ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

Մեխանիկա XXXVIII, № 3, 1985 Механика

УДК 519.6

ПРОГРАММНЫЕ КОНСТРУКЦИИ ДЛЯ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ ПРИ m ЦЕЛЕВЫХ МНОЖЕСТВАХ

ГАБРИЕЛЯН М. С.

Рассматриваются вопросы определения стратегий из различных классов для задач сближения и уклонения при m целевых множествах на базе программных конструкций. Выделяются регулярные случаи соответствующих задач и определяются экстремальные стратегии из соответствующих условий минимакса или максимина. Самым широким классом стратегий, используемых здесь, является класс кусочно-позиционных стратегий.

§ 1. Программное поглощение m целей

Пусть задана система уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u, v) \tag{1.1}$$

где $x \in R^n$; $u \in P \subset R^p$, $v \in Q \subset R^q$.

Предполагается, что функция $f(\cdot)$ удовлетворяет всем условиям, приведенным в [1], а P и Q — заданные компакты. Предположим, что заданы замкнутые и ограниченные множества M_k ($k \in I = (1, \ldots, m)$) в R^{n+1}. Предполагается, что в отличие от постановки задач в [1] $N = R^{n+1}$.

Пусть также заданы моменты времени ϑ_k, $k \in I$, такие, что $t_0 \leqslant \vartheta_1 \leqslant \ldots \leqslant \vartheta_m$.

Предполагается также, что

$$M_i \cap \{(t, x) : t = t_i,\ x \in R^n\} \neq \varnothing;\quad t_i \in [t_0, \vartheta_i]\quad i \in I \tag{1.2}$$

Определим программные управления и движения для отрезка времени $t \in [t_0, \vartheta_m]$ точно так, как в [2] (стр. 125). Сформулируем следующие вспомогательные задачи:

Задача 1.1. Заданы $t_0 \leqslant \vartheta_1 \leqslant \ldots \leqslant \vartheta_m$, c, множества M_k $k \in I$, удовлетворяющие условию (1.2), начальная позиция $(t_*, x_*) \in [\vartheta_{i-1}, \vartheta_i) \times R^n$, параметры $(x_1, \ldots, x_{i-1}) \in R^{(i-1)n}$ и выбрано $\{\eta_{(\cdot)}[t_*, \vartheta_m)\}_\Pi$. Среди $\eta_{(\cdot)} \in \{\eta_{(\cdot)}[t_*, \vartheta_m)\}_\Pi$ требуется найти минимизирующее управление η^0_t $(t_* \leqslant t < \vartheta_m,\ t \neq \vartheta_k)$, которое удовлетворяет следующему условию:

$$\rho((\vartheta_j, x_j, p_j^0)\ j=1, \ldots, l-1;\ (\vartheta_j, x(\vartheta_j, t_*, x_*, \nu^0_{(\cdot)}), p_j^0)\ j=l, \ldots, m) =$$

$$= \min_{\nu_{(\cdot)} \in \{\nu_{(\cdot)}\}_{\text{п}}} \rho((\vartheta_j, x_j, p_j^0)\ j=1, \ldots, l-1; (\vartheta_j, x(\vartheta_j, t_*, x_*, \nu_{(\cdot)}), p_j^0)\ j=l, \ldots, m)$$

где (1.3)

$$\rho((\vartheta_i, x_i, p_i^0)\ i \in I) = \min \{ \omega((\vartheta_i, x_i, p_i)\ i \in I) : p_k \in M_k(\vartheta_k),\ k \in I \}.$$

Функция $\omega : [t_0, \infty) \times R^n \times R^n \times \ldots \times [t_0, \infty) \times R^n \times R^n \to R^1$ непрерывна и в области $\omega(\{t_k, x_k, p_k\}) > c$ имеет непрерывные частные производные по всем аргументам $\{t_k, x_k\}$. Параметры x_j $j=1, \ldots, l$ фиксируем.

Решение задачи 1.1 всегда существует, так как функция $\omega(\cdot)$ (1.3) зависит от всех аргументов непрерывно, а переменные $x_j = x_j(\vartheta_j, t_*, x_*, \nu_{(\cdot)})$ зависят непрерывно от программных управлений-мер $\nu_t (t_* \leqslant t < \vartheta_m)$, множество которых замкнуто и компактно в себе в слабой топологии.

Задача 1.2. Заданы $t_* < \vartheta_1 \leqslant \ldots \leqslant \vartheta_m$, c, множества M_k $k \in I$, удовлетворяющие условию (1.2), начальная позиция $(t_*, x_*) \in [\vartheta_{l-1}, \vartheta_l) \times R^n$, параметры $(x_1, \ldots, x_{l-1}) \in R^{(l-1)n}$. Требуется найти максиминное оптимальное программное управление $\mu_t^{00} (t_* \leqslant t < \vartheta_m,\ t \neq \vartheta_k)$, которое удовлетворяет следующему условию максимина:

$$\rho((\vartheta_j, x_j, p_j^0)\ j=1, \ldots, l-1;\ (\vartheta_j, x(\vartheta_j, t_*, x_*, \nu^{00}_{(\cdot)}), p_j^0)\ j=l, \ldots, m) =$$

$$= \max_{\mu_{(\cdot)} \in \{\mu_{(\cdot)}\}} \min_{\nu_{(\cdot)} \in \{\nu_{(\cdot)}\}_{\text{п}}} \rho((\vartheta_j, x_j, p_j^0)\ j=1, \ldots, l-1;\ (\vartheta_j, x(\vartheta_j, t_*, x_*, \nu_{(\cdot)}), p_j^0)$$

$$j=l, \ldots, m) = \varepsilon^{(0)}(t_*, x_*, x_1, \ldots, x_{l-1}, \{\vartheta_k\}) \qquad (1.4)$$

Здесь также параметры x_j $(j=1, \ldots, l-1)$ полагаются постоянными.

