3 \frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^3}$$

Численное решение задачи для устойчивости приведено в табл. 1, откуда следует, что с уменьшением глубины и с увеличением параметра Ψ поперечная устойчивость уменьшается и, наоборот, с уменьшением глубины и с увеличением Ψ продольная устойчивость увеличивается, где $\Psi = \bar{\rho} h k/\rho_0$. Следует отметить, что в табл. 1 знаки коэффициентов, характеризующих продольную и поперечную устойчивости, противоположные, причем для малых значений параметра Ψ для бесконечной глубины имеется продольная неустойчивость и поперечная устойчивость, а для больших Ψ имеет место обратное явление. Таким образом, наличие пластины для глубокой жидкости изменяет характер устойчивости.

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԽՈՐՈՒԹՅԱՆ ՀԵՂՈՒԿԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ՎՐԱ ԳՏՆՎՈՂ ՍԱԼՈՒՄ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԾՌՄԱՆ ԱԼԻՔՆԵՐԸ

Ս. Գ. ԱՎԱԳՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում են անսեղմելի կշիռ ունեցող հեղուկը ծածկող սալում կվազիմոնոխրոմատիկ ալիքները։ Նշված համակարգի համար ձևակերպվում է վարիացիոն սկզբունքը։ Ներմուծվում է ըստ փուլի միջինացված լագրանժիանը և նրա համար Ուիզեմի մեթոդով գրվում է ամպլիտուդի և ալիքային թվի վարիացիոն հավասարումները։

Ստացված է ոչ գծային դիսպերսիոն հարաբերակցություն, որը բնութագրում է ալիքների պարուրիչների համար գտնված հավասարումների կայունությունը։

Ցույց է տրված, որ սալի առկայությունը, որևէ դիապազոնում, բերում է երկայնական կայունության տիրույթի մեծացման և փոքրացման՝ լայնական կայունության համար։

NONLINEAR BENDING WAVES IN PLATE ON SURFACE OF FINITE DEPTH FLUID

S. G. AVAGIAN

Summary

The quasimonocromatic waves in plate contacting with ponderable incompressible fluid are considered.

The variational principle for the mentioned system is formulated. The averaged on phase Lagrangian is introduced and by means of the method of Whitham the variational equations for amplitudes and wave numbers are written for it.

The nonlinear dispersion relation characteristing the stability of the revealed equations for envelope waves is obtained. The presence of the plate in some interval causes the increase of the region of longitudinal stability and the decrease of transversal stability.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уизем Дж. Б.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
2. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М.: ИЛ, 1961. 777 с.
3. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
4. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* Некоторые вопросы распространения квазимонохроматических нелинейных волн в пластинах и оболочках. В кн.: Труды XII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, т. 1. Ереван: Изд-во Ереванского университета, 1980, с. 106—112.
5. *Багдоев А. Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1961. 275 с.
6. *Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 374 с.
7. *Григолюк Э. И.* и *Горшков А. Г.* Взаимодействие слабых ударных волн с упругими конструкциями. М.: Изд-во МГУ. Ин-т механики. Научн. труды № 13, 1971. 180 с.
8. *Григолюк Э. И., Горшков А. Г.* Динамика твердых тел и тонких оболочек вращения, взаимодействующих с жидкостью. М.: Изд-во МГУ, 1975. 179 с.
9. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М.: ВИНИТИ, 1973. 272 с.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила в редакцию
7.V. 1983