ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVIII, № 6, 1985 Механика

УДК 539.3

О МОДЕЛИРОВАНИИ ОДНОГО КЛАССА КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ВАРДАНЯН Г. С., ФРИШТЕР Л. Ю.

В различных областях техники широкое распространение находят конструкции, составленные из упругих элементов с различными физико-механическими характеристиками. Такие конструкции называются кусочно-однородными (составными) конструкциями.

При моделировании кусочно-однородных задач экспериментальным методом механики деформируемого твердого тела—методом фотоупругости, возникают трудности, связанные с необходимостью подбора оптически чувствительных материалов с различными модулями упругости, и методического характера. Моделирование составных конструкций при заданных внешних усилиях рассмотрено в работе [1].

Рассмотрим кусочно-однородное пространственное одно- или многосвязное тело Ω, состоящее из частей Ω_1 и Ω_2, соединенных между собой по поверхности Г. Части Ω_1 и Ω_2 различаются только значением модуля упругости $(E_1<E_2)$. Коэффициенты Пуассона и теплового расширения для этих частей примем одинаковыми.*

На наружной поверхности S могут быть заданы: на части S_σ—напряжения f_i и на части S_u—перемещения φ_i. Кроме того, в теле могут быть заданы массовые силы F_i и температурное поле T.

Напряжения σ_{ij} такой кусочно-однородной задачи удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} + F_i = 0 \tag{1}$$

Деформации ε_{ij}, связанные с перемещениями u_i соотношениями

$$2\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \tag{2}$$

удовлетворяют уравнениям неразрывности

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial k \partial l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial i \partial j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial l \partial k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial j \partial l} = 0 \tag{3}$$

При этом на поверхности S выполняются граничные условия

---

* Коэффициенты теплового расширения частей также могут быть различными. Это не вызывает принципиальных трудностей.

$$\sum_j \sigma_{ij} n_j |_{S_\sigma} = f_i; \quad u_i|_{S_u} = \varphi_i \tag{4}$$

а на поверхности раздела Г—условия полного контакта

$$\sigma_{zi1}|_\Gamma = \sigma_{zi2}|_\Gamma; \quad u_{i1}|_\Gamma = u_{i2}|_\Gamma \tag{5}$$

Деформации и напряжения связаны следующими соотношениями:

$$\varepsilon_{ij1} = \frac{1}{E_1}[(1+\nu)\sigma_{ij1} - \delta_{ij}\nu S_1] + \varepsilon_{ij}^T \tag{6}$$

$$\varepsilon_{ij2} = \frac{1}{E_2}[(1+\nu)\sigma_{ij2} - \delta_{ij}\nu S_2] + \varepsilon_{ij}^T \tag{7}$$

Здесь

$$\varepsilon_{ij}^T = \delta_{ij}\alpha T \tag{8}$$

Остальные обозначения в соотношениях (1)—(7) общеприняты и не требуют объяснений.

Ниже рассматриваемая кусочно-однородная задача сводится к решению ряда однотипных однородных задач с дисторсиями, достаточно просто реализуемых на моделях методом „замораживания".

Введем вспомогательные задачи для отдельных частей Ω_1 и Ω_2, обусловленные только действием температурного поля. Решения этих задач обозначим через (σ'_{ij} ε'_{ij} u'_i).

Для дальнейшего изложения введем сокращенную запись соотношений (1)—(7) в виде

$$\{\sigma F;\ \varepsilon u;\ S_\sigma f;\ S_u\varphi;\ \Gamma\sigma;\ \Gamma u;\ \varepsilon E_1\varepsilon^T;\ \varepsilon E_2\varepsilon^T\} \tag{9}$$

Рассмотрим также кусочно-однородную задачу для тела Ω

$$\{\sigma^{(H)}F;\ \varepsilon^{(H)}u^{(H)};\ S_\sigma f;\ S_u\varphi;\ \Gamma\sigma^{(H)};\ \Gamma u^{(H)};\ \varepsilon^{(H)}E_1\varepsilon';\ \varepsilon^{(H)}E_2\varepsilon'\} \tag{10}$$

отличающуюся от задачи (9) только тем, что в частях Ω_1 и Ω_2 вместо температуры заданы дисторсии соответственно ε'_{ij1} и ε'_{ij2}.