Для доказательства существования решения задачи 1.2 достаточно показать, что максимум в (1.4) достигается. Каждое из областей достижимости $G_k = \{x : x(\vartheta_k, t_*, x_*, \nu_{(\cdot)}),\ \nu_{(\cdot)} \in \{\nu_{(\cdot)}\}_{\text{п}}\}$ замкнуто в R^n и изменяется непрерывно по метрике Хаусдорфа зависимо от $\nu_{(\cdot)}$ второго игрока [2] (стр. 131–132). Функционал $\min \{\min \{\omega((\vartheta_i, x_i, p_i)$ $i=1, \ldots, m) : p_i \in M_i(\vartheta_i);\ i=1, \ldots, m\} : x_j \in G_j;\ j=l, \ldots, m\}$ зависит от G_k непрерывно, так как множества $M_1, \ldots, M_m$ замкнуты. Следовательно, этот функционал непрерывно зависит от программных управлений $\nu_{(\cdot)}$ второго игрока. Из замкнутости и компактности в себе и слабой топологии программных управлений второго игрока вытекает, что максимум в (1.4) достигается.

§ 2. Принцип минимума и правило максимина для задачи сближения с m целевыми множествами

Сформулируем принцип минимума. Предположим, что функция $f(t, x, u, v)$ имеет непрерывные частные производные по x^i $(i=1, \ldots, n)$. Принцип минимакса для задачи сближения будет:

Лемма 2.1. Оптимальное управление η_t^0 $(t_* \leq t < \vartheta_m)$, $(\vartheta_{l-1} \leq t_* < \vartheta_l$, $\vartheta_0 = t_0)$, разрешающее задачу 1.1 и порожденное им оптимальное программное движение при условии

$$\min \varphi(\{\vartheta_j, x_j, p_j^0\}\ j=1, \ldots, l-1;\ \{\vartheta_j, x(\vartheta_j, t_*, x_*, \eta_{(\cdot)}), p_j^0\}\ j=l, \ldots, m) > c \tag{2.1}$$

удовлетворяет равенству

$$\int_P \int_Q \bar{s}_k(t) f(t, x^0(t), u, v) \eta_t^0(du, dv) = \int_Q \min_{u \in P} \bar{s}_k(t) f(t, x^0(t), u, v) \nu_t(dv) \tag{2.2}$$

при почти всех $t \in [t_*, \vartheta_m] \cap [\vartheta_{k-1}, \vartheta_k)$, $k \geq l$, $\nu_t(dv) = \int_P \eta_t^0(du, dv)$;

$\bar{s}_k(t) = \sum_{j=k}^{m} s_j(t)$, где $s_j(t)$ - решение дифференциального уравнения

$$\dot{s}_j(t) = -L'(t) s_j(t) \tag{2.3}$$

с краевым условием

$$s_j(\vartheta_j) = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right|_{[\vartheta_\alpha, x_\alpha, p_\alpha^0]\ \alpha=1, \ldots, l-1;\ (\vartheta_\alpha, x^0(\vartheta_\alpha), p_\alpha^0)\ \alpha=l, \ldots, m]} \tag{2.4}$$

Переменные x_α $(\alpha = 1, \ldots, l-1)$ считаются постоянными. Матрица определяется равенством

$$L(t) = \int_P \int_Q \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^0(t)} \eta_t^0(du, dv) \tag{2.5}$$

а $p_i^0 \in M_i(\vartheta_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$ — векторы, на которых достигается минимум в (1.3).

Наметим план доказательства леммы 2.1. Из определения функций $\omega(\{\vartheta_i, x_i, p_i\}\ i \in I)$ и $\varphi(\cdot)$ (1.3) следует, что при $t_* \in [\vartheta_{l-1}, \vartheta_l)$, $t \in [t_*, \vartheta_m] \cap [\vartheta_{k-1}, \vartheta_k)$ $(k \geq l)$ элементарное изменение функционала $\omega(\cdot)$ в зависимости от элементарного изменения программных управлений имеет следующий вид:

$$\delta\omega = \sum_{j=k}^{m} \left| \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right|'_{[(\vartheta_\alpha, x_\alpha, p_\alpha)\ \alpha=1, \ldots, l-1;\ (\vartheta_\alpha, x_*(\vartheta_\alpha), p_\alpha)\ \alpha=l, \ldots, k-1;\ (\vartheta_\alpha, x_*(t), p_\alpha)\ \alpha=k, \ldots, m]} \cdot \delta x_*(t)$$

$$= \sum_{j=k}^{m} \left| \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right|'_{[\ ]} \cdot S(t, t_*) \delta x_*(t_*) + \int_{t_*}^{t} \int_P \int_Q \sum_{j=k}^{m} \left| \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right|'_{[\ ]} S(t, \tau) \times$$

$$\times f(\tau, x_*(\tau), u, v) \delta\eta_\tau(du, dv) d\tau = \sum_{j=k}^{m} s_j'(t, t_*) \delta x_*(t_*) +$$

$$+ \int_{t_*}^{t} \int_P \int_Q \sum_{j=k}^{m} s_j'(t, \tau) f(\tau, x_*(\tau), u, v) \delta\eta_\tau(du, dv) d\tau$$

где $s_j(t,\tau)=\left[\dfrac{\partial\omega}{\partial x_j}\right]_{[\,]} S(t,\tau)$, а $S(t,\tau)$ — фундаментальная матрица решений уравнения

$$d/d\tau\, S(t,\tau) = -L'(\tau)S'(t,\tau) \quad (S(t,t)=E)$$

Затем, исходя от обратного, точно такими же рассуждениями, как при доказательстве леммы 36.1 из [2], приходим к противоречию, которое и доказывает лемму 2.1.

