ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVIII, № 3, 1985 Механика

УДК 539.413

ИЗГИБ СЛЕГКА ИЗОГНУТОГО ОДНОРОДНОГО АНИЗОТРОПНОГО БРУСА

МИНАСЯН Р. С.

В статье [1] П. М. Риз исследовал напряженное состояние слегка изогнутого однородного изотропного бруса при различных видах деформаций. В настоящей статье решается задача изгиба такого же бруса в плоскости, перпендикулярной плоскости кривизны оси бруса, из анизотропного материала*.

1. *Постановка задачи.* Положим брус из анизотропного материала с одной плоскостью упругой симметрии (13 упругих постоянных), ось которого — плоская кривая второго порядка, отнесен к прямоугольной, прямолинейной системе координат xOy с началом в центре тяжести нижнего (закрепленного) основания. Оси Ox и Oy — главные, центральные. Брус ограничен двумя основаниями $z=0$ и $z=l$ и боковой поверхностью [1]

$$f\left(x+k\frac{z^2}{2},\ y\right)=0 \tag{1.1}$$

Упругие постоянные бруса обозначим через E, A_{ij} $(i, j=1, 2, 3, 4)$, коэффициенты Пуассона — σ_i $(i=1, 2, 4)$.

Объемные, а также поверхностные силы на боковой поверхности отсутствуют, а все силы, приложенные к верхнему основанию, в зависимости от рассматриваемой задачи, приводятся или к паре сил в плоскости yOz или к силе, параллельной оси Oy.

Задачу решаем в линейной постановке, полагаем, что компоненты деформаций с достаточной точностью определяются линейными членами, напряжения не превосходят предел пропорциональности и определяются известными формулами [2], [5]

$$\tau_{ii}=\sum_j A_{ij}e_{jj}+A_{i4}e_{12}, \quad i=1, 2, 3; \quad j=1, 2, 4; \quad \tau_{44}=\tau_{12}$$

$$\tau_{3i}=A_{\alpha\alpha}e_{3i}+A_{\alpha\beta}e_{3j}, \quad i=1, 2, \quad \alpha=4+i, \quad j=3-i \tag{1.2}$$

причем

$$e_{ii}=\frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad e_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (i, j=1, 2, 3) \tag{1.3}$$

где u_i — смещения: $u_1=u$, $u_2=v$, $u_3=w$, $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$.

---

* П. М. Риз подобную задачу не рассматривал.

Обратные формулы представятся так:

$$e_{jj}=E^{-1}\sum_{i}\sigma_{ji}\tau_{ii},\quad i,j=1,2,3,4,\quad e_{44}=e_{12}$$

$$e_{3i}=\mu_{3i}^{-1}(\tau_{3i}-\nu_{i}\tau_{3j}),\quad i=1,2,\quad \mu_{3i}=A_{\alpha\alpha}-\nu_{i}A_{3\alpha},\quad \mu_{31}\nu_{2}=\mu_{32}\nu_{1}\qquad(1.4)$$

$$\nu_{i}=A_{\alpha\alpha}^{-1}A_{3\alpha},\quad \alpha=4-i,\quad j=3-i$$

В формулах (1.4), как и в нижеприведенных (1.5), σ с одинаковыми индексами следует приписывать знак плюс, а с различными — минус.

Между A_{ij}, E и σ_{ij} имеют место зависимости

$$\sum_{i}A_{ij}\sigma_{ij}=E,\quad i,j=1,2,3,4,\quad \sum_{i}A_{2i}\sigma_{ij}=0,\quad j=1,3,4$$

$$\sum_{i}A_{1i}\sigma_{ji}=0,\quad j=2,3,4,\quad \sum_{i}A_{3i}\sigma_{ij}=0,\quad j=1,2,4,\qquad(1.5)$$

$$\sum_{i}A_{4i}\sigma_{ji}=0,\quad j=1,2,3$$

при этом $\sigma_{44}=1$, $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$, $\sigma_{3i}=\nu_{i}$, $\sigma_{43}=\sigma_{3}$.

