

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ СФЕРИЧЕСКОЙ
 ОБОЛОЧКИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ КРУГОВЫХ ТОКОВ

БАГДАСАРЯՆ Գ. Ե., ՄԿՐՏՉՅԱՆ Ս. Ա.

1. Пусть изотропная замкнутая сферическая оболочка постоянной толщины $2h$ и радиуса срединной поверхности R находится в стационарном неоднородном магнитном поле \vec{H}_0 . Считается, что оболочка изготовлена из упругого изотропного материала и покрыта тонким слоем сверхпроводящего сплава. Упругие свойства материала оболочки характеризуются модулем упругости E , коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ . Электромагнитные свойства среды, окружающей оболочку, эквивалентны свойствам вакуума.

Ортогональная система координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ выбирается так, что срединная поверхность оболочки отнесена к сферическим координатам α_1, α_2 (α_1 — полярный угол, α_2 — азимутальный), а α_3 направлена по нормали к срединной поверхности.

В отношении тонкой оболочки считается справедливым гипотеза недеформируемых нормалей.

Известно, что при помещении сверхпроводящего тела в магнитное поле в его тонком поверхностном слое появляются экранирующие токи, препятствующие проникновению магнитного поля внутрь тела. Выталкивание магнитного поля приводит к изменению напряженности магнитного поля в области вне тела. Это изменение является результатом наложения на начальное поле \vec{H}_0 магнитного поля \vec{H}^0 , создаваемого экранирующими токами. Поэтому невозмущенное магнитное поле $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}^0$ определяется из решения следующей задачи магнитоэластики во внешней области [1]:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0, \operatorname{div} \vec{H} = 0 \tag{1.1}$$

$$n_0(\vec{H}_0 + \vec{H}^0) = 0 \text{ при } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in S \tag{1.2}$$

$$\vec{H}^0 \rightarrow 0 \text{ при } |r| \rightarrow \infty \tag{1.3}$$

где n_0 — единичный вектор внешней нормали к недеформированной поверхности S тела, r — радиус-вектор рассматриваемой точки.

Вследствие того, что магнитное поле не проникает в область,

занимаемую оболочкой, на поверхности оболочки компоненты тензора напряжений Максвелла претерпевают разрыв. Этим разрывом обусловлено появление магнитного давления \vec{P}_0 , определяемого формулой

$$\vec{P}_0 = n_0 \cdot \vec{T}^0 \quad (1.4)$$

где \vec{T}^0 — тензор напряжений Максвелла

$$T_{ik}^0 = \frac{1}{4\pi} \left(H_i H_k - \frac{\delta_{ik}}{2} H^2 \right) \quad (1.5)$$

δ_{ik} — символ Кронекера.

В силу (1.2) из (1.4) и (1.5) для поверхностной нагрузки получается выражение [1]

$$\vec{P}_0 = - \frac{H^2}{8\pi} n_0 \quad (1.6)$$

Под действием нагрузки \vec{P}_0 в оболочке устанавливается начальное невозмущенное состояние, характеризующееся вектором перемещения \vec{u}_0 и тензором упругих напряжений $\hat{\sigma}_0$. Исходное состояние оболочки, как обычно, определяется из линейных уравнений теории упругости при поверхностных условиях, написанных без учета деформации поверхности, ограничивающей оболочку. Тогда характеристики невозмущенного состояния будут определяться из следующих уравнений равновесия и граничных условий на поверхности оболочки:

$$\text{div } \hat{\sigma}_0 = 0 \quad (1.7)$$

$$n_0 \cdot \hat{\sigma}_0 = \begin{cases} \vec{P}_0 & \text{при } x_3 = h \\ 0 & \text{при } x_3 = -h \end{cases} \quad (1.8)$$

Характеристики возмущенного состояния ($\vec{u}_0 + \vec{u}$, $\hat{\sigma}_0 + \hat{\sigma}$, $\vec{P}_0 + \vec{p}$, $H + \tilde{h}$) должны удовлетворять нелинейным уравнениям и краевым условиям на деформированной поверхности оболочки. Принимая возмущения малыми, эти уравнения и граничные условия аналогично работам [2—4] линеаризуются. В результате получают следующие линейные уравнения возмущенного состояния [5]:

в области, занимаемой оболочкой

$$\text{div} [\hat{\sigma} + \hat{\sigma}_0(\nabla \vec{u})^*] = 0 \quad (1.9)$$

в области ($x_3 > h$) вне тела оболочки

$$\text{rot } \vec{h} = 0, \quad \text{div } \vec{h} = 0 \quad (1.10)$$

Решения уравнений (1.9) и (1.10) связаны следующими линеаризованными условиями на поверхностях $x_3 = \pm h$ оболочки:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n}_0 = \begin{cases} \rho & \text{при } z_3 = h \\ 0 & \text{при } z_3 = -h \end{cases} \quad (1.11)$$

$$\vec{n}_0 \cdot [\vec{h} + \vec{H}(\nabla \vec{u})^* + \vec{u}(\nabla \vec{H})] = 0 \quad (1.12)$$

Здесь

$$\vec{\sigma} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{2\nu}{1-2\nu} (\operatorname{div} \vec{u}) \vec{E} + \Delta \vec{u} + (\nabla \vec{u})^* \right] \quad (1.13)$$

$$\vec{\rho} = \vec{n}_0 \vec{T}, \quad T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[H_k h_l + h_k H_l - \frac{\lambda_{33}}{2} (\vec{h} \cdot \vec{H} + \vec{H} \vec{h}) \right] \quad (1.14)$$

где \vec{E} —единичный тензор, ∇ —оператор Гамильтона, $(\nabla \vec{u})^*$ —транспонированный тензор $\nabla \vec{u}$, \vec{T} —тензор напряжений Максвелла возмущенного состояния.

Отметим, что граничное условие (1.12) является следствием условия непроникновения магнитного поля в толщу оболочки.

2. Пусть для рассматриваемой оболочки справедливы гипотеза Кирхгофа-Лява и допущение Кармана относительно углов поворота $2\vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{u}$, то есть принимается, что справедливы следующие приближенные соотношения:

$$u_1 = \left(1 + \frac{z_3}{R}\right) u - \frac{z_3}{A_1} \frac{\partial w}{\partial z_1}, \quad u_2 = \left(1 + \frac{z_3}{R}\right) v - \frac{z_3}{A_2} \frac{\partial w}{\partial z_2}, \quad u_3 = w, \\ \omega_1 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial z_2}, \quad \omega_2 = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial z_1}, \quad \omega_3 = 0 \quad (2.1)$$

где $u(x_1, z_2)$, $v(x_1, z_2)$, $w(x_1, z_2)$ —искомые тангенциальные и нормальное перемещения точек срединной поверхности оболочки, u_1, u_2, u_3 —перемещения произвольной точки оболочки, $A_1 = R$, $A_2 = R \sin \alpha_1$ —коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности оболочки.

В силу (2.1) поверхностное условие (1.12) принимает вид

$$h_3^+ = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} (A_2 H_1^+; w) + \frac{\partial}{\partial z_2} (A_1 H_2^+; w) \right] \quad (2.2)$$

где индексом «+» здесь и в дальнейшем отмечены значения соответствующих величин на поверхности оболочки $z_3 = h$.

Подставляя (1.13) и (2.1) в (1.9) и осредняя полученные при этом уравнения по толщине оболочки, с учетом поверхностных условий (1.11) и (2.2) получим следующую систему дифференциальных уравнений устойчивости оболочки:

$$\frac{1}{A_1} \left[\frac{\partial \theta}{\partial z_1} - \frac{h^2}{3R^3} \frac{\partial}{\partial z_1} (\Delta + 2) w \right] + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{u}{R} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial z_1} \right) + \\ + \frac{1-\nu^2}{8\pi E h} \frac{H_1^+}{A_1 A_1} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} (A_2 H_1^+; w) + \frac{\partial}{\partial z_2} (A_1 H_2^+; w) \right] = 0$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_1} \left[\frac{\partial \theta}{\partial z_2} - \frac{h^2}{3R^3} \frac{\partial}{\partial z_1} (\Delta + 2)w \right] + \frac{1-\nu}{R} \left(\frac{\nu}{R} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial z_2} \right) + \\
& + \frac{1-\nu^2}{8\pi E h} \frac{H_2^0}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} (A_2 H_1^0 w) + \frac{\partial}{\partial z_2} (A_1 H_2^0 w) \right] = 0 \\
& \left(\frac{h^2}{3R^3} \Delta - \frac{1-\nu}{R} \right) w - \frac{h^2}{3R^3} (\Delta + 1 - \nu) (\Delta + 2) w + \\
& + \frac{1-\nu^2}{2Eh} \left[\frac{T_1^0}{A_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} + \frac{T_2^0}{A_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial^2 w}{\partial z_2^2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial z_1} \frac{\partial w}{\partial z_1} \right) \right] + \\
& + \frac{2S^0}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z_1 \partial z_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial z_2} \frac{\partial w}{\partial z_1} \right) - \frac{1}{4\pi} (H_1^0 h_1^0 + H_2^0 h_2^0) = 0
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} (A_2 v) + \frac{\partial}{\partial z_2} (A_1 v) \right] + \frac{2w}{R} \\
\Delta &= \frac{R^2}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \right) + \frac{\partial}{\partial z_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \right]
\end{aligned}$$

T_1^0, T_2^0, S^0 — усилия, характеризующие начальное невозмущенное состояние оболочки, которые определяем, решая задачу (1.7) — (1.8).

Рассматривая систему уравнений (2.3), замечаем, что она не замкнута. В нее входят неизвестные граничные значения тангенциальных составляющих индуцированного магнитного поля h_1^0 и h_2^0 на поверхности оболочки $z_2 = h$. Их определяем, решая уравнения (1.10) при условии (2.2) и условии затухания возмущений на бесконечности. Эту задачу введем потенциалом функции $\Phi(z_1, z_2)$ посредством

$$\vec{h} = \text{grad } \Phi \tag{2.4}$$

приводим к решению следующей внешней задаче Неймана в области $z_2 > h$ для функции Φ :

$$\Delta_1 \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} \Big|_{z_2=h} = h_2^0(z_1, z_2) \tag{2.5}$$

Здесь h_2^0 определяется формулой (2.2), а Δ_1 — трехмерный оператор Лапласа в сферической системе координат.

Решение задачи Неймана (2.5) определяется формулой Бьеркнеса [6]

$$\Phi = -\frac{R+h}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{2}{r_1} - \ln \frac{1+r_1-\gamma_1 \cos \theta_0}{\gamma_1(1-\cos \theta_0)} \right] h_2^0(\xi, \eta) \sin \xi \, d\xi \, d\eta \tag{2.6}$$

где

$$\begin{aligned}
r_1^2 &= 1 + \gamma_1^2 - 2\gamma_1 \cos \theta_0, \quad \gamma_1 = \frac{R+z_1}{R+z_2} \\
\cos \theta_0 &= \cos \xi \cos z_1 + \sin \xi \sin z_1 \cos(\eta - z_2)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Из (2.4), в силу (2.6), найдем следующие выражения для компонент индуцированного магнитного поля на поверхности оболочки

$$h_1^i = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial F}{\partial z_1}, \quad h_2^i = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial F}{\partial z_2} \quad (2.8)$$

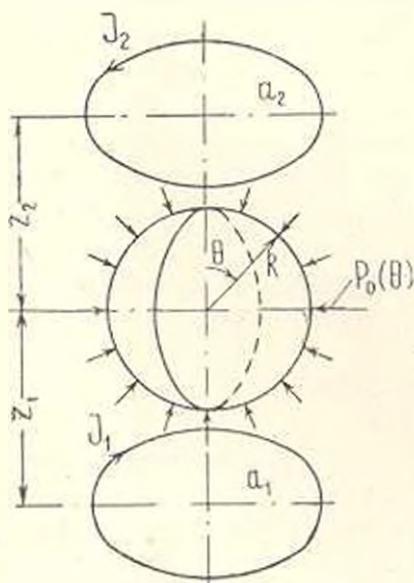
где

$$F = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{2}{r_0} - \ln \left(1 + \frac{2}{r_0} \right) \right] h^i(\xi, \gamma) \sin \xi \, d\xi \, d\gamma, \quad r_0^2 = 2(1 - \cos \theta_0) \quad (2.9)$$