Выделим регулярный случай для задачи сближения со всеми множествами. Назовем элементарную программу $\{\nu_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta_m), \nu_{(\cdot)}\}_{\text{II}}$ регулярной для данной позиции (t_*, x_*) $(t_*<\vartheta_m;\ \varepsilon^0(t_*, x_*, x_1, \ldots, x_{l-1}, \{\vartheta_k\})>c)$, если: 1) задача 1.1 для данной позиции (t_*, x_*) $t_*\in[\vartheta_{l-1}, \vartheta_l)$ и набора $(x_1, \ldots, x_{l-1})$ при выборе этой программы $\{\nu_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta_m), \nu_{(\cdot)}\}_{\text{II}}$ имеет единственное по существу решение $\nu^0_{(\cdot)}$; 2) набор векторов $p_i^0\in M_i(\vartheta_i)$ $i=1, \ldots, m$, минимизирующий (1.3) при $\nu_{(\cdot)}=\nu^0_{(\cdot)}$, единственный.

Лемма 2.2. Пусть оптимальная максимизирующая элементарная программа $\{\nu_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta_m), \nu^0_{(\cdot)}\}_{\text{II}}$ из задачи 1.2 для данной позиции $\{t_*, x_*\}$ и набора $(x_1, \ldots, x_{l-1})$, где $\varepsilon^{(0)}(t_*, x_*, x_1, \ldots, x_{l-1}, \{\vartheta_k\})>c$, регулярна. Пусть $\nu_{t_k}^{00}$ и $x^{00}(t)$ $(t_*\leqslant t<\vartheta_m;\ t_*\in[\vartheta_{l-1}, \vartheta_l))$ суть оптимальное управление и оптимальное движение, разрешающие задачу 1.2. Тогда выполняется следующее условие максимина: при почти всех $t\in[t_*, \vartheta_m)\cap[\vartheta_{k-1}, \vartheta_k]$ $k\geqslant l$ $(t_*\in[\vartheta_{l-1}, \vartheta_l))$

$$\int_P\int_Q \bar{s}_k(t) f(t, x^{00}(t), u, v)\nu_t^{00}(du, dv)=\max_{v\in Q}\ \min_{u\in P} \bar{s}_k(t) f(t, x^{00}(t), u, v) \qquad (2.6)$$

при

$$\bar{s}_k(t)=\sum_{i=k}^{m} s_i(t) \qquad (2.7)$$

где $s_i(t)$ — решение уравнения

$$\dot{s}_i(t)=-L'(t)\, s_i(t);\quad L(t)=\int_P\int_Q\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{x^{00}(t)}\nu_t^{00}(du, dv) \qquad (2.8)$$

с краевым условием

$$s_i(\vartheta_i)=\left[\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right]_{\{\vartheta_\alpha, x_\alpha, p_\alpha^0\};\ \alpha=1, \ldots, l-1;\ \{\vartheta_\alpha, x^{00}(\vartheta_\alpha), p_\alpha^0\}\ \alpha=l, \ldots, m\}} \qquad (2.9)$$

Доказательство леммы 2.2 не приводим, так как оно аналогично доказательству леммы 37.1 из [2].

§ 3. Экстремальное прицеливание

Выделим регулярный случай для задачи сближения со всеми множествами.

Ситуацию назовем регулярной, если для всякой позиции (t_*, x_*) $t_* \in [\vartheta_{l-1}, \vartheta_l)$ из области

$$G = U\,[G_i : i = 1, \ldots, m] \tag{3.1}$$

$G_1 = [(t_*, x_*) : t_* \leqslant \vartheta_1;\ c < \varepsilon^{(0)}(t_*, x_*, \{\vartheta_k\}) \leqslant c + \beta]$, $G_2 = [(t_*, x_*) : \vartheta_1 \leqslant$ $\leqslant t_* \leqslant \vartheta_2;\ (\vartheta_1, x_1) \in G_1;\ c < \varepsilon^{(0)}(t_*, x_*, x_1, \{\vartheta_k\}) \leqslant c + \beta], \ldots, G_m = [(t_*, x_*) :$ $\vartheta_{m-1} \leqslant t_* \leqslant \vartheta_m;\ (\vartheta_1, x_1) \in G_1, \ldots, (\vartheta_{m-1}, x_{m-1}) \in G_{m-1};\ c < \varepsilon^{(0)}(t_*, x_*, x_1, \ldots,$

$$x_{m-1}, \{\vartheta_k\}) \leqslant c + \beta]$$

($\beta > 0$) и набора $(\vartheta_\alpha, x_\alpha) \in G_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, l-1)$, 1) существует единственное по существу решение $\tau^{(0)}_{(\cdot)}$ задачи 1.2, 2) набор векторов $p_1^{(0)} \in$ $\in M_1(\vartheta_1), \ldots, p_m^{(0)} \in M_m(\vartheta_m)$ единственный. Сформулируем следующее утверждение:

Лемма 3.1. Если при выбранных c и β ситуация при

$$\gamma((\vartheta_k, x_k, p_k^{(0)})\ k = 1, \ldots, l-1;\ (\vartheta_k, x(\vartheta_k, t_*, x_*, \tau^{(0)}_{(\cdot)}), p_k^{(0)})\ k = l, \ldots,$$

$$m) = \min\,[\gamma((\vartheta_k, x_k, p_k)\ k = 1, \ldots, l-1;\ (\vartheta_k, x(\vartheta_k, t_*, x_*, \tau^{(0)}_{(\cdot)}), p_k) \tag{3.2}$$

$$k = l, \ldots, m) : p_i \in M_i(\vartheta_i);\ i \in I\,]$$

является регулярной, то в области G (3.1) $t \neq (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m)$ функция $\varepsilon^{(0)}(t, x, x_1, \ldots, x_{l-1}, \{\vartheta_k\})$ имеет непрерывные частные производные $\dfrac{\partial\varepsilon^{(0)}}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial\varepsilon^{(0)}}{\partial t}$, и эти производные определяются равенствами

$$\left|\frac{\partial\varepsilon^{(0)}}{\partial x}\right|_{(t_*, x_*)} = \bar{s}_l(t_*) \tag{3.3}$$

$$\left|\frac{\partial\varepsilon^{(0)}}{\partial t}\right|_{(t_*, x_*)} = -\max_{v \in Q}\min_{u \in P}\,[\bar{s}_l(t_*) f(t_*, x_*, u, v)]$$

Здесь $s_l(t_*)$ определяется согласно (2.7)—(2.9). Справедливость леммы 3.1 проверяется аналогично доказательству леммы 38.1 из [2], которое не приводим.