Искомые компоненты напряжений τ_{ij} должны удовлетворять уравнениям упругого равновесия в области V, занятой брусом

$$\sum_{j}\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_{j}}=0,\qquad i,j=1,2,3\qquad(1.6)$$

граничным условиям на боковой поверхности

$$\sum_{j}\tau_{ij}\cos(n,x_{j})=0,\quad i,j=1,2,3\qquad(1.7)$$

где n—нормаль к боковой поверхности (внешняя по отношению к области V).

На верхнем основании $z=l$ усилия должны приводиться к заданным внешним силовым факторам.

2. *Некоторые формулы преобразования.* Введем новую систему координат [1]

$$\xi=x+k\frac{z^{2}}{2},\quad \eta=y,\quad \zeta=z\qquad(2.1)$$

тогда рассматриваемый слегка изогнутый брус в пространстве ξ, η, ζ перейдет в призматический, ограниченный боковой поверхностью $f(\xi,\eta)=0$, с основаниями — нижним $\zeta=0$ и верхним $\zeta=l$.

В формулах (2.1) „k" — настолько малый параметр, что во всех последующих вычислениях членами с множителем „k" во второй и выше степени пренебрегаем.

Обозначим поперечное сечение бруса в пространстве ξ, η, ζ через S, а его контур — через L.

Зависимость между частными производными, а также между направляющими косинусами при переходе из пространства x, y, z в пространство ξ, η, ζ, с указанной выше точностью, представится так:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial \xi_i}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \zeta} + k\eta \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad i = 1, 2 \tag{2.2}$$

$$\cos(n, x_i) = \cos(n, \xi_i), \quad \cos(n, z) = k\eta \cos(n, \xi) \tag{2.3}$$

при этом как здесь, так и в дальнейшем $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \eta$, $\xi_3 = \zeta$.

3. *Задача изгиба парой сил.* Положим, что все заданные силы, приложенные к верхнему основанию, приводятся к паре сил с моментом M, расположенной в плоскости yOz. Решение задачи в пространстве ξ, η, ζ в смещениях ищем в виде [5]

$$u = \beta f_1 + \beta k u', \quad v = \beta\left(f_2 + \frac{1}{2}\zeta^2\right) + k\beta v', \quad w = -\beta\eta\zeta + \beta k w' \tag{3.1}$$

причем

$$f_1 = \alpha_2 \xi\eta + \frac{1}{2}\alpha_4 \eta^2, \quad f_2 = \frac{1}{2}(\alpha_2 \eta^2 - \alpha_1 \xi^2) \tag{3.2}$$

u', v', w' — неизвестные смещения, $\beta = M J_{11}^{-1}$; $J_{11} = E J_\xi$ — жесткость бруса при изгибе в пространстве ξ, η, ζ относительно оси $O\xi$.

Вычислив компоненты деформаций, соответствующие смещениям (3.1), используя формулы преобразования (2.2), в соответствии с формулами (1.2) получим

$$\tau_{ij} = \beta k \tau_{ij}^{(0)}, \quad i, j = 1, 2, \quad \tau_{33} = -\beta E\eta + \beta k \tau_{33}^{(0)}, \quad \tau_{3i} = \beta k(\alpha_1 A_i^{*} + \tau_{3i}^{(0)}) \tag{3.3}$$

$$A_i^{*} = A_{s5}\eta - A_{s4}\xi, \quad s = 4 + i$$

где $\tau_{ij}^{(0)}$ — напряжения, соответствующие смещениям* u', v', w'.

