

УДК 624.046.3 : 539.3

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ УСТОЙЧИВОСТИ
 УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

ГОЛЬДИН В. Г., КОЛМАНОВСКИЙ В. Б.

Задачи оптимизации устойчивости упругих систем имеют весьма длительную историю, изложенную, например, в работах [1–7]. В [7] для нескольких способов заделки получено необходимое и достаточное условие оптимальности, а также дано выражение для формы стержня, при которой критическая сила потери устойчивости максимальна.

В [1] рассмотрен консольный упруго заделанный стержень. В настоящей работе получены оптимальная форма потери устойчивости и значение критической силы для иных способов заделки упругого стержня. Поскольку способ решения всех рассмотренных ниже задач идентичен, изложим его подробно лишь для первой из них, ограничиваясь в отношении остальных постановкой задачи и формулировкой полученных результатов.

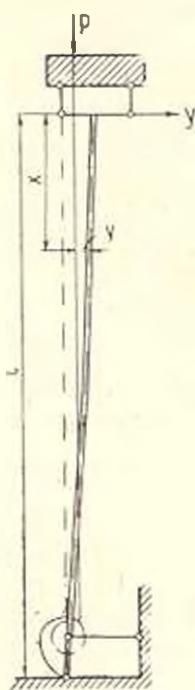
1. *Верхний конец стержня может свободно смещаться, но не может поворачиваться, нижний конец стержня упруго заделан.* Верхний конец стержня находится под действием вертикальной сжимающей силы P . Линия действия сжимающей силы при потере устойчивости остается вертикальной (фиг. 1). Длина стержня равна l , а коэффициент жесткости заделки α . Через E обозначен модуль Юнга материала, а через $I(x)$ — момент инерции поперечного сечения. Задача об устойчивости такого стержня рассмотрена в книге [4].

Обозначим через $y(x)$ прогиб стержня, отсчитываемый от линии действия сжимающей силы. Деформации стержня предполагаются достаточно малыми. Тогда соотношения, определяющие $y(x)$ в рамках линейной теории упругости, имеют вид [4]

$$y'' + P(EI)^{-1} y = 0 \quad (1.1)$$

$$y'(0) = 0, \quad y'(l) = P\alpha^{-1} y(l) \quad (1.2)$$

Здесь $y'(x) = dy(x)/dx$. Обозначим через $S(x)$ площадь поперечного сечения стержня. Считается, что поперечные сечения стержня — подобные фигуры. Тогда



Фиг. 1

$$J(x) = k S^2(x) \quad (1.3)$$

Здесь постоянная $k > 0$ определяется формой поперечного сечения стержня. Кроме того, имеется ограничение на объем стержня

$$\int_0^l S(x) dx = V, \quad V > 0 \quad (1.4)$$

где V —заданное число. Задача состоит в выборе такой функции $S(x) \geq 0$, удовлетворяющей ограничению (1.4), при которой критическая сила P_0 потери устойчивости будет максимальной. Известно [1, 2, 5—7], что куб оптимальной площади поперечного сечения $S(x)$ пропорционален квадрату соответствующего прогиба. Поскольку, однако, прогиб удовлетворяет однородной краевой задаче (1.1), (1.6), то величина размерного множителя в условиях оптимальности может быть принята равной единице. Таким образом, необходимое условие оптимальности, связывающее площадь поперечного сечения $S(x)$ и его прогиб $y(x)$, имеет вид

$$y^2(x) = S^2(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.5)$$

С учетом (1.3), (1.5) соотношения (1.1), (1.4) принимают вид

$$y''(x) + \frac{P}{Ek} y^{-\frac{1}{3}}(x) = 0, \quad \int_0^l y^{\frac{2}{3}}(x) dx = V$$

Введем новые величины $x_1, P_1, y_1(x_1)$ по формулам

$$x_1 = \frac{x}{l}, \quad P_1 = P \frac{l}{2}, \quad y_1(x_1) = \left(\frac{Ek}{Pl^2} \right)^{\frac{1}{2}} y(x) \quad 0 \leq x_1 \leq 1 \quad (1.6)$$

В новых переменных получаем следующую краевую задачу:

$$y_1' + y_1^{-\frac{1}{3}} = 0, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_1'(1) = P_1 y_1(1) \\ \int_0^1 y_1^{\frac{2}{3}}(x) dx = \frac{V}{\sqrt{P_1}}, \quad \gamma = \frac{V}{l} \left(\frac{Ek}{l^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.7)$$