Функция $\varepsilon^{(0)}(t, x, x_1, \ldots, x_{l-1}, \{\vartheta_k\})$ в регулярном случае является непрерывно дифференцируемой в области

$$G^* = \{(t, x) : (t, x) \in G;\ t \neq (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m)\} \tag{3.4}$$

Составим выражение

$$\left(\frac{d\varepsilon^{(0)}}{dt}\right)_{u, v} = \left|\frac{\partial\varepsilon^{(0)}}{\partial x}\right| f(t, x, u, v) + \frac{\partial\varepsilon^{(0)}}{\partial t} =$$

$$= \bar{s}_l(t) f(t, x, u, v) - \max_{v \in Q}\min_{u \in P} \bar{s}_l(t) f(t, x, u, v) \tag{3.5}$$

Из (3.5) следует, что при выполнении условия седловой точки для маленькой игры при любом $(t, x) \in G^*$ (3.4) функция $\varepsilon^{(0)}(t, x, x_1, \ldots, x_{l-1},$ $\{\vartheta_k\})$ удовлетворяет условию

$$\min_{u\in P}\max_{v\in Q}\left[\left[\frac{\partial\varepsilon^{(0)}}{\partial x}\right]' f(t, x, u, v) + \frac{\partial\varepsilon^{(0)}}{\partial t}\right]=0 \tag{3.6}$$

Сформулируем следующее утверждение:

Теорема 3.1. Пусть выполнено условие седловой точки маленькой игры, и при выбранных значениях c и $\beta>0$ ситуация для

$$\min\left\{\omega((\vartheta_k, x_k, p_k)\ k\in I) : p_k\in M_k(\vartheta_k)\right\}$$

регулярна. Тогда экстремальная стратегия $U_c^{(0)}: u_c^{(0)}(t, x)$ $t\in[t_0, \vartheta_m]$, заданная условием

$$\max_{v\in Q}\left(\left[\frac{\partial\varepsilon^{(0)}}{\partial x}\right]' f(t, x, u_c^{(0)}, v)\right)=\min_{u\in P}\max_{v\in Q}\left(\left[\frac{\partial\varepsilon^{(0)}}{\partial x}\right]' f(t, x, u, v)\right) \tag{3.7}$$

в области G^* (3.4) и любой $u_c^*(t, x)\in P$ вне этой области, обеспечит неравенство

$$\rho((\vartheta_i, x[\vartheta_i, t_0, x_0, U_c^{(0)}], p_i^{(0)})\ i=1, \ldots, m)\leqslant\max(c, \varepsilon^{(0)}(t_0, x_0, \{\vartheta_k\})) \tag{3.8}$$

для любого движения $x[\cdot]$, порожденного стратегией $U_c^{(0)}$, если только $\varepsilon^{(0)}(t_0, x_0, \{\vartheta_k\})<c+\beta$.

Прежде чем доказать теорему 3.1, отметим, что здесь игра начинается из позиции (t_0, x_0) и в каждый момент ϑ_α $(\alpha\in I)$ вектор $x_\alpha=x(\vartheta_\alpha)$ фиксируется, поэтому нет необходимости введения параметров x_α, $\alpha=1, \ldots, l-1$.

Теперь докажем теорему 3.1.

Пуст, наоборот, при условиях теоремы 3.1 существуют $U_c^{(0)}$, удовлетворяющие (3.7), и движение $(t, x[t, t_0, x_0, U_c^{(0)}])$, для которых $\rho((\vartheta_i, x[\vartheta_i, t_0, x_0, u_c^{(0)}], p_i^{(0)})\ i=1, \ldots, m)>\max(c, \varepsilon^{(0)}(t_0, x_0, \{\vartheta_k\}))$. Рассмотрим систему уравнений в контингенциях $\dot x\in F^{(0)}(t, x, v^*)$, где $F_u^{(0)}(t, x, v^*)=\mathrm{co}\{f: f=f(t, x, u, v^*);\ u\in[u_c^{(0)}(t, x)]\}$ при $t\neq\vartheta_k$ и $F_*^{(0)}(t, x, v^*)=\mathrm{co}\{f: f=f(t, x, u, v^*);\ u\in P\}$ при $t=\vartheta_k$; $v^*\in Q$.

Здесь каждый вектор $u_c^{(0)}(t, x)$ и v^* удовлетворяет условию (3.7) при $t\neq\vartheta_k$. Из непрерывности $\dfrac{\partial\varepsilon^{(0)}}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial\varepsilon^{(0)}}{\partial t}$ $(t\neq\vartheta_k)$ следует, что множества $F_u^{(0)}(\cdot)$ изменяются по (t, x) полунепрерывно сверху относительно включения, и следовательно, для любой точки $(t_*, x_*)\in G$ существует пучок решений из абсолютно-непрерывных кривых, который компактен в себе в метрике $C_{[t_0, \vartheta_m]}$. Согласно сделанному предположению среди решений пучка $\{x(t, t_0, x_0, U_c^{(0)})\}$ должно существовать хотя бы одно решение $x(t, t_0, x_0, U_c^{(0)})$, для которого

$$\rho((\vartheta_i, x(\vartheta_i, t_0, x_0, U_c^{(0)}), p_i^{(0)})\ i\in I)>\max(c, \varepsilon^{(0)}(t_0, x_0, \{\vartheta_k\})).$$

При этом функция $\varepsilon^{(0)}(t, x(t), \{\vartheta_k\})$ по t будет абсолютно-непрерывной и возрастающей на множестве положительной меры из $[t_0, \vartheta_m]$, так как $\varepsilon^{(0)}(t_0, x_0, \{\vartheta_k\})<c+\beta$. Тогда на этом множестве $d/dt\ \varepsilon^{(0)}(t, x(t), \{\vartheta_k\})>0$, а это противоречит условию (3.6). Таким образом, теорема 3.1 доказана.