Уравнения равновесия (1.6) и граничные условия (1.7), с указанной выше точностью, представятся так:

$$\sum_j \frac{\partial \tau_{ij}^{(0)}}{\partial \xi_j} + A_i^{*}\alpha_1 = 0, \qquad \sum_j \frac{\partial \tau_{3j}^{(0)}}{\partial \xi_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{3.4}$$

в области V, занятой брусом;

$$\sum_j \tau_{ij}^{(0)} \cos(n, \xi_j) = 0, \quad \sum_i \tau_{3i}^{(0)} \cos(n, \xi_i) + \zeta\left[\alpha_1 \sum_i A_i^{*} \cos(n, \xi_i) - E\eta \cos(n, \xi)\right] = 0 \tag{3.5}$$

на контуре L сечения S.

Задачу определения неизвестных напряжений $\tau_{ij}^{(0)}$, удовлетворяющих уравнениям равновесия (3.4) и граничным условиям (3.5), решим полуобратным методом Сен-Венана. Примем

$$\tau_{ii}^{(0)} = -c^{(0)}\tau_{ii}^{(1)} + \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial \xi_j^2}, \quad \tau_{12}^{(0)} = -\frac{1}{2} E\eta^2 + c^{(0)}\tau_{12}^{(1)} - \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial \xi \partial \eta} \tag{3.6}$$

$$\tau_{33}^{(0)} = \alpha^{(0)} E + E_{33}^{(0)} + E \sum_i \beta_i^{(0)} \xi_i, \quad \tau_{3i}^{(0)} = \zeta\left[c^{(0)}\tau_{3i}^{(1)} + (2 - i) E\eta - \alpha_1 A_i^{*}\right]$$

* Термины «напряжение» и «смещение» здесь применяются условно. В действительности, напряжениями и смещениями будут соответствующие величины, умноженные на βk.

где

$$L_{33}^{(0)}=c^{(0)}\sum_{i}\beta_i\tau_{ii}^{(i)}+\beta_6\left(\tau_{12}^{(i)}-\frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial\xi\partial\eta}\right)$$

$$\tau_{ii}^{(i)}=A_{55}\varphi-\frac{1}{2}\varkappa A_{66}\xi_i,\quad \tau_{12}^{(i)}=\frac{1}{2}\left(A_{55}\eta^2-A_{66}\xi^2\right)-A_{56}\varphi$$

$$\tau_{3}^{(i)}=\sum_{i}A_{5i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i}-\varkappa\xi_j\right),\quad i=1,2,\quad j=3-i,\quad \varkappa=(-1)^i \tag{3.7}$$

φ — известная функция кручения [5].

Непосредственной подстановкой $\tau_{ij}^{(i)}$ убеждаемся, что уравнения равновесия (3.4) удовлетворяются.

Из граничных условий (3.5) получим

$$\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial\xi_i}=\varkappa\int\left[\frac{1}{2}E\eta_j^2\cos(n,\xi_i)+c^{(0)}T_i^{(i)}\right]ds \tag{3.8}$$

на контуре L, $i=1,2$, $j=3-i$, где

$$T_i^{(i)}=\tau_{ii}^{(i)}\cos(n,\xi_i)+\tau_{12}^{(i)}\cos(n,\xi_j) \tag{3.9}$$

Компоненты деформаций, соответствующие напряжениям (3.6), удовлетворяют условиям совместности Сен-Венана [3] при

$$L\Phi^{(0)}=-EI^{*}+\beta_{11} \tag{3.10}$$

причем

$$L^{(1)}=\sum_{i}\left(\beta_{ii}\frac{\partial^4}{\partial\xi_i^4}+2\beta_{i1}\frac{\partial^4}{\partial\xi_i\partial\xi_j^3}\right)+(\beta_{44}-2\beta_{12})\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\eta^2}$$

$$I^{*}=c^{(0)}\left[\sum_{i}\frac{\partial^2}{\partial\xi_j^2}\left(\tau_{ii}^{(i)}-\beta_i\varphi\right)+\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\left(\tau_{12}^{(i)}+\beta_4\varphi\right)\right] \tag{3.11}$$