Подставляя (2.8) в систему (2.3) и учитывая (2.2) и (2.9), получим замкнутую двумерную систему разрешающих интегро-дифференциальных уравнений устойчивости относительно искомых функций u, v, w . Ее решения должны удовлетворять условиям непрерывности и однозначности на сфере.

3. На основе полученной системы рассмотрим задачу устойчивости сверхпроводящей сферической оболочки в неоднородном магнитном поле H , создаваемом двумя параллельными кольцевыми постоянными токами (фиг. 1). Такая система токов может фиксировать оболочку в пространстве бесконтактно [7].

Невозмущенное магнитное поле системы сверхпроводящая оболочка-виток найдется методом изображений [1,8]. В итоге на поверхности сферы $z_j = h$ для компонент результирующего невозмущенного магнитного поля получаются выражения



Фиг. 1

$$\begin{aligned} H_2^i &= 0, \quad H_1^i = 0 \\ H_1^e &= \frac{4}{Rc} \sum_{i=1}^2 \frac{J_i a_i p_i^2 (a_i^2 + z_i^2 - R^2)}{(4R a_i \sin z_i)^{3/2}} \times \\ &\times \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - 2\sin^2 x) dx}{(1 - p_i^2 \sin^2 x)^{3/2}} \quad (3.1) \end{aligned}$$

где

$$p_i^2 = \frac{4R a_i \sin a_i}{a_i^2 + z_i^2 + R^2 - 2R(z_i \cos z_i - a_i \sin z_i)} \quad (c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек})$$

Для простоты примем $p_i^2 \ll 1$, что равносильно условиям $z_i^2 + a_i^2 \gg R^2$. Тогда из (3.1) найдем

$$H_1^i = -\frac{3\pi}{c} \left[\sum_{i=1}^2 \frac{J_i a_i}{(a_i^2 + z_i^2)^{3/2}} + \left(\sum_{i=1}^2 \frac{5R J_i z_i a_i^2}{(a_i^2 + z_i^2)^{3/2}} \right) \cos \theta \right] \sin \theta \quad (3.2)$$

С такой точностью неравномерно распределенная поверхностная

сила, действующая на оболочку в невозмущенном состоянии, определяется формулой

$$P_0(\theta) = -\frac{9\pi}{8c^2} \left[\sum_{i=1}^2 \frac{J_i a_i^2}{(a_i^2 + z_i^2)^{3/2}} + \left(\sum_{i=1}^2 \frac{10R J_i z_i a_i^2}{(a_i^2 + z_i^2)^{3/2}} \right) \cos \theta \right] \left(\sum_{i=1}^2 \frac{J_i a_i^2}{(a_i^2 + z_i^2)^{3/2}} \right) \sin^2 \theta \quad (3.3)$$

Проекция главного вектора этих сил на вертикальную ось должна уравновешиваться силой тяжести оболочки $Q = 8\pi R^2 \gamma h$, где γ — удельный вес материала оболочки. Следовательно, условие бесконтактного удержания оболочки кольцевыми токами можно представить в виде

$$\left| 1 + \frac{J_2 a_2^2}{J_1 a_1^2} \left(\frac{a_1^2 + z_1^2}{a_2^2 + z_2^2} \right)^{3/2} \right| \left| 1 + \frac{z_2 J_2 a_2^2}{z_1 J_1 a_1^2} \left(\frac{a_1^2 + z_1^2}{a_2^2 + z_2^2} \right)^{3/2} \right| = \frac{4\gamma h c^2}{3\pi R z_1 J_1^2} \left(\frac{a_1^2 + z_1^2}{a_1} \right)^4 \quad (3.4)$$