На основании [7] решение задачи (1.7) записывается в параметрической форме следующим образом:

$$y_1(\theta) = C_1 \sin^3 \theta \quad (1.8)$$

$$x_1(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} C_1^{\frac{2}{3}} \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) + C_2 \quad (1.9)$$

Здесь C_1, C_2 —постоянные, параметр $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$. Числа θ_0 и θ_1 удовлетворяют условиям

$$x_1(\theta_0) = 0, \quad x_1(\theta_1) = 1 \quad (1.10)$$

С учетом краевых условий задачи (1.7) заключаем, что справедливы формулы

$$\left. \frac{dy_1}{dx_1} \right|_{\theta=0} = 0 \quad (1.11)$$

$$\left. \left[\frac{dy_1}{dx_1} - P_1 y_1(x_1) \right] \right|_{\theta=0} = 0 \quad (1.12)$$

Из изопериметрического условия вытекает, что

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} y_1^2(\theta) \frac{dx_1}{d\theta} d\theta = \frac{\gamma}{\sqrt{P_1}} \quad (1.13)$$

Для определения постоянных величин θ_0 , θ_1 , C_1 , C_2 , а также силы P_1 преобразуем соотношения (1.10) — (1.13).

Из (1.11) имеем $\sqrt{3} C_1^{\frac{2}{3}} \cos \theta_0 = 0$. Поскольку ищется нетривиальное решение $y_1 \neq 0$, то $C_1 \neq 0$. Значит,

$$\cos \theta_0 = 0 \quad (1.14)$$

отсюда следует, что $\sin 2\theta_0 = 0$. Из (1.10) вытекает, что

$$\frac{\sqrt{3}}{2} C_1^{\frac{2}{3}} \left(\theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \right) + C_2 = 0$$

Так как $\sin 2\theta_0 = 0$, то

$$\frac{\sqrt{3}}{2} C_1^{\frac{2}{3}} \theta_0 + C_2 = 0, \quad C_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} C_1^{\frac{2}{3}} \theta_0 \quad (1.15)$$

Ввиду (1.10) будет

$$1 = \frac{\sqrt{3}}{2} C_1^{\frac{2}{3}} \left(\theta_1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \right) + C_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} C_1^{\frac{2}{3}} \left(\theta_1 - \theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \right)$$

$$C_1^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3} \left(\theta_1 - \theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \right)} \quad (1.16)$$

С учетом (1.12) заключаем, что

$$\sqrt{3} C_1^{\frac{1}{3}} \cos \theta_1 = P_1 C_1 \sin^3 \theta_1, \quad C_1^{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{3} \cos \theta_1}{P_1 \sin^3 \theta_1} \quad (1.17)$$

Из (1.13) следует, что

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} y_1^2(\theta) \frac{dx_1}{d\theta} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} C_1^{\frac{2}{3}} \sin^3 \theta \frac{\sqrt{3}}{2} C_1^{\frac{2}{3}} (1 - \cos 2\theta) d\theta =$$

$$= \sqrt{3} C_1^{\frac{4}{3}} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sin^4 \theta d\theta = \sqrt{3} C_1^{\frac{4}{3}} \left(\frac{3}{8} \theta_1 - \frac{\sin 2\theta_1}{4} + \frac{1}{32} \sin 4\theta_1 - \frac{3}{8} \theta_0 + \frac{\sin 2\theta_0}{4} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{32} \sin 4\theta_0 \right) = \gamma P_1^{-\frac{1}{2}}$$

Так как $\sin 2\theta_0 = \sin 4\theta_0 = 0$, то получаем соотношение

$$\frac{\sqrt{3}}{8} C_1^4 \left(3\theta_1 - 2\sin 2\theta_1 + \frac{1}{4} \sin 4\theta_1 - 3\theta_0 \right) = \frac{\gamma}{\sqrt{P_1}} \quad (1.18)$$

Из (1.16) и (1.17) находим выражение для P_1

$$P_1 = \frac{3\cos\theta_1 \left(\theta_1 - \theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \right)}{2\sin^3\theta_1} \quad (1.19)$$