В формулах (3.11) $\tau_{ii}^{(i)}=-\beta_{ii}\tau_{ii}^{(i)}+\beta_{12}\tau_{jj}^{(i)}+\beta_{i4}\tau_{12}^{(i)}$, $\tau_{12}^{(i)}=\sum_{i}\beta_{i4}\tau_{ii}^{(i)}-\beta_{44}\tau_{12}^{(i)}$

$$\beta_{ii}=a_{ii}-\beta_i^2,\quad \beta_{ij}=a_{ij}+\beta_i\beta_j,\quad i=1,2,\quad j=3-i \tag{3.12}$$

Итак, рассматриваемая задача приведена к бигармонической задаче в области S поперечного сечения бруса в пространстве ξ, η, ζ. Разрешимость ее обеспечена [3]: $\dfrac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial\xi_i}$ $(i=1,2)$ однозначны при обходе контура L. Однозначна также $\Phi^{(0)}$ при обходе того же контура при

$$c^{(0)}=J_{33}D^{-1},\quad D=\iint_S\left[A_{66}\xi(\varphi_{,\eta}+\xi)-A_{55}\eta(\varphi_{,\xi}-\eta)+A_{56}(\xi\varphi_{,\xi}-\eta\varphi_{,\eta})\right]d\xi d\eta$$

где D — жесткость бруса при кручении.

На основании $z=l$ усилия приводятся к заданной паре сил с моментом M при $\alpha^{(0)}=(ES)^{-1}\iint_S E_{33}^{(0)}d\xi d\eta$, $\beta_i^{(0)}=-(ES)^{-1}\iint_S E_{33}^{(0)}\xi_i d\xi d\eta$, $i=1,2$, $j=3-i$

4. *Задача изгиба поперечной силой.* Положим на основании $z=l$ все заданные силы приводятся к силе W, параллельной оси Oy. Если воспользоваться заменой координат в соответствии с (2.1), то получим брус, ограниченный цилиндрической поверхностью и изгибаемый силой W, параллельной оси $O\eta$.

Зададимся решением рассматриваемой задачи в смещениях в виде [5]

$$u=\gamma[(l-\zeta)f_1+ku']-\tau\eta\zeta,\quad v=\gamma\left[(l-\zeta)f_2-\frac{1}{2}\left(l\zeta^2-\frac{1}{3}\zeta^3\right)+kv'\right]+\tau\xi\zeta$$

$$w=\gamma\left[\psi-\left(l\zeta-\frac{1}{2}\zeta^2\right)+kw'\right]+\tau\varphi \tag{4.1}$$

где f_1, f_2 даны формулами (3.2)

$$\psi=\chi-\xi^2\eta,\quad \gamma=J_{11}^{-1}W,\quad \tau=\gamma D^{-1}\iint_S(\eta\tau_{31}^{(0)}-\xi\tau_{32}^{(0)})d\xi d\eta$$

φ и χ — известные функции, соответственно кручения и изгиба [5]. Значения J_{11} и D приведены выше, $\tau_{3i}^{(0)}$ — формулами (4.3).

Повторяя вышеиспользованную последовательность вычислений, получим

$$\tau_{ii}=k\gamma(A_{3i}H\zeta+\tau'_{ii}),\quad \tau_{12}=k\gamma(A_{34}H\zeta+\tau'_{12}),\quad \tau_{33}=-\gamma E(l-\zeta)\eta+k\gamma(A_{33}H\zeta+\tau'_{33})$$

$$\tau_{3i}=\tau\tau_{3i}^{(\varphi)}+\gamma\tau_{3i}^{(0)}+k\gamma[\zeta(l-\zeta)A_i^*+\tau\gamma^{-1}A_{\kappa 6}\zeta^2+\tau'_{3i}] \tag{4.2}$$

где

$$H=\varphi_2+\tau\gamma^{-1}\varphi_2,\quad \tau_{3i}^{(0)}=A_{\kappa\kappa}\tau_{3i}^*+A_{56}\tau_{3j}^*,\quad \tau_{3i}^*=\frac{\partial\psi}{\partial\xi_i}-f_i \tag{4.3}$$