§ 4. Регулярные игры сближения к заданным моментам при m целевых множествах

Пусть $\omega(\{t_k, x_k, p_k\})$ есть непрерывная функция от аргументов $\{t_k, x_k, p_k\}$ и допускает непрерывные частные производные $\partial\omega/\partial x_k^i$ $(i=1, \ldots, n;\ k=1, \ldots, m)$ в области пространства $\{t_k, x_k, p_k\}$, где $c<\omega(\{t_k, x_k, p_k\})<c+\beta$; $p_k\in M_k(t_k)$, $k\in I$, причем $M_k(t_k)$ замкнуты, ограничены и зависят от $t_k\in[\vartheta_{k-1}, \vartheta_k]$ непрерывно в метрике Хаусдорфа

Сформулируем следующую задачу:

Задача 4.1. Дана начальная позиция $\{t_*, x_*\}$, $t_*\in[\vartheta_{l-1}, \vartheta_l)$, параметры $(t_1, x_1), \ldots, (t_{l-1}, x_{l-1})$. Требуется найти минимизирующие моменты $\tau_k^{(0)}\in[t_*, \vartheta_k]\cap[\vartheta_{k-1}, \vartheta_k]$, $k\geq l$, максимизирующую элементарную программу $\{v_{(\cdot)}\}_l^m=\{v_{(\cdot)}: [t_*, \max\limits_k \tau_k^{(0)}); \ldots x_*\}$ и в ней минимизирующее управление $u_{(\cdot)}^{(0)}$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\min_{\{\tau_k\in[\vartheta_{k-1}, \vartheta_k]\}} \varepsilon^{(0)}(t_*, x_*, x_1, \ldots, x_{l-1}, t_1, \ldots, t_{l-1}, \tau_l, \ldots, \tau_m) =$$
$$= \varepsilon^{(0)}(t_*, x_*, x_1, \ldots, x_{l-1}, t_1, \ldots, t_{l-1}, \tau_l^{(0)}, \ldots, \tau_m^{(0)}) \tag{4.1}$$

Функция $\varepsilon^{(0)}(\cdot)$ (4.1) непрерывно зависит от (t_*, x_*). Назовем, что ситуация является вполне регулярной в области

$$G=U[G_j: j\in I] \tag{4.2}$$

$(G_j=[(t, x): \vartheta_{j-1}\leq t\leq\vartheta_j;\ c\leq\varepsilon^{(0)}(t, x, x_1, \ldots, x_{j-1}, t_1, \ldots, t_{j-1}, \tau_j^{(0)}, \ldots, \tau_m^{(0)})\leq c+\beta;\ (t_\alpha, x_\alpha)\in G_\alpha;\ \alpha=1, \ldots, j-1]\ j=1, \ldots, m;\ \vartheta_{l_0}=t_0;\ \beta>0)$

если:

1) для каждой позиции $(t_*, x_*)\in G$ (4.2), $t_*\in[\vartheta_{l-1}, \vartheta_l]$ и набора $(t_1 x_1), \ldots, (t_{l-1}, x_{l-1})$ $((\vartheta_\alpha, x_\alpha)\in G_\alpha;\ \alpha=1, \ldots, l-1)$ существует единственный набор $(\tau_l^{(0)}, \ldots, \tau_m^{(0)})$ и единственное управление $u_{(\cdot)}^{(0)}$, удовлетворяющие условию (4.1); 2) набор векторов $p_k^{(0)}\in M_k(t_k)$ $k=1,\ldots,l-1$; $p_k^{(0)}\in M_k(\tau_k^{(0)})$, $k=l, \ldots, m$, минимизирующий в (1.3) (символы ϑ_{l_k} заменены на t_{l_k} $k=1, \ldots, l-1$; $\tau_k^{(0)}$ $k=l, \ldots, m$, а $v_{(\cdot)}$ на $v_{(\cdot)}^{(0)}$) единственный.

Во вполне регулярном случае оптимальное управление $u_{(\cdot)}^{(0)}$ из задачи 4.1 удовлетворяет правилу максимина (2.6)–(2.9) (с заменой символов ϑ_k на t_k и $\tau_k^{(0)}$ соответственно). Из вполне регулярности ситуации следует, что функция $\varepsilon^{(0)}$ (4.1) при $t\neq\tau_k^{(0)}$ имеет непрерывные частные производные $\partial\varepsilon^{(0)}/\partial x$ и $\partial\varepsilon^{(0)}/\partial t$, которые определяются равенствами

$$\left|\frac{\partial\varepsilon^{(0)}}{\partial x}\right|_{(t_*, x_*)} = \bar{s}_l(t_*), \quad \left|\frac{\partial\varepsilon^{(0)}}{\partial t}\right|_{(t_*, x_*)} = -\max_{v\in Q}\min_{u\in P}[\bar{s}_l(t_*) f(t_*, x_*, u, v)] \tag{4.3}$$

где вектор $\bar{s}_l(t_*)$ определяется согласно (2.7)–(2.9), если моменты ϑ_k заменить моментами t_k и $\tau_k^{(0)}$. Функция $\varepsilon^{(0)}(\cdot)$ (4.1) в каждой позиции (t, x) из G (4.2) $t\neq\tau_k^{(0)}$ удовлетворяет условию

$$\max_{v\in Q}\min_{u\in P}\left(\left[\frac{\partial\varepsilon^{(0)}}{\partial x}\right]' f(t, x, u, v)+\frac{\partial\varepsilon^{(0)}}{\partial t}\right)=0 \tag{4.4}$$