Исключим C_1 и P_1 из равенства (1.18) с помощью формул (1.17) и (1.19). Получим уравнение, связывающее параметры θ_1 и θ_0

$$\gamma = \frac{3\theta_1 - 2\sin 2\theta_1 + \frac{1}{4} \sin 4\theta_1 - 3\theta_0}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\cos\theta_1}{\left(\theta_1 - \theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \right)^3 \sin^3\theta_1}} \quad (1.20)$$

Если числа θ_0^* , θ_1^* удовлетворяют уравнению (1.20), то числа $\theta_0^* + \pi m$, $\theta_1^* + \pi m$ (m — целое) также удовлетворяют этому уравнению. Так как переход от одной пары чисел к другой может лишь изменить знак функции $y_1(\theta)$, который не имеет значения в рассматриваемом случае, то, согласно (1.14), можно положить $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$. Определим теперь

интервал, в котором следует искать θ_1 . Этот интервал должен удовлетворять двум условиям:

1) при изменении параметра θ_1 внутри этого интервала правая часть уравнения (1.20) должна изменяться от 0 до ∞ , поскольку $\gamma \in (0, \infty)$.

2) на искомом интервале функция $y_1(\theta)$ должна иметь наименьшее возможное число узлов, так как вычисляется наименьшее собственное значение краевой задачи (1.2) (соответствующее наибольшей величине критической силы).

Нетрудно убедиться, что этим требованиям удовлетворяет интервал $\left(0, \frac{\pi}{2} \right)$. Таким образом, задача сводится к определению при

заданном значении параметра γ числа $\theta_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ из уравнения

$$\gamma = \frac{3\theta_1 - 2\sin 2\theta_1 + \frac{1}{4} \sin 4\theta_1 + \frac{3}{2}\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\cos\theta_1}{\left(\theta_1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 + \frac{\pi}{2} \right)^3 \sin^3\theta_1}} \quad (1.21)$$

После этого величина P_1 , пропорциональная критической силе, определяется из уравнения (1.19), постоянная C_1 вычисляется по формуле (1.16) и постоянная C_2 — по формуле (1.15). Наконец, функция $y_1^{opt}(x_1)$, пропорциональная оптимальному профилю, определяется с помощью соотношений (1.8), (1.9). Полученные при различных значениях параметров результаты вычислений обсуждаются в § 4.

2. Упруго опертый на концах стержень имеет заделку на одном и шарнир на другом конце. Как и в первом параграфе, обозначим через P вертикальную сжимающую силу, через l , V — соответственно длину и объем стержня, через E — модуль Юнга материала стержня. Пусть далее $J(x)$ — момент инерции поперечного сечения, $S(x)$ — площадь поперечного сечения стержня, $y(x)$ — прогиб стержня, а постоянные α_1 , α_2 — коэффициенты жесткости заделки концов. Запишем соотношение, аналогичное (1.1) и (1.2), для рассматриваемого случая [4]

$$y'' + P(EJ)^{-1}y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(l) = \frac{1}{l} \left[Py'(l) \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right) + y(l) \right] \quad (2.1)$$

Положим $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2)^{-1}$. Тогда $\alpha^{-1} = \alpha_1^{-1} + \alpha_2^{-1}$.

Условие (2.1) переписывается в виде

$$y(0) = 0, \quad y'(l) \left(1 - \frac{P}{l\alpha} \right) = \frac{y(l)}{l} \quad (2.2)$$

Будем считать, что объем стержня задан, то есть справедливо ограничение (1.4). Используя далее необходимое условие оптимальности (1.5) и проведя замену переменных (1.6), получим следующую краевую задачу:

$$y_1' + y_1^{-1/3} = 0, \quad y_1(0) = 0, \quad y_1(1) = y_1'(1)(1 - P_1)$$

$$\int_0^1 y_1^{1/3}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{P_1}}, \quad \tau = \frac{V}{l} \left(\frac{Ek}{Ix} \right)^{1/3} \quad (2.3)$$

Соотношения (1.8) — (1.10) сохраняются в прежнем виде. Из (2.2) получаем

$$C_1 \sin^3 \theta_0 = 0 \quad (2.4)$$

Значит,

$$\sin \theta_0 = 0, \quad \sin 2\theta_0 = 0, \quad \sqrt{3} C_1^{1/3} (1 - P_1) \cos \theta_1 = C_1 \sin^3 \theta_1, \quad C_1^{2/3} = \frac{\sqrt{3} (1 - P_1) \cos \theta_1}{\sin^3 \theta_1} \quad (2.5)$$