Очевидно, что

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \sigma_{ij}^{(H)}; \quad u_i = u_i^{(H)}; \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(H)} \tag{11}$$

При этом, если температурное поле в отдельных частях Ω_1 и Ω_2 тела со свободными границами не вызывает напряжения ($\sigma'_{ij}=0$), то решения задач (9) и (10) совпадают.

Далее рассмотрим соответствующую однородную задачу

$$\{\sigma^{(0)}F;\ \varepsilon^{(0)}u^{(0)};\ S_\sigma f;\ S_u\varphi;\ 0\sigma^{(0)};\ 0u^{(0)};\ \varepsilon^{(0)}E_1\varepsilon';\ \varepsilon^{(0)}E_1\varepsilon'\} \tag{12}$$

для тела Ω при тех же воздействиях, что и в задаче (10) и неоднородную задачу несовместности

$$\{\sigma^{(H,1)}0;\ \varepsilon^{(H,1)}u^{(H,1)};\ S_\sigma 0;\ S_u 0;\ \Gamma\sigma^{(H,1)};\ \Gamma u^{(H,1)};\ \varepsilon^{(H,1)}E_1 0;\ \varepsilon^{(H,1)}E_2 K\hat{\varepsilon}^{(0)}\} \tag{13}$$

Здесь

$$K = 1 - \frac{E_1}{E_2}; \quad \hat{\varepsilon}_{ij}^{(0)} = \varepsilon'_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(0)} \tag{14}$$

Согласно принципу сложения решения задач (10), (12) и (13) связаны следующим равенством:

$$(\sigma_{ij}^{(H)},\ u_i^{(H)},\ \varepsilon_{ij}^{(H)}) = (\sigma_{ij}^{(0)},\ u_i^{(0)},\ \varepsilon_{ij}^{(0)}) + (\sigma_{ij}^{(H,1)},\ u_i^{(H,1)},\ \varepsilon_{ij}^{(H,1)}) \tag{15}$$

Теперь рассмотрим однородную задачу несовместности

$$\{\sigma^{(1)}0;\ \varepsilon^{(1)}u^{(1)};\ S_\sigma 0;\ S_u 0;\ 0\sigma^{(1)};\ 0u^{(1)};\ \varepsilon^{(1)}E_1 0;\ \varepsilon^{(1)}E_2 K\widehat{\varepsilon^{(0)}}\} \tag{16}$$

и вторую неоднородную задачу несовместности

$$\{\sigma^{(H,2)}0;\ \varepsilon^{(H,2)}u^{(H,2)};\ S_\sigma 0;\ S_u 0;\ \Gamma\sigma^{(H,2)},\ \Gamma u^{(H,2)};\ \varepsilon^{(H,2)}E_1 0;\ \varepsilon^{(H,2)}E_2 K\widehat{\varepsilon^{(1)}}\} \tag{17}$$

где

$$\hat{\varepsilon}_{ij}^{(1)} = K\varepsilon'_{ij} - K\varepsilon_{ij}^{(0)} - \varepsilon_{ij}^{(1)} \tag{18}$$

По принципу сложения решения задач (13), (16) и (17) тоже связаны равенством

$$(\sigma_{ij}^{(H,1)},\ u_i^{(H,1)},\ \varepsilon_{ij}^{(H,1)}) = (\sigma_{ij}^{(1)},\ u_i^{(1)},\ \varepsilon_{ij}^{(1)}) + (\sigma_{ij}^{(H,2)},\ u_i^{(H,2)},\ \varepsilon_{ij}^{(H,2)}) \tag{19}$$

Используя принцип математической индукции, получим

$$(\sigma_{ij}^{(H,n)},\ u_i^{(H,n)},\ \varepsilon_{ij}^{(H,n)}) = (\sigma_{ij}^{(n)},\ u_i^{(n)},\ \varepsilon_{ij}^{(n)}) + (\sigma_{ij}^{(H,n+1)},\ u_i^{(H,n+1)},\ \varepsilon_{ij}^{(H,n+1)}) \tag{20}$$