откуда вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 4.1. Пусть ситуация является вполне регулярной и в каждой позиции $\{t_*, x_*\}$ из G (4.2) выполнено условие седловой точки маленькой игры. Если в начальной позиции $\{t_0, x_0\}$ имеет место $\varepsilon^{(0)}(t_0, x_0, \tau_1^{(0)}, \ldots, \tau_m^{(0)})=\varepsilon\in[c, c+\delta]$, то экстремальная стратегия $U_e^{(0)} \div u_e^{(0)}(t, x)$, которая в области G (4.2) при $t_*<\tau_m^{(0)}$ определяется условием

$$\max_{v\in Q}\left(\left[\frac{\partial\varepsilon^{(0)}}{\partial x}\right]'_{(t_*, x_*)} f(t_*, x_*, u_e^{(0)}, v)\right)=\min_{u\in P}\max_{v\in Q}\left(\left[\frac{\partial\varepsilon^{(0)}}{\partial x}\right]'_{(t_*, x_*)} f(t_*, x_*, u, v)\right) \tag{4.5}$$

а в других позициях произвольным вектором $u\in P$, обеспечит для всех движений $x[t]=x[t, t_0, x_0, U_e^{(0)}]$ результат $\gamma((\tau_i^*, x[\tau_i^*, t_0, x_0, U_e^{(0)}], p_i^{(0)})\ i=1, \ldots, m)\leq c$ при $\tau_k^*\in[\vartheta_{k-1}, \vartheta_k]\ k\in I$.

Теорема 4.1 доказывается такими же рассуждениями, как и теорема 3.1, если ϑ_k заменить на $\tau_k^{(0)}$ $k\in I$.

§ 5. Условия стабильности в игре сближения к заданным моментам при m целевых множествах

Пусть функция $\omega(\{t_k, x_k, p_k\})$ удовлетворяет всем условиям, приведенным в § 4. Предположим, что множества

$$M_k=\{(t, p): \vartheta_{k-1}\leq t\leq\vartheta_k;\ \ p\in M_k(t)\}\quad (k\in I) \tag{5.1}$$

компактны в себе в эвклидовой метрике и $M_k(\vartheta_k)\neq\varnothing$. Обозначим через T_k множество всех тех значений $t\in[\vartheta_{k-1}, \vartheta_k]$, для которых сечения $M_k(t)$ не пусты, а символом $T_k(t_*)$ — пересечение $T_k(t_*)=T_k\cap[t_*, \vartheta_k]$, $k\in I$.

Задача 5.1. Дана начальная позиция (t_*, x_*) $(t_*\in[\vartheta_{l-1}, \vartheta_l))$ и набор $(t_1, x_1), \ldots, (t_{l-1}, x_{l-1})$. Требуется найти минимизирующие моменты $\tau_k^{(0)}\in[\vartheta_{k-1}, \vartheta_k]$ $k=l, \ldots, m$, максимизирующую элементарную программу $\{v_{(\cdot)}\}^0_{II}=\{v_{(\cdot)}[t_*, \tau_m^{(0)}), v^0_{(\cdot)}, x_*\}_{II}$ и в ней минимизирующее управление $u^{(0)}_{(\cdot)}$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\min_{\{\tau_k\in T_k(t_*)\cap[\vartheta_{k-1}, \vartheta_k]\}}\varepsilon^{(0)}(t_*, x_*, x_1, \ldots, x_{l-1}, t_1, \ldots, t_{l-1}, \tau_l, \ldots, \tau_m)=$$

$$=\varepsilon^{(0)}(t_*, x_*, x_1, \ldots, x_{l-1}, t_1, \ldots, t_{l-1}, \tau_l^{(0)}, \ldots, \tau_m^{(0)}) \tag{5.2}$$

Задача 5.1 имеет решение, так как функция $\varepsilon^{(0)}(t_*, x_*, x_1, \ldots, x_{l-1}, t_1, \ldots, t_{l-1}, \tau_l, \ldots, \tau_m)$ при $\tau_k\in T_k(t_*)\cap[\vartheta_{k-1}, \vartheta_k]$ полунепрерывна по $(\tau_l, \ldots, \tau_m)$, а множества $T_k(t_*)\cap[\vartheta_{k-1}, \vartheta_k]$ замкнуты. Таким образом, функция $\varepsilon^{(0)}(\cdot)$ достигает своего минимума на каких-то значениях $\tau_k^{(0)}\in T_k(t_*)\cap[\vartheta_{k-1}, \vartheta_k]$. Допустим, что для всякой позиции $(t_*, x_*)\in G$ (4.2)

$t_* \in [\vartheta_{l-1}, \vartheta_l)$ и набора $(t_\alpha, x_\alpha) \in G_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, l-1$, когда $\varepsilon^{(0)}(\cdot)$ понимается в смысле (5.2), найдутся минимизирующие моменты $\tau_k^{(0)}$ такие, что во всякой максимизирующей элементарной программе $[\tau_{(\cdot)}, [t_*, \tau_m^{(0)}),$ $\tau_{(\cdot)}^{(0)}, x_*]_\Pi$ будет существовать лишь единственное по существу минимизирующее управление $\tau_{(\cdot)}^{(0)}$ и единственный набор векторов

$$p_k^{(0)} \in M_k(t_k) \;\; k = 1, \ldots, l-1; \;\; p_k^{(0)} \in M_k(\tau_k^{(0)}) \;\; k = l, \ldots, m$$

минимизирующий (3.2) при замене символов ϑ_k на t_k и $\tau_k^{(0)}$, $\tau_{(\cdot)}$ — на $\tau_{(\cdot)}^{(0)}$. Множество всех минимизирующих моментов $\{\tau_k^{(0)}\}$, удовлетворяющих вышеприведенным условиям минимакса, отвечающим данной начальной позиции $\{t_*, x_*\}$ и набору $(x_1, \ldots, x_{l-1})$, обозначим через $T_k^{(0)}(t_*, x_*, t_1, x_1, \ldots, t_{l-1}, x_{l-1})$ $k = l, \ldots, m$. Из результатов § 2 вытекает, что при всяком $\tau_k^{(0)} \in T_k^{(0)}(\cdot)$ минимизирующее управление $\tau_{(t)}^{(0)}(t_* \leqslant t \leqslant \tau_m^{(0)})$ удовлетворяет при почти всех $t \in [t_*, \tau_m^{(0)}]$ условию максимина (2.6) — (2.9) с заменой ϑ_k на t_k и $\tau_k^{(0)}$.