В исходную систему (2.3) входят неизвестные усилия T_1^0 , T_2^0 и S^0 невозмущенного состояния. Их определяем, решая задачу (1.7) — (1.8). Принимая невозмущенное состояние оболочки безмоментным и осредняя уравнение (1.7) по толщине оболочки, с учетом (1.8) и (3.3) для определения указанных неизвестных усилий получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_1} (A_2 T_1^0) - \frac{\partial A_2}{\partial z_1} T_2^0 + A_1 \frac{\partial S^0}{\partial z_2} &= 2\gamma h A_2^2 \\ \frac{\partial}{\partial z_2} (A_1 T_2^0) + \frac{\partial}{\partial z_2} (A_2 S^0) + \frac{\partial A_2}{\partial z_1} S^0 &= 0 \\ \frac{T_1^0 + T_2^0}{R} &= \frac{2\gamma h}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial z_1} + P_0(z_1) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Решение уравнений (3.5) с учетом (3.3) и (3.4) имеет вид

$$S^0 = 0$$

$$\begin{aligned} T_1^0 &= -q_0 R \left[\frac{A_2^2}{A_1^2} + \frac{8\beta}{3A_1} \frac{\partial A_2}{\partial z_1} \left(\frac{3A_2^2}{A_1^2} - 1 \right) \right] \\ T_2^0 &= -q_0 R \left[\frac{3A_2^2}{A_1^2} + \frac{8\beta}{3A_1} \frac{\partial A_2}{\partial z_1} \left(\frac{12A_2^2}{A_1^2} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{9\pi J_1^2 a_1^4}{32c^2 (a_1^2 + z_1^2)^3} \left[1 + \frac{J_2 a_2^2}{J_1 a_1^2} \left(\frac{a_1^2 + z_1^2}{a_2^2 + z_2^2} \right)^{3/2} \right]^2 \\ \beta &= \frac{z_1 R}{a_1^2 + z_1^2} \left[1 + \frac{J_2 z_2 a_2^2}{J_1 z_1 a_1^2} \left(\frac{a_1^2 + z_1^2}{a_2^2 + z_2^2} \right)^{3/2} \right] \left[1 + \frac{J_2 a_2^2}{J_1 a_1^2} \left(\frac{a_1^2 + z_1^2}{a_2^2 + z_2^2} \right)^{3/2} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Подстановкой (3.6), (3.1) в систему (2.3) и исключением неизвестных u и v рассматриваемая задача устойчивости сводится к исследованию следующего интегро-дифференциального уравнения относительно нормального перемещения w

$$\begin{aligned}
& \left\{ \lambda^2(\Delta+1)^2 + 1 \right\} (\Delta+2)\omega + \frac{3q_0 R}{2Eh} (\Delta+1-\nu) \left\{ \left(1 + \frac{32\beta}{3A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right) \frac{A_2^2}{A_1^2} - \right. \\
& - \frac{8\beta}{9A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \left. \right\} \Delta \omega - \frac{2A_2^2}{3A_1^2} \left(1 + \frac{12\beta}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} - \frac{8A_2}{3A_1} \left(1 + \frac{5\beta}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right) \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \\
& + \frac{4q_0 R}{Eh} \left(\frac{h^2}{3R^2} \Delta - 1 - \nu \right) \left\{ \left| \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} + 10\beta \left(1 - \frac{13A_2^2}{10A_1^2} \right) \right| \frac{5A_2}{A_1} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + \frac{A_2^2}{A_1^2} \left(1 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{10\beta}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + 4 \left[1 - \frac{3A_2^2}{2A_1^2} + \frac{10\beta}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \left(1 - \frac{5A_2^2}{2A_1^2} \right) \right] \omega \right\} = 0
\end{aligned} \quad (3.8)$$

где

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{2}{r_0} - \ln \left(1 + \frac{2}{r_0} \right) \right] \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 + 5\beta \cos^2 \xi) \omega(\xi, \eta) \sin^2 \xi \right] d\xi d\eta \\
\lambda^2 &= \frac{h^2}{3R^2(1-\nu^2)}
\end{aligned}$$

4. Решение уравнения (3.10) представим в виде разложения

$$\omega = \left(\sum_{k=1}^n \omega_n P_{nk}(\cos x_1) \right) \cos kx_2, \quad (k \leq n, \quad i = 2, 3, \dots) \quad (4.1)$$

где ω_n — неизвестные коэффициенты, $P_{nk}(x)$ — присоединенные функции Лежандра.