Уравнения равновесия, соответствующие напряжениям (4.2), представятся так:

$$\sum_j\frac{\partial\tau'_{ij}}{\partial\xi_j}+\zeta\left[(A_{3i}+A_{\kappa\kappa})\frac{\partial H}{\partial\xi_i}+(A_{33}+A_{\kappa 6})\frac{\partial H}{\partial\xi_j}\right]+(l-3\zeta)\tau_1A_i^*+3\tau\gamma^{-1}A_{6\kappa}\zeta=0$$

$$\sum_j\frac{\partial\tau'_{3j}}{\partial\xi_j}+A_{33}H=0 \tag{4.4}$$

в области V, занятой брусом; граничные условия

$$\sum_j\tau'_{ij}\cos(n,\xi_j)+\zeta\{[A_{3i}(2-i)+A_{33}(i-1)]H+\tau_{3i}^{(0)}+\tau\gamma^{-1}\tau_{3i}^{(\varphi)}\}\cos(n,\xi)+$$
$$+(2-i)A_{13}H\cos(n,\eta)=0$$

$$\sum_j\tau'_{3j}\cos(n,\xi_j)+\zeta(l-\zeta)\left[\sum_j A_j^*\cos(n,\xi_j)-E\eta\cos(n,\xi)\right]+\tau\gamma^{-1}\zeta^2\sum_j A_{j\kappa}=0 \tag{4.5}$$

на контуре L сечения S: $i, j=1, 2,\ x=4+i$.

Итак, задача свелась к определению шести компонентов напряжений τ'_{ij}, удовлетворяющих уравнениям равновесия (4.4), граничным условиям (4.5), а компоненты деформаций, соответствующие τ'_{ij}, — шести условиям совместности Сен-Венана.

Как и предыдущую, задачу решаем полуобратным методом, при этом с целью максимального упрощения воспользуемся решением задачи изгиба парой. Итак, примем

$$\tau_{ii}=\tau\left(\tau^{(1)}_{ii}+\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial\xi_j^2}\right)+t\tau^{(0)}_{ii},\quad \tau_{12}=\tau\left(\tau^{(1)}_{12}-\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial\xi\partial\eta}\right)+\tau E\eta^2+t\tau^{(0)}_{12},\quad i=1,2$$

$$\tau_{33}=\tau(T_{33}-\tau^*_{33}-aE)+t\left(\tau^{(0)}_{33}+\frac{1}{2}\tau^*_{33}\right)+E\left(\tau^*+\sum_i\beta_i\xi_i\right) \qquad (4.6)$$

$$\tau_{3i}=\tau^2[\alpha_i A^*_i-(2-i)E\eta]+U_{3i}+L^{(2)}_i\omega-\tau\eta^{-1}A_{0i}\xi^2+t\tau^{(0)}_{3i}+\frac{1}{2}aE\xi_i+\frac{1}{2}c^{(1)}\tau^2\tau^{(c)}_{3i}$$

где

$$\tau^{(1)}_{11}=A_{55}f_1+A_{56}f_2-(A_{13}+A_{55})H+\tau_1^{-1}A^*_1-c^{(1)}\tau^{(c)}_{11}$$

$$\tau^{(1)}_{22}=\frac{1}{2}A_{56}\alpha_1\eta^2-A_{66}\alpha_1\xi\eta-\tau_1^{-1}A_{66}\eta-(A_{23}+A_{66})H-c^{(1)}\tau^{(c)}_{22}$$

$$\tau^{(1)}_{12}=-(A_{63}+A_{56})H+c^{(1)}\tau^{(c)}_{12},\quad \tau^*_{33}=(\alpha_{13}^{-1}E+2\alpha_4)\xi\eta-\alpha_{13}\alpha_{23}^{-1}E^2\eta^2$$

$$T_{33}=\sum_i\alpha_i\left(\tau^{(1)}_{ii}+\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial\xi_j^2}\right)+\alpha_4\left(\tau^{(1)}_{12}-\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial\xi\partial\eta}\right)$$