Обозначим через $S_l(t_*, x_*, t_1, x_1, \ldots, t_{l-1}, x_{l-1}, [\tau_k^{(0)}])$ множество всех векторов $\bar{s}_l(t_*)$, определенных согласно (2.7) — (2.9) при замене ϑ_k на $\tau_k^{(0)}$ для позиции (t_*, x_*), набора $(t_1, x_1), \ldots, (t_{l-1}, x_{l-1})$ и при всех значениях $[\tau_k^{(0)}]$. Сформулируем следующее условие:

Условие 5.1. Скажем, что выполнено это условие, если для всякой позиции (t_*, x_*) из области G (4.2) и набора

$$(t_\alpha, x_\alpha) \in G_\alpha \;\; (\alpha = 1, \ldots, l-1), \;\; t_* \in [\vartheta_{l-1}, \vartheta_l)$$

при $t_* \bar{\in} \bigcup\limits_{l \leqslant k \leqslant r} T_k(\cdot)$ и при всяком выборе вероятностной меры $\nu(dv)$ найдется, по крайней мере, одна группа минимизирующих моментов $\tau_k^{(0)} \in T_k^{(0)}(\cdot)$ и, по крайней мере, одна вероятностная мера $\eta(du, dv)$, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_P \eta(du, dv) = \nu(dv) \tag{5.3}$$

и такая, что для всех векторов $\bar{s}_l \in S_l(\cdot)$ будет справедливо неравенство $\int\limits_P \int\limits_Q \bar{s}_l' f(t_*, x_*, u, v) \eta(du, dv) \leqslant \max\limits_{v \in Q} \min\limits_{u \in P} \bar{s}_l' f(t_*, x_*, u, v)$ $(l \in I)$.

Функция $\varepsilon^{(0)}(\cdot)$ (5.2) в точках $\tau_k^{(0)}$ не возрастает, а фазовый вектор $x(t)$ непрерывен, следовательно, имея в виду, что условия леммы 43.1 из [2] соблюдаются, то точно такими же рассуждениями, как и при доказательстве теоремы 43.1 из [2], приходим к выводу об u-стабильности каждого из множеств

$$W_{jl}(t_1, \ldots, t_j) = \{(t, x) : \vartheta_j \leqslant t \leqslant \vartheta_{j+1}; \varepsilon^{(0)}(t, x, x_1, \ldots, x_j, t_1, \ldots, t_j,$$
$$\tau_{j+1}^{(0)}, \ldots, \tau_m^{(0)}) \leqslant c; \; x_i \in W_{i-1,c}(\cdot) \cap \Gamma_i : i = 0, \ldots, j\}; \; j = 0, \ldots, m-1;$$
$$W_{-1,c} = R^{n+1}; \;\; c \leqslant \varepsilon \leqslant c+\beta \tag{5.4}$$

Таким образом, верно следующее утверждение:

Теорема 5.1. Пусть выполнено условие 5.1, и для всякой позиции $(t_*, x_*) \in G$ (4.2) выполнено условие седловой точки для маленькой игры. Тогда при всяком $\varepsilon (\varepsilon \leq \varepsilon \leq \varepsilon + \beta)$ КПС $U_\varepsilon^{(0)} \div u_\varepsilon^{(0)}(t, x)$, экстремальная к системе множеств $W_j(\cdot)$ (5.4), гарантирует для всякого движения $x[t] = x[t, t_0, x_0, U_\varepsilon^{(0)}]$ выполнение условия

$$\min_{\{\tau_k\}} \rho((\tau_k, x[\tau_k, t_0, x_0, U_\varepsilon^{(0)}], p_k^{(0)}) \; k = 1, \ldots, m) \leq \varepsilon \tag{5.5}$$

если только $\varepsilon^{(0)}(t_0, x_0, \tau_1^{(0)}, \ldots, \tau_m^{(0)}) \leq \varepsilon$.

§ 6. Обобщенное экстремальное прицеливание в игре об уклонении при m целевых множествах

Для простоты изложения рассмотрим линейную систему вида

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)v \tag{6.1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ — $(n \times n)$, $(n \times p)$ и $(n \times q)$ — матрицы с непрерывными элементами при $t \in [t_0, \infty)$, $u \in P$, $v \in Q$ ($P \subset R^p$, $Q \subset R^q$ — заданные компакты). Пусть заданы выпуклые замкнутые и ограниченные множества M_k, $k \in I$ в пространстве R^n. Пусть также заданы моменты времени $t_0 \leq \vartheta_1 \leq \ldots \leq \vartheta_m$. Пусть выполнены следующие условия:

Условие 6.1. При всех $t \in [t_0, \tau_k]$ и $\tau_k \in [t_0, \vartheta_k]$ функции

$$\varkappa_k(t, \tau_k, l) = -\left| \int_t^{\tau_k} \min_{u \in P} l' X(\tau_k, \tau) B(\tau) u d\tau + \int_t^{\tau_k} \max_{v \in Q} l' X(\tau_k, \tau) C(\tau) v d\tau + \min_{-p \in M_k(\tau_k)} l' p \right| \tag{6.2}$$

выпукла по l для всех $k \in I$.