где $(\sigma_{ij}^{(n)},\ u_i^{(n)},\ \varepsilon_{ij}^{(n)})$ – решение „n"-ой однородной задачи несовместности

$$\{\sigma^{(n)}0;\ \varepsilon^{(n)}u^{(n)};\ S_\sigma 0;\ S_u 0;\ 0\sigma^{(n)};\ 0u^{(n)};\ \varepsilon^{(n)}E_1 0;\ \varepsilon^{(n)}E_1 K\widehat{\varepsilon^{(n-1)}}\} \tag{21}$$

Здесь

$$\hat{\varepsilon}_{ij}^{(n-1)} = K^{n-1}\varepsilon'_{ij} - K^{n-1}\varepsilon_{ij}^{(0)} - K^{n-2}\varepsilon_{ij}^{(1)} - \ldots - K\varepsilon_{ij}^{(n-2)} - \varepsilon_{ij}^{(n-1)} \tag{22}$$

Как видно из (21), напряженно-деформированное состояние „n"-ой однородной задачи несовместности обусловлено дисторсиями в области Ω_2, равными деформациям (22), уменьшенным в „K" раз, вызванными напряжениями предыдущей задачи в той же области.

На основании (15), (19) и рекуррентного соотношения (20) получим

$$(\sigma_{ij}^{(H)},\ u_i^{(H)},\ \varepsilon_{ij}^{(H)}) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma_{ij}^{(n)},\ u_i^{(n)},\ \varepsilon_{ij}^{(n)}) \tag{23}$$

Из (21) видно, что решение „n"-ой однородной задачи несовместности можно представить в виде

$$(\sigma_{ij}^{(n)},\ u_i^{(n)},\ \varepsilon_{ij}^{(n)}) = K^n(\tilde{\sigma}_{ij}^{(n)},\ \tilde{u}_i^{(n)},\ \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(n)}) \tag{24}$$

где $(\tilde{\sigma}_{ij}^{(n)},\ \tilde{u}_i^{(n)},\ \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(n)})$ – решение „n"-ой приведенной задачи несовместности

$$\{\tilde{\sigma}^{(n)}0;\ \tilde{\varepsilon}^{(n)}\tilde{u}^{(n)};\ S_\sigma 0;\ S_u 0;\ 0\tilde{\sigma}^{(n)};\ 0\tilde{u}^{(n)};\ \tilde{\varepsilon}^{(n)}E_1 0;\ \tilde{\varepsilon}^{(n)}E_1\check{\varepsilon}^{(n-1)}\} \tag{25}$$

независящее от „K".

Здесь

$$\check{\varepsilon}_{ij}^{(n-1)} = \varepsilon'_{ij} - \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(0)} - \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(1)} - \ldots - \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(n-2)} - \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(n-1)} \tag{26}$$

С учетом (24) соотношение (23) можно записать в виде

$$(\sigma_{ij}^{(H)},\ u_i^{(H)},\ \varepsilon_{ij}^{(H)}) = \sum_{n=0}^{\infty} K^n(\tilde{\sigma}_{ij}^{(n)},\ \tilde{u}_i^{(n)},\ \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(n)}) \tag{27а}$$

или

$$\xi^{(H)} = \sum_{n=0}^{\infty} K^n \tilde{\xi}^{(n)} \tag{27б}$$

где через ξ обозначена любая компонента напряжений, перемещений или деформаций.

Используя очевидное неравенство

$$|\tilde{\xi}^{(n)}| \leqslant |\tilde{\xi}^{(1)}|_{\max} \tag{28}$$

где $|\tilde{\xi}^{(1)}|_{\max}$—наибольшее значение напряжений, перемещений или деформаций первой однородной задачи несовместности, получим, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} K^n \tilde{\xi}^{(n)}$ мажорируется сходящимся геометрическим рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} K^n$ $(0<K<1)$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} K^n \tilde{\xi}^{(n)}$ сходится равномерно.

Вследствие сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} K^n \tilde{\xi}^{(n)}$ его сумму можно оценить при помощи рекуррентных соотношений, выполняющихся с заданной точностью, для функциональной последовательности $\{\tilde{\xi}^{(n)}\}$.

В ряде случаев в качестве рекуррентного соотношения можно задать следующую линейную комбинацию:

$$\frac{\tilde{\xi}^{(n+1)} - \tilde{\xi}^{(n+2)}}{\tilde{\xi}^{(n)}} = c \quad (c<1) \tag{29}$$

В этих случаях ряд (27) суммируется и получается следующий окончательный результат:

$$\xi^{(H)} = \frac{1-K}{1-K+K^2c}\tilde{\xi}^{(0)} + \frac{K}{1-K+K^2c}\tilde{\xi}^{(1)} \tag{30}$$

Для иллюстрации предложенной методики решения кусочно-однородных задач рассмотрим следующий пример.