Подставляя (4.1) в уравнение (3.8) и используя обычный процесс ортогонализации, после некоторых преобразований приходим к следующей бесконечной системе алгебраических уравнений относительно ω_n

$$\Omega_m^2 \omega_m - \frac{q_0}{\rho R h} \sum_{n=i}^{\infty} b_{mn}^{(i)} \omega_n = 0, \quad (m = i, i+1, i+2, \dots, k \leq n) \quad (4.2)$$

где

$$\Omega_m^2 = \frac{E}{\rho R^2} (\lambda_m - 2) \frac{1 + \beta^2 (\lambda_m - 1)^2}{\lambda_m - 1 + \nu}; \quad \lambda_m = (m+1)m \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
b_{km}^{(i)} &= A_{kn} \delta_{n,m} + A_{kn}^{(2)} \delta_{n,m-3} + A_{kn}^{(3)} \delta_{n,m+2} + 4\beta \left[A_{kn}^{(1)} \delta_{n,m-3} + \right. \\
& \left. + A_{kn}^{(3)} \delta_{n,m-1} + A_{kn}^{(1)} \delta_{n,m+1} + A_{kn}^{(5)} \delta_{n,m+3} \right]
\end{aligned}$$

В (4.3) $\delta_{i,j}$ — символы Кронекера, Ω_m — частота собственных колебаний оболочки в вакууме при отсутствии магнитного поля

$$\begin{aligned}
A_{kn}^{(1)} &= - \frac{(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} \left[n^2 - 6n - 15 + \frac{5(1+\nu)(2n^2+13n+20)}{\lambda_n - 1 + \nu} \right] \\
A_{kn}^{(2)} &= - \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2(2n+1)(2n+3)} \left[n^2 - 5n - 8 + \frac{8(1+\nu)(n^2+5n+6)}{\lambda_n - 1 + \nu} \right]
\end{aligned}$$

$$A_{kn}^{(3)} = -\frac{n-k+1}{(2n+3)(2n+5)(4n^2-1)} \left\{ \frac{1}{3\lambda_n(2n+1)} [4n^6 + 180n^5 - 866n^4 + 1525n^3 + \right. \\ \left. + 1251n^2 + 305n - 378n^2 - 270n - 15k^2(12n^6 + 68n^5 + 109n^4 - 3n^3 - \right. \\ \left. - 91n^2 - 29n + 15)] - \frac{5(1+\nu)}{\lambda_n - 1 + \nu} [4n^5 + 46n^4 + 130n^3 + 126n^2 - 30n - 42 - \right. \\ \left. - 2k^2(2n^3 + 15n^2 - 20n - 29)] \right\} \quad (4.4)$$

$$A_{kn}^{(4)} = -\frac{n+k}{(4n^2-1)(4n^2-9)} \left\{ \frac{1}{3\lambda_{n-1}(2n+1)} [4n^6 + 84n^5 - 221n^4 + 63n^3 + \right. \\ \left. + 391n^2 - 669n^3 + 276n^2 + 72n - 3k^2(60n^6 - 20n^5 - 199n^4 - \right. \\ \left. - 51n^3 + 262n^2 + 20n + 3)] - \frac{5(1+\nu)}{\lambda_n - 1 + \nu} [4n^5 - 26n^4 - 4n^3 + 58n^2 - \right. \\ \left. - 26n - 6 - 2k^2(2n^3 - 9n^2 - 34n + 6)] \right\}$$

$$A_{kn}^{(5)} = -\frac{(n+k)(n+k-1)}{2(4n^2-1)} \left\{ n^2 - 9n + 6 + \frac{8(1+\nu)(n^2-3n-10)}{\lambda_n - 1 + \nu} \right\}$$