Условие 6.2. Для всякого вектора $u \in \bar{P} = \text{co}\{u \in P\}$ найдется вектор $v \in \bar{Q} = \text{co}\{v \in Q\}$ такой, что для всех $t \in [t_0, \vartheta_m]$ и для всех векторов l будет справедливо неравенство

$$l'(B(t)u + C(t)v) \geq \min_{u \in P} l'[B(t)u] + \max_{v \in Q} l'[C(t)v] \tag{6.3}$$

Здесь $X(t, \tau)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$ ($X(t, t) = E$).

Построим следующую функцию Ляпунова:

$$\lambda(t, x) = \sum_{j=k}^{m} \int_t^{\vartheta_j - \mu} \frac{d\tau_j}{\varepsilon_j^{(0)}(t, x, \tau_j)}; \quad t \in [\vartheta_{k-1}, \vartheta_k - \mu] \; (\vartheta_0 = t_0) \tag{6.4}$$

Здесь

$$\varepsilon_j^{(0)}(t, x, \vartheta_j) = \max_{\|l_j\| \leq 1} | l_j' X(\vartheta_j, t) x - \varkappa_j(t, \vartheta_j, l_j) | \tag{6.5}$$

Единственность вектора $l_j^{(0)}$, минимизирующего (6.5), следует из условия 6.1, $\mu > 0$ — сколь угодно малое число. Область $G \subset R^{n+1}$, определяемая условием $\min\limits_{\tau_j} \varepsilon_j^{(0)}(t, x, \tau_j) > 0$ $(j = 1, \ldots, m)$, где определена функция $\lambda(t, x)$ (6.4), открыта и при стремлении точки (t, x) к границе этой области функция $\lambda(t, x)$ неограниченно возрастает. Область G не пересекается с множествами $\{(t, x) : x \in M_k,\ t \in [t_0, \vartheta_k - \mu]\}$.

Определим стратегию второго игрока из условия

$$\left\{ \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t}^{\vartheta_j - \alpha} \frac{d\tau_j}{[\varepsilon_j^{(0)}(t, x, \tau_j)]^2} l_j^{(0)'} X(\tau_j, t) \right\} C(t) v_e[t, x] =$$

$$= \max_{v \in Q} \left\{ \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t}^{\vartheta_j - \alpha} \frac{d\tau_j}{[\varepsilon_j^{(0)}(t, x, \tau_j)]^2} l_j^{(0)'} X(\tau_j, t) \right\} C(t) v \tag{6.6}$$

$$(\vartheta_{k-1} < t \leq \vartheta_k - \mu,\ t_0 = \vartheta_0,\ (k \in I))$$

а при $\{t, x\} \in G$ положим $\{v_e[t, x]\} = Q$. Множества $\{v_e[t, x]\}$, определяемые из (6.6), полунепрерывны сверху относительно включения по (t, x), поэтому уравнение в контингенциях

$$\frac{dx(t)}{dt} \in A(t)x(t) + B(t)P + C(t)\mathrm{co}\{v_e[t, x]\} \quad (x(t_0) = x_0) \tag{6.7}$$

имеет абсолютно-непрерывные решения. Составим производную функции $\lambda(t, x)$ по произвольному решению $x(t)$ уравнения (6.7), исходящему из точки $(t_0, x_0) \in G$. Учитывая условие 6.2 и включение $\mathrm{co}[v \in \{v_e[t, x]\}] \subset \mathrm{co}\{v \in Q\}$, заключаем, что $d/dt\ \lambda(t, x(t)) < 0$. С другой стороны, любое движение $x[t, t_0, x_0, V_e]$, совершаемое по стратегии V_e, определяемой из (6.6), содержится в решениях уравнения (6.7). Следовательно, функция $\lambda(t, x(t))$ не возрастает, что и обеспечит условие $(t, x[t]) \in G$ для всякого движения $x[t, t_0, x_0, V_e]$.

Таким образом, верно следующее утверждение:

Теорема 6.1. При выполнении условий 6.1 и 6.2 стратегия $V_e \div v_e[t, x]$, определяемая из (6.6), обеспечит уклонение всех движений $x[t, t_0, x_0, V_e]$ от попадания на множество M_k на промежутке $[t_0, \vartheta_k)$ при всех $k \in I$, если только $\min\limits_{\tau \in [t_0, \vartheta_k]} \varepsilon_k^{(0)}(t_0, x_0, \tau) > 0$ $(k \in I)$.

Автор благодарит академика Н. Н. Красовского за постановку и ценные советы.

m ՆՊԱՏԱԿԱՅԻՆ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ԽԱՂԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԾՐԱԳՐԱՅԻՆ ԿՈՆՍՏՐՈՒԿՑԻԱՆԵՐԸ

Մ. Ս. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում են ծրագրային կոնստրուկցիաների հիման վրա ստրատեգիաների որոշման և ստաբիլ կամուրջների կառուցման հարցերը m նպատակային բազմությունների հետ մոտեցման և նրանցից գոնե մեկից շեղման *խնդիրների համար։ Առանձնացված են ռեգուլյար դեպքերը և համապատասխան մինիմաքսի և մաքսիմինի պայմաններից որոշվում են էքստրեմալ ստրատեգիաները։ Ստրատեգիաներն ընտրվում են ամենանեղ դասերից։ Ամենալայն դասը, որն օգտագործվում է այստեղ, դա կտոր առ կտոր դիրքային ստրատեգիաների դասն է։*

PROGRAMME CONSTRUCTIONS FOR GAME PROBLEMS WITH m AIM SETS

M. S. GABRIELIAN

S u m m a r y

The questions of determining strategies and constructing stable bridges are considered for the problems of approaching with every set and deviation from at least one of them on the basis of programme constructions. Regular cases of given problems are singled out and extremal strategies are determined from corresponding conditions of minimax or maximin. Classes of the strategies are chosen to be the possible narrowest. The widest class of the used strategies appeared to be piece-by-piece positional strategies.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Габриелян М. С., Субботин А. И.* Игровые задачи о встрече с m целевыми множествами. ПММ, 1979, т. 43, № 2.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 15.VI.1982