причем

$$U_{3i}=A_{i4}U_1+A_{i5}U_2,\quad L^{(2)}_i=A_{i4}\frac{\partial}{\partial\xi_i}+A_{5i}\frac{\partial}{\partial\xi_j}$$

$$(4.7)$$

$$U_i=\int\left[P_i d\xi_i+d\xi_i\int\left[\frac{\partial P_i}{\partial\xi_j}d\xi_i+\left(\frac{\partial X_y}{\partial\xi_i}-\frac{\partial P_j}{\partial\xi_i}\right)d\xi_j\right]\right],\quad i=1,2,\quad j=3-i$$

$$P_i=E^{-1}\left(P^{(0)}_{ii}+\alpha_{ii}\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial\xi_j^2}-\alpha_{ij}\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial\xi_i^2}-\alpha_{i4}\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial\xi\partial\eta}\right)$$

$$X_y=E^{-1}\left(X^{(0)}_y-\alpha_{44}\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial\xi\partial\eta}-\sum_i\alpha_{i4}\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial\xi_j^2}\right)$$

Значения $\tau^{(0)}_{ij}$ даны формулами (3.6), α_{ij} –формулами (3.12); в формулах (4.7)

$$P^{(0)}_{ii}=\alpha_i\tau^*_{33}+\alpha_{ii}\tau^{(1)}_{ii}-\alpha_{ij}\tau^{(1)}_{jj}-\alpha_{i4}\tau^{(1)}_{12},\quad X^{(0)}_y=\alpha_4\tau^*_{33}+\alpha_{44}\tau^{(1)}_{12}-\sum_i\alpha_{i4}\tau^{(1)}_{ii}$$

Непосредственной подстановкой τ_{kj} убеждаемся, что первое и второе уравнения равновесия (4.4) удовлетворяются. Из третьего получим

$$\sum_i\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(L^{(2)}_i\omega\right)=\tau^*_{33}-T_{33}-A_{33}H-\sum_i\frac{\partial U_{3i}}{\partial\xi_i},\quad i=1,2 \text{ в области } S \qquad (4.8)$$

Условия совместности Сен-Венана [3] будут удовлетворены, если примем

$$L^{(1)}\Phi^{(1)}=-\sum_i\frac{\partial^2 P^{(0)}_{ii}}{\partial\xi_j^2}+\frac{\partial^2 X^{(0)}_y}{\partial\xi\partial\eta},\quad i=1,2,\quad j=3-i \text{ в области } S, \qquad (4.9)$$

значение $L^{(1)}$ дано формулой (3.11).

Подставляя τ_{ij} в граничные условия (4.5), получим

$$\sum_i (L_i^{(2)}\omega)\cos(n,\xi_i)=\sum_i\left(U_{3i}+\frac{1}{2}aE\xi_i\right)\cos(n,\xi_i) \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\xi}=\int\left\{\left[E\eta^2+A_{44}(\varphi_\xi-f_2)-A_{45}f_1+\tau_1\gamma^{-1}A_{44}(\varphi_\eta+\xi)-\tau_1\gamma^{-1}A_{34}\eta\right]\cos(n,\xi)+\right.$$

$$\left.+\left[\tau\gamma^{-1}A_{55}(\varphi_\xi-\xi)-A_{44}(\varphi_\eta+\tau_1\xi\eta)+\frac{1}{2}A_{34}\tau_1\eta^2\right]\cos(n,\eta)-c^{(1)}T_2^{(1)}\right\}ds \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\eta}=\int\left[-A_{55}(\varphi_\xi+\tau\gamma^{-1}\varphi_\eta)\cos(n,\xi)+A_{34}(H-E\eta^2)\cos(n,\eta)+c^{(1)}T_1^{(1)}\right]ds$$

на контуре L сечения S; значения $T_i^{(1)}$ приведены выше.