$$A_{kn}^{(6)} = -\frac{(n+k)(n+k-1)(n+k-2)}{(2n-3)(4n^2-1)} \left\{ n^2 - 12n + 9 + \frac{5(1+\nu)(2n^2-9n+9)}{\lambda_n - 1 + \nu} \right\}$$

$$A_{kn} = \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} \left\{ \frac{1}{n(2n+1)} [2n^6 - 11n^5 - 20n^4 - 7n^3 - 8n^2 + 8n + k^2(10n^4 + \right. \\ \left. + 31n^3 + n^2 - 30n + 12)] + \frac{4(1+\nu)}{\lambda_n - 1 + \nu} [2n^4 + 4n^3 - 2n - k^2(2n^2 + 2n - 3)] \right\}$$

Условием существования нетривиального решения системы (4.2) является равенство нулю следующего бесконечного определителя:

$$|\delta_{ml} + c_{ml}| = 0 \quad (4.5)$$

где

$$c_{ml} = -q \frac{b_{mn}^{(0)}}{\Omega_m \Omega_n}, \quad q = \frac{q_0}{\rho R h}$$

В силу (4.3) и (4.4) легко заметить, что бесконечный определитель, входящий в уравнение (4.5), относится к классу сходящихся (нормальных) определителей.

Из уравнения (4.5) определяем критические значения кольцевых токов, при которых оболочка теряет статическую устойчивость. Это уравнение в первом приближении ($n = m = l$) имеет вид

$$\Omega_l^2 - qb_l^{(k)} = 0 \quad (4.6)$$

Для второго приближения получается следующее уравнение:

$$[\Omega_l^2 - qb_l^{(k)}][\Omega_{l+1}^2 - qb_{l+1,l+1}^{(k)}] + q^2 b_{l,l+1}^{(k)} \cdot b_{l+1,l}^{(k)} = 0 \quad (4.7)$$

Уравнения (4.6) или (4.7) необходимо рассматривать совместно с уравнением (3.4), представляющим собой условие бесконтактного удержания оболочки. Из (3.4) и (4.6) в первом приближении получается следующая система алгебраических уравнений относительно критических значений J_1^* и J_2^* кольцевых токов

$$a_1^2(a_2^2+z_2^2)^{3/2}J_1^* + a_2^2(a_1^2+z_1^2)^{3/2}J_2^* = \frac{4c}{3} \sqrt{\frac{2Eh}{\pi R}} [(a_1^2+z_1^2)(a_2^2+z_2^2)]^{3/2} B_{ik} \quad (4.8)$$

$$z_1 a_1^2(a_2^2+z_2^2)^{5/2} J_1^* + z_2 a_2^2(a_1^2+z_1^2)^{5/2} J_2^* = \frac{\gamma c}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{h}{EK}} \frac{[(a_1^2+z_1^2)(a_2^2+z_2^2)]^{5/2}}{B_{ik}}$$

где

$$B_{ik}^2 = \frac{(i_k-2)[1+v^2(i_k-1)^2]}{(i_k-1+v)A_{ki}} \quad (4.9)$$

Из (4.8) в частном случае, когда $a_1=a_2=a$, $z_1=|z_2|=z$, для критических значений получаются следующие формулы:

$$\frac{J_1^*}{c} = \frac{2B_{ik}}{3a^2} \sqrt{\frac{2Eh}{\pi R}} \left[(a^2+z^2)^{3/2} + \frac{3\gamma(a^2+z^2)^{5/2}}{8EzB_{ik}^2} \right] \quad (4.10)$$

$$\frac{J_2^*}{c} = \frac{2B_{ik}}{3a^2} \sqrt{\frac{2Eh}{\pi R}} \left[(a^2+z^2)^{3/2} - \frac{3\gamma(a^2+z^2)^{5/2}}{8EzB_{ik}^2} \right]$$

Минимум функции $J_i^*(i, k)$, как видно из (4.10), достигается при

$$B_{ik}^2 = \frac{3\gamma(a^2+z^2)}{8Ez} \Rightarrow \min_{(i,k)} B_{ik}^2 = b^2 \quad (4.11)$$