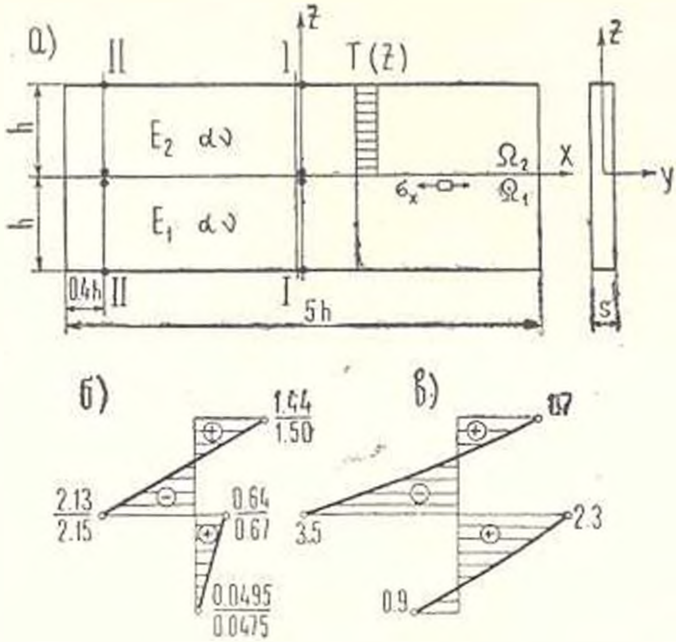
Полоса шириною $2h$ при отсутствии объемных и поверхностных сил находится под действием температурного поля

$$T(z) = \begin{cases} 0, & -h \leqslant z \leqslant 0 \\ T_0, & 0 < z \leqslant h \end{cases} \tag{31}$$

Область Ω_1 $(-h \leqslant z \leqslant 0)$ имеет модуль упругости E_1, а область Ω_2 $(0 < z \leqslant h)$ имеет модуль упругости E_2.

Напряжения исходной кусочно-однородной задачи согласно [2] определяются выражениями:

в области Ω_1

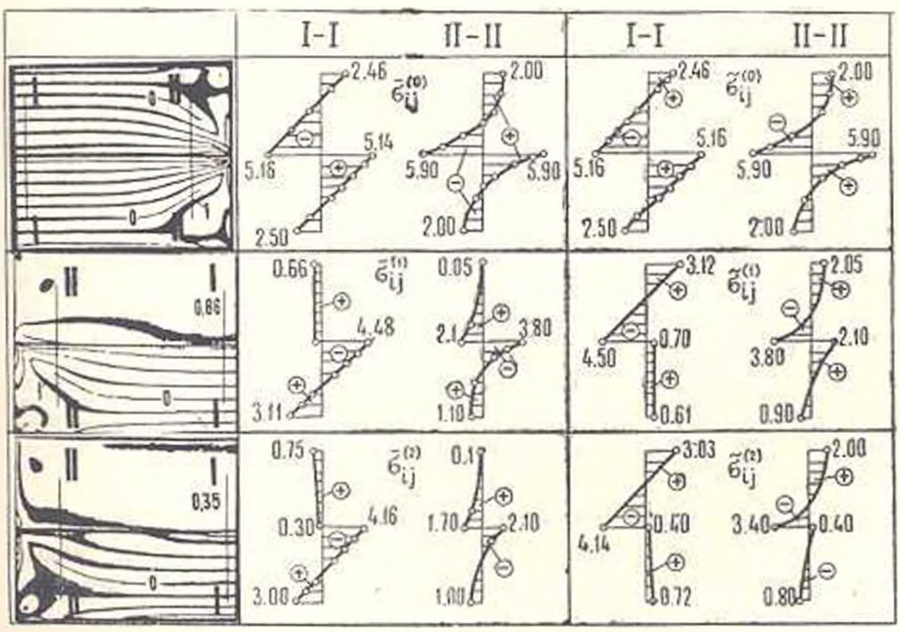


Фиг. 1. Пример моделирования термоупругих напряжений в биметаллической пластине:

а) схема кусочно-однородной задачи;

б) сравнение теоретических (числитель) и экспериментальных (знаменатель) значений напряжений σ_{xx} в долях $\alpha T_0 E_1$ по среднему сечению I—I;

в) эпюры экспериментальных значений напряжений $\sigma_1 - \sigma_2$ по сечению II—II.