Из (1.10) следует, что

$$\frac{\sqrt{3}}{2} C_1^{1/3} \theta_0 + C_2 = 0, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} C_1^{1/3} \left(\theta_1 - \theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \right) = 1 \quad (2.6)$$

Отсюда имеем

$$C_1^{2/3} = \frac{2}{\sqrt{3} \left(\theta_1 - \theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \right)} \quad (2.7)$$

Из (2.5) и (2.6) получаем выражение для P_1

$$P_1 = 1 - \frac{2 \sin^3 \theta_1}{3 \left(\theta_1 - \theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \right) \cos \theta_1} \quad (2.8)$$

В соотношении (1.18), к которому сводится требование ограниченности объема, не участвуют граничные условия. Поэтому оно остается неизменным и для рассматриваемого случая

$$\frac{\sqrt{3}}{8} C_1^{1/3} \left(3\theta_1 - 2\sin 2\theta_1 + \frac{1}{4} \sin 4\theta_1 - 3\theta_0 \right) = \gamma P_1^{-1/2}$$

С учетом (2.7) получаем уравнение

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{3\theta_1 - 2\sin 2\theta_1 + \frac{1}{4} \sin 4\theta_1 - 3\theta_0}{\left(\theta_1 - \theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \right)^2} \sqrt{P_1} = \gamma \quad (2.9)$$

Здесь P_1 выражается формулой (2.8). Рассуждая аналогично § 1, в соответствии с (2.4) положим $\theta_0 = 0$, то есть $C_1 = 0$. Величину θ_1 будем искать в интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right)$. Уравнение (2.9) сведется к следующему:

$$\gamma = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{3\theta_1 - 2\sin 2\theta_1 + \frac{1}{4} \sin 4\theta_1}{\left(\theta_1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \right)^2} \sqrt{1 - \frac{2\sin^2 \theta_1}{3 \left(\theta_1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \right) \cos \theta_1}} \quad (2.10)$$

Алгоритм вычислений здесь следующий:

- 1) задать величину параметра $\gamma \in (0, \infty)$;
- 2) определить $\theta_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right)$ из уравнения (2.10);
- 3) определить величину P_1 по формуле (2.8);
- 4) определить зависимость $y_1^{2/3}(x)$ по формулам (1.8), (1.9).

3. *Верхний конец шарнирно оперт, нижний упруго заделан.* Через $P, l, V, \alpha, E, J(x), y(x)$ обозначим те же величины, что и в § 1. Прогиб стержня $y(x)$ удовлетворяет соотношениям

$$y'' + P(EJ)^{-1} = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(l) = y(l) \left(\frac{1}{l} + \frac{Py(l)}{\alpha} \right)$$

Краевая задача, аналогичная (1.7) и (2.3), запишется следующим образом:

$$y_1 + y_1^{-1/3} = 0, \quad y_1(0) = 0, \quad y_1(1) = (1 + P_1)y_1(1)$$

$$\int_0^1 y_1^{2/3}(x) dx = \frac{\gamma}{\sqrt{P_1}}, \quad \gamma = \frac{V}{l} \left(\frac{Ek}{I_3} \right)^{1/2}$$

Используя (1.8) — (1.10), получим

$$C_1 \sin^2 \theta_0 = 0, \quad \sin \theta_0 = 0; \quad \sin 2\theta_0 = 0, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} C_1^{1/3} \theta_0 + C_2 = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} C_1^{1/3} \left(\theta_1 - \theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \right) = 1, \quad \sqrt{3} C_1^{1/3} \cos \theta_1 = (1 + P_1) C_1 \sin^2 \theta_1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{8} C_1^{4,1} \left(3\theta_1 - 2\sin 2\theta_1 + \frac{1}{4} \sin 4\theta_1 - 3\theta_0 \right) = \gamma P_1^{-6}$$

Отсюда вытекает равенство

$$P_1 = \frac{3\left(\theta_1 - \theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1\right) \cos \theta_1}{2\sin^3 \theta_1} - 1 \quad (3.1)$$

Аналогично первым двум параграфам имеем

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{3\theta_1 - 2\sin 2\theta_1 + \frac{1}{4} \sin 4\theta_1 - 3\theta_0}{\left(\theta_1 - \theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1\right)^2} \sqrt{\frac{3\left(\theta_1 - \theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1\right) \cos \theta_1}{2\sin^3 \theta_1} - 1} = 1 \quad (3.2)$$