и составляет

$$\min \frac{J_i^*}{c} = \frac{4(a^2+z^2)^2}{3a^2\sqrt{z}} \sqrt{\frac{3\gamma h}{4\pi R}} \quad (4.12)$$

Легко заметить, что при условии (4.11) имеет место $J_2^*=0$ и $z^2 \ll a^2$. В силу этого из (4.11) и (4.12) окончательно имеем

$$\min \frac{J_i^*}{c} = \frac{4ab}{3} \sqrt{\frac{2hE}{\pi R}}, \quad \min J_2^* = 0$$

где величина b , согласно (4.11), является минимальным значением функции B_{ik} по волновым числам i и k .

Таблица 1

hR	i	k	b	$\min \frac{J_1^*}{a} \left(10^4 \frac{\text{кА}}{\text{м}} \right)$
1 100	13	13	0,9037	3,9651
1 125	14	14	0,8067	3,1646
1 200	18	18	0,6340	1,9659
1 250	21	21	0,5659	1,5691
1 500	29	29	0,3978	0,7797
1 1000	41	41	0,2802	0,3887

В табл. 1 для оболочки, изготовленной из диэлектрического материала КАСТ-В и покрытой тонким сверхпроводящим слоем, приведены значения J/J_0 при различных отношениях h/R . Для выбранного материала $E=1,7 \cdot 10^{10}$ н/м², $\nu=0,15$.

Авторы благодарны профессору М. Н. Киселеву за полезное обсуждение.

ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՀՈՍԱՆՔՆԵՐԻ ՄԱԳՆԵԻՍԱԿԱՆ ԳԱՇՏՈՒՄ ԳԵՐՉԱՂՈՐԳԻՉ
ԱՅՆԵՐԻ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Գ. Ե. ԲԱԳԴԱՍԱՐՅԱՆ, Պ. Ա. ՄԿՐՏՅԱՆ

Ս մ փ ո փ ո ս մ

Աշխատանքում հիմնվելով մագնիսաառաձգականության ոչ դժային հավասարումների և եզրային պայմանների վրա, արտածված են մագնիսական դաշտում գտնվող գերհաղորդիչ սֆերիկ թաղանթների դժայնացված հավասարումները և համապատասխան եզրային պայմանները: Գիտարկված է գերհաղորդիչ սֆերիկ թաղանթի կայունության խնդիրը երկու դուգաձև շրջանային հոսանքներով ստեղծված անհամասեռ մագնիսական դաշտում: Որոշված են հոսանքների կրիտիկական այն արժեքները, որոնց դեպքում թաղանթը կորցնում է ստատիկ կայունությունը:

STABILITY OF A SUPERCONDUCTING SPHERICAL SHELL IN
THE MAGNETIC FIELD OF CIRCULAR CURRENTS

G. E. BAGDASARIAN, P. A. MKRTCHIAN

S u m m a r y

In the paper based on non-linear equations and boundary conditions of magnetoelasticity, linearised equations and corresponding boundary conditions for superconducting spherical shells in a magnetic field are deduced. The stability problem for the superconducting spherical shell in a non-uniform magnetic field is considered, which arises from two parallel circular currents. The critical values of the current are determined beyond which the shell is statically unstable.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат. 1957. 532 с.
2. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.

3. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости М.: Гостехиздат, 1948. 212 с.
4. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин М: Наука, 1977. 272 с.
5. *Багдасарян Г. Е., Мкртчян Н. А.* Устойчивость сверхпроводящей цилиндрической оболочки в магнитном поле—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1981, 34, № 6, с. 36—47.
6. *Кошляков Н. С., Глицер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. М. Высшая школа, 1970. 712 с.
7. *Белозеров В. Н.* Удержание сверхпроводящего шара системой круговых токов.—ЖТФ, 1966, 36, вып. 5, с. 852—859.
8. *Левин М. Л.* О решении одной задачи квазистационарной электродинамики методом изображений.—ЖТФ, 1964, 34, вып. 3, с. 393—398.

Институт механики АН Армянской ССР
Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила в редакцию
17.VI. 1983