Фиг. 2. Картины полос и эпюры напряжений в моделях однородных задач.

$$\sigma_{xx}=\frac{\alpha T_0E_1E_2}{E_1^2+E_2^2+14E_1E_2}\left[E_2+\left(7+\frac{12z}{h}\right)E_1\right] \tag{32а}$$

в области Ω_2

$$\sigma_{xx}=\frac{\alpha T_0E_1E_2}{E_1^2+E_2^2+14E_1E_2}\left[\left(\frac{12z}{h}-7\right)E_2-E_1\right] \tag{32б}$$

Напряжения вспомогательных задач для отдельных частей Ω_1 и Ω_2 равны нулю ($\sigma_{ij}=0$), а напряжения первых трех однородных задач, входящих в (27), определяются выражениями: в области Ω_1

$$\tilde{\sigma}^{(0)}_{xx}=\alpha T_0E_1\left(\frac{1}{2}+\frac{3z}{4h}\right);\quad \tilde{\sigma}^{(1)}_{xx}=\frac{1}{16}\alpha T_0E_1;\quad \tilde{\sigma}^{(2)}_{xx}=\alpha T_0E_1\left(\frac{1}{32}-\frac{3z}{64h}\right) \tag{33а}$$

в области Ω_2

$$\tilde{\sigma}^{(0)}_{xx}=\alpha T_0E_1\left(-\frac{1}{2}+\frac{3z}{4h}\right);\quad \tilde{\sigma}^{(1)}_{xx}=\alpha T_0E_1\left(-\frac{7}{16}+\frac{3z}{4h}\right)$$

$$\tilde{\sigma}^{(2)}_{xx}=\alpha T_0E_1\left(-\frac{13}{32}+\frac{45z}{64h}\right) \tag{33б}$$

Нетрудно проверить, что напряжения рассматриваемой кусочно-однородной задачи (32) связаны с напряжениями однородных задач (33) с помощью зависимости (30), то есть

$$\sigma_{xx}=\sigma^{(H)}_{xx}=\frac{1-K}{1-K+K^2c}\tilde{\sigma}^{(0)}_{xx}+\frac{K}{1-K+K^2c}\tilde{\sigma}^{(1)}_{xx} \tag{34}$$

где

$$K=1-\frac{E_2}{E_1};\quad c=\frac{\tilde{\sigma}^{(1)}_{xx}-\tilde{\sigma}^{(2)}_{xx}}{\tilde{\sigma}^{(0)}_{xx}}=\frac{1}{16} \tag{35}$$

Экспериментальную реализацию предлагаемой методики иллюстрируем на примере моделирования термоупругих напряжений в биметаллической пластине (фиг. 1) при действии температурного поля вида (31).

Решаются первые три однородные задачи несовместности следующим образом:

1. Однородная модель из эпоксидного материала с модулем упругости $E_1=200$ кг/см² и оптической постоянной $\sigma^{1,0}=0{,}341$ кг/см в высокоэластичном состоянии с заданными размерами ($h=2$ см, $s=0{,}59$ см) склеивалась из двух элементов. Элемент области Ω_1 вырезался из пластины с «замороженными» деформациями при растягивающем напряжении $\sigma=1{,}97$ кг/см² в продольном направлении. Элемент области Ω_2 не деформировался. После склейки элементов и «размораживания» [3] в модели возникли напряжения $\tilde{\sigma}^{(0)}_{xx}$.

2. Из предыдущей модели с «замороженными» деформациями $\tilde{\varepsilon}^{(0)}_{ij}$ вырезалась область Ω_2, которая склеивалась с областью Ω_1, находящейся в естественном недеформированном состоянии. В результате «размораживания» в модели возникли напряжения $\tilde{\sigma}^{(1)}_{xx}$.

3 Третья задача решалась аналогично второй—склеиванием области Ω_2 с «замороженными» деформациями $\bar{\varepsilon}_{ij}^{(1)}$ с недеформированной областью Ω_1 и последующим «размораживанием» модели.