Проводя далее рассуждения, подобные § 1, получим, что $\theta_0 = 0$, а число θ_1 следует искать в интервале $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$. Уравнение (3.2) принимает вид

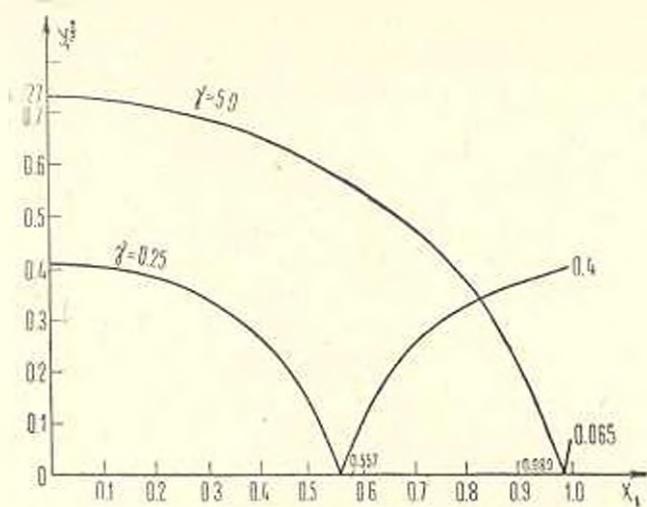
$$\gamma = \sqrt{\frac{3\left(\theta_1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1\right) \cos \theta_1}{2\sin^3 \theta_1} - 1} \frac{3\theta_1 - 2\sin 2\theta_1 + \frac{1}{4} \sin 4\theta_1}{2\sqrt{3} \left(\theta_1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1\right)^2} \quad (3.3)$$

Способ вычисления тот же, что и выше. Именно, вначале задается $\gamma \in (0, \infty)$, далее определяется параметр $\theta_1 \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, затем вычисляется величина P_1 по формуле (3.1) и, наконец, находится зависимость $y_1^{2/3}(x_1)$ по формулам (1.8), (1.9).

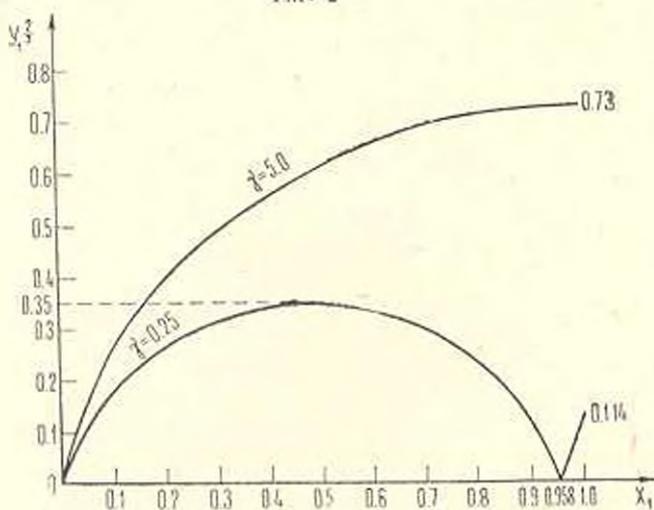
4. *Результаты расчетов.* Схема решения задачи в каждом конкретном случае сводится к следующему:

1) по заданным значениям V , l , E , k , x (см. § 1) находим величину γ (см. (1.7)); 2) определяем θ_1 ; 3) определяем P_1 ; 4) находим функцию $y_1(x_1)$; 5) с помощью формул (1.6) находим фактическое значение критической силы P_0 и прогиб $y(x)$; 6) находим оптимальную площадь поперечного сечения из условия (1.5).