Итак, рассматриваемая задача в пространстве ξ,η,ζ свелась к двум плоским граничным задачам теории упругости в области S: гармонической—определению ω, и бигармонической—определению $\Phi^{(1)}$. Первая определяется условиями (4.8) и (4.10), вторая—условиями (4.9) и (4.11).

Разрешимость гармонической задачи обеспечена при $a=-(ES)^{-1}\iint_S(\tau_{33}^*-T_{33}-A_{33}H)d\xi d\eta$

Что касается бигармонической, то как показывает проверка, $\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\xi_i}$, а также сама функция $\Phi^{(1)}$ однозначны при обходе контура L сечения S при $c^{(1)}=J_{11}D^{-1}$.

Усилия на основании $z=l$ приводятся к заданной силе W. При этом

$$\alpha^*=-\frac{1}{2}E\rho_{33}^{-1}J_{11}\cdot S$$

$$\beta_i^{(1)}=-(ES)^{-1}l\iint_S\left(A_{3i}H+T_{3i}-\frac{1}{2}\tau_{3i}^*\right)\xi_j d\xi d\eta,\quad i=1,2,\quad j=3-i$$

Используя известные приемы, легко вычислить смещения u', v', w', соответствующие τ_{ij}' (зависимость между τ_{ij}' и e_{ij}' линейная, причем

$$e_{ii}'=\frac{\partial u_i'}{\partial\xi_i},\quad e_{ij}'=\frac{\partial u_i'}{\partial\xi_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial\xi_i},\quad i,j=1,2)$$

Полную систему напряжений в пространстве ξ,η,ζ получим, если значения τ_{ij}' по формулам (4.6) подставим в формулы (4.2).

5. *Заключение.* Рассмотренные задачи изгиба парой сил и изгиба силой слегка изогнутого бруса в плоскости, перпендикулярной плоскости кривизны оси бруса, приводятся к плоским граничным задачам теории упругости в плоскости поперечного сечения бруса: первая к бигармонической, вторая—к гармонической и бигармонической.

Даны значения всех шести компонентов напряжений. Как и следовало ожидать, в рассматриваемых случаях имеет место закручивание бруса (члены с множителем $\varepsilon^{(1)}$). Гипотеза отсутствия надавливания продольных волокон друг на друга не имеет места (наличие напряжений τ_{ij}, $i, j=1, 2$).

ԹԵԹԵՎԱԿԻ ԿՈՐԱՑԱԾ ՀԱՄԱՍԵՌ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՁՈՂԻ ԾՌՈՒՄԸ

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Ամփոփում

Տրված է թեթևակի կորացված համասեռ անիզոտրոպ ձողի ծռման խնդրի լուծումը ձողի առանցքի կորության հարթությանը ուղղահայաց հարթության մեջ։

Սեն-Վենանի կիսահակադարձ եղանակի օգտագործումով խնդրի լուծումը բերվել է բիհարմոնիկ և հարմոնիկ ֆունկցիաների որոշմանը։

ON BENDING OF A HOMOGENEOUS ANISOTROPIC SLIGHTLY BENT BEAM

R. S. MINASIAN

Summary

The solution to a problem for the bending of a homogeneous anisotropic beam is obtained by means of the Sen-Venan method where the axis of the beam is a plane curve of a second order.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Риз П. М.* Деформации стержня со слабо изогнутой осью.—ДАН СССР, 1939, т. 24, вып. 2.
2. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977, с. 22—32, 87—88, 317—320.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Издание пятое. М.—Л.: Наука, 1966, с. 51—61, 106—115, 513—517.
4. *Минасян Р. С.* К решению задачи об упругом равновесии составного цилиндрического бруса. Уч. записки АзИНЕФТЕХИМ, 1972, № 6.
5. *Ляв А.* Математическая теория упругости. Перевод с четвертого английского издания, М.—Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935, с. 170—175, 315—361.

Азербайджанский институт нефти
и химии им. М. Азизбекова

Поступила в редакцию
30.IX.1982