На фиг 2 приведены картины полос для исследованных трех однородных задач и эпюры порядков полос, соответствующие напряжениям $\bar{\sigma}_{xx}^{(0)}$, $\bar{\sigma}_{xx}^{(1)}$, $\bar{\sigma}_{xx}^{(2)}$ по среднему сечению I—I и напряжениям $\bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}_2$ по сечению II—II на расстоянии $0{,}4h$ от торца пластины.

Заметим, что напряжения $\bar{\sigma}_{xx}^{(1)}$ и $\bar{\sigma}_{xx}^{(2)}$, определяемые экспериментально, отличаются от напряжений $\sigma_{xx}^{(1)}$ и $\sigma_{xx}^{(2)}$, входящих в соотношения (34) и (35). При определении $\bar{\sigma}_{xx}^{(1)}$ и $\bar{\sigma}_{xx}^{(2)}$ в моделях создавались дисторсии, равные соответственно $-\varepsilon_{xx}^{(0)}$ и $-\varepsilon_{xx}^{(1)}$, в то время как напряжения $\sigma_{xx}^{(1)}$ и $\sigma_{xx}^{(2)}$ обусловлены дисторсиями соответственно равными $\alpha T_0-\varepsilon_{xx}^{(0)}$ и $\alpha T_0-\varepsilon_{xx}^{(0)}-\varepsilon_{xx}^{(1)}$. С учетом этого переход от $\bar{\sigma}_{xx}^{(1)}$ и $\bar{\sigma}_{xx}^{(2)}$ к $\sigma_{xx}^{(1)}$ и $\sigma_{xx}^{(2)}$ соответственно осуществлялся по принципу сложения. Эпюры этих напряжений приведены также на фиг. 2.

Из эпюр напряжений на фиг 2 видно, что значение c, вычисленное по формуле (35), колеблется от 0,03 до 0,07. Принимая $c=0{,}05$ и $K=5/6$ по формуле (34) определены экспериментальные значения напряжений кусочно-однородной задачи. Эти значения показаны на эпюрах фиг. 1 б (знаменатели) и фиг. 1 в. На фиг 1 б в числителе показаны теоретические значения напряжений, вычисленные по формулам (32). Максимальное расхождение теоретических и экспериментальных значений не превышает 6%.

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԿՏՈՐ ԱՌ ԿՏՈՐ ՀԱՄԱՍԵՌ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ՄՈԴԵԼԱՎՈՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Գ. Ս. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ, Լ. ՅՈՒ. ՖՐԻՇՏԵՐ

Ամփոփում

Շարադրվում է բևեռա-օպտիկան մեթոդով առաձգականության տեսության կտոր առ կտոր համասեռ խնդիրների մոդելավորման մեթոդը։

Կտոր առ կտոր համասեռ խնդիրը բերվում է մի շարք միատիպ համասեռ խնդիրների լուծմանը։

Դիտարկվում են օրինակներ։

ON MODELLING OF ONE GROUP OF PIECEWISE HOMOGENEOUS PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY

G. S. VARDANIAN, L. JUR. FRISHTER

Summary

The techniques of modelling of piecewise homogeneous problems of the theory of elasticity by means of photoelasticity is presented in the paper. A piecewise homogeneous problem is redused to a number of homogeneous similar problems with distortions simulated on the models by the "freezing" method. Some examples, proving theoretically and experimentally the techniques in question, are suggested.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Варданян Г. С., Гетрик В. И.* О моделировании кусочно-однородных задач теории упругости поляризационно-оптическим методом. Материалы VIII Всесоюзной конференции по методу фотоупругости. Т. 1. Таллин: 1979, с. 33—37.

2. *Александровский С. В.* Расчет бетонных и железобетонных конструкций на температурные и влажностные воздействия (с учетом ползучести). М.: Стройиздат, 1966, с. 291—297.

3. *Варданян Г. С., Пригоровский Н. И.* Моделирование термоупругих напряжений в поляризационно-оптическом методе. Изд. АН СССР, Механика и машиностроение, 1962, № 4, с. 146—149.

Московский инженерно-строительный
институт им. В. В. Куйбышева

Поступила в редакцию
1.IV.1983