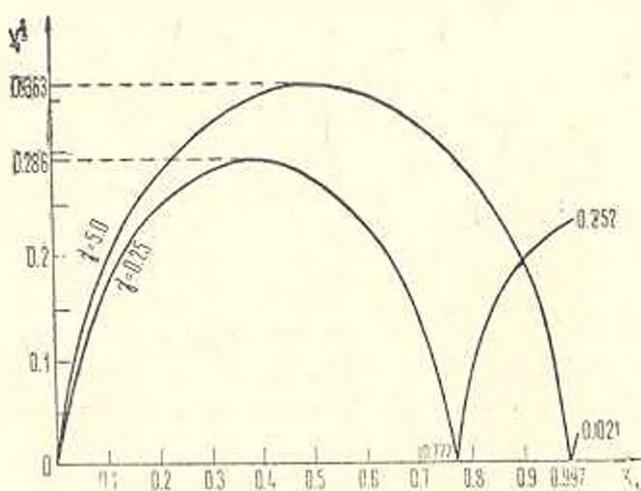
Уравнения (1.21), (2.10) и (3.3) были решены относительно θ_1 на ЭВМ. Параметр γ изменялся от 0,25 до 10 с шагом 0,25. Для задач 1, 2, 3 на фигурах, соответственно, 2, 3, 4, построены графики зависимости $y_1^{2/3}(x_1)$ при $\gamma = 0,25$; $\gamma = 5$. При $\gamma = 10$ кривые на фиг. 2—4 практически не отличаются от соответствующих кривых при $\gamma = 5$. Отметим, что функция $y_1^{2/3}(x_1)$ пропорциональна площади поперечного сечения, то есть ее график представляет собой модель оптимального профиля стержня. На фиг. 5 кривые 1, 2, 3 представляют зависимость $\lg P_1$ от γ для задач 1, 2, 3 соответственно.



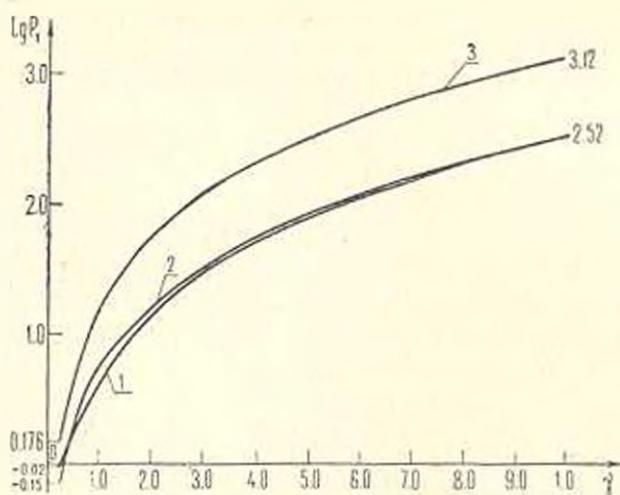
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Փիգ. 5

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՉՈՂՆԻԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՕՊՏԻՄԱԼԱՅԻՄԱՆ ԲՐՈՇ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Վ. Գ. ԿՈԼԴԻՆ, Վ. Բ. ԿՈԼՄԱՆՈՎՍԿԻ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Աշխատանքը նվիրված է առաձգական ձողերի կայունության խնդիրների դիտարկմանը: Ստացված են կայունության կորստի օպտիմալ ձևը և կրիտիկական ուժի արժեքը առաձգական ձողի ծայրերի տարրեր ձևերով ամրացման համար:

SOME PROBLEMS OF STABILITY OPTIMIZATION OF ELASTIC BEAMS

V. G. COLDIN, V. B. KOLMANOVSKY

S u m m a r y

In the present paper the solution of problem of stability optimization of elastic beams is presented. The shape of the optimal beam and the critical value of the load are derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баничук Н. В. Оптимизация устойчивости стержня с упругой заделкой. Изв. АН СССР, МТТ, 1974, № 4, стр. 150—154.
2. Лурье А. И. Применение принципа максимума к простейшим задачам механики. Тр. Ленинградского политехн. ин-та. Л.: Машиностроение, 1965, № 252, стр. 34—46.
3. Николай Е. Л. Задача Лагранжа о наилучшем очертании колонн. Изв. Петерб. политехн. ин-та, 1907, т. 6.
4. Ржаницын А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955.
5. Glauser T. Über die Formarchitektonischer Säulen. — Bull. phys.-math. Acad. St.—Peterbourg, 1851, p. 279—294.
6. Lagrange J. L. Sur la figure des colonnes. Miscellanea Taurinensia, (Royal Society of Turin), Tomus U, 1770—1773, p. 123.
7. Tadjbakhsh I., Keller J. B. Strongest Columns and Isoperimetric Inequalities for Eigenvalues. Journal of Applied Mechanics, March 1962, p. 159—164.

Институт проблем механики
АН СССР

Поступила в редакцию
31.1.1983