

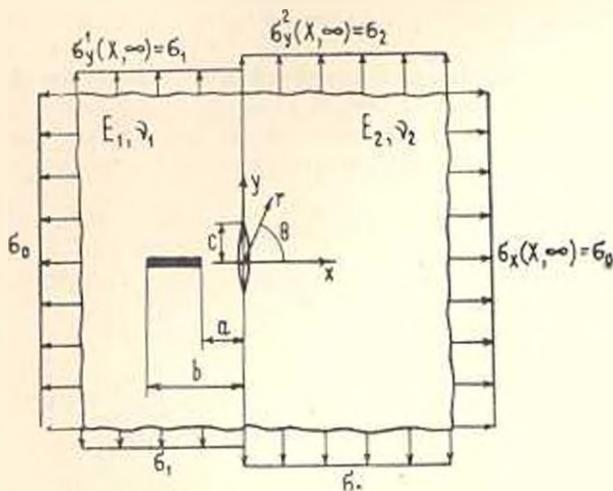
УДК 539.3 : 534.1

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТОНКОГО УПРУГОГО ВКЛЮЧЕНИЯ  
 С ТРЕЩИНОЙ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

ГРИЦИКИП Д. В., ЕВТУШЕНКО А. А.

Решена задача линейной теории упругости для двух спаянных разнородных полуплоскостей с трещиной на прямой линии раздела материалов и перпендикулярно ей расположенным тонким упругим включением. Путем использования интегрального преобразования Меллина получена разрешающая система сингулярных интегральных уравнений относительно функций скачка напряжений и перемещений на берегах включения и трещины. Численные результаты представлены для коэффициентов интенсивности напряжений на торцах включения.

1. Рассмотрим кусочно-однородную пластину, содержащую трещину и упругое включение (фиг. 1). Трещина занимает отрезок  $[-c, c]$  оси  $x=0$ , а включение расположено вдоль оси симметрии внутри одной



Фиг. 1

из полуплоскостей и имеет длину  $2a_0 = b - a$ , ширину  $2h_0$ . К пластине приложены растягивающие усилия  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  на бесконечности. При этом должно выполняться соотношение

$$(1 + \nu_1)\mu_2\sigma_1 = (1 + \nu_2)\mu_1\sigma_2 - [(3 - \nu_2)\mu_1 - (3 - \nu_1)\mu_2]\sigma_0$$

$$\nu_1 = \begin{cases} 3 - 4\nu_1 & \text{— для плоской деформации;} \\ (3 - \nu_1)/(1 + \nu_1) & \text{— для обобщенного плоского напряженного состояния.} \end{cases}$$

ния;  $\nu_j = E_j / [2(1 + \nu_j)]$ ,  $E_j$ ,  $\nu_j$  — соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала матрицы ( $j = 1, 2$ ) и включения ( $j = 0$ ). Для элементов упругих полей примем следующие обозначения:  $\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}$  — компоненты напряжений,  $u_r, u_\theta$  — составляющие вектора смещений пластины, записанные в полярной системе координат  $(r, \theta)$  с началом в центре разреза;  $N(r)$  — нормальное усилие в сечении включения.

Граничные условия задачи

$$\begin{aligned} \tau_{2\theta}(r, 0) = u_{2\theta}(r, 0) = 0, \quad 0 < r < \infty \\ \tau_{1\theta}(r, \pi) = -\frac{1}{2} f_1(r), \quad \frac{\partial u_{1\theta}(r, \pi)}{\partial r} = -\frac{1}{2} f_2(r), \quad a < r < b \\ \tau_{1\theta}(r, \pi/2) = \tau_{2\theta}(r, \pi/2), \quad \tau_{1r}(r, \pi/2) = \tau_{2r}(r, \pi/2), \quad -c < r < c \\ \frac{\partial}{\partial r} [u_{1r}(r, \pi/2) - u_{2r}(r, \pi/2)] = -g_1(r), \quad -c < r < c \\ \frac{\partial}{\partial r} [u_{1\theta}(r, \pi/2) - u_{2\theta}(r, \pi/2)] = -g_2(r), \quad -c < r < c \end{aligned} \quad (1.1)$$

Взаимодействие включения с матрицей при условии идеального их механического контакта и равенстве поперечных деформаций кромок прослойки описывают соотношения [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{1r}(r, \pi)}{\partial r} &= \frac{(1 + \nu_0)}{8\nu_0} N(r) - \frac{(3 - \nu_0)}{8\nu_0} \tau_{1\theta}(r, \pi) \\ \frac{u_{1\theta}(r, \pi)}{h_0} &= \frac{(2 + \nu_0)}{8\nu_0} \tau_{1\theta}(r, \pi) - \frac{(3 - \nu_0)}{8\nu_0} N(r) \\ N(r) &= N(b) + \frac{1}{h_0} \int_a^b \tau_{1r}(s, \pi) ds - \frac{1}{h_0} \int_a^r \tau_{1r}(s, \pi) ds, \quad a < r < b \end{aligned} \quad (1.2)$$

Согласно [2] трансформанты Меллина напряжений и перемещений имеют вид

$$\begin{aligned} M[r^2 \tau_j(r, \theta), s] &= 2i(s+1) [A_j s \exp(isb) + B_j (s+1) \exp(i(s+2)\theta) - \\ &\quad - B_j \exp(-i(s+2)\theta)] \\ M[r^2 u_j(r, \theta), s] &= -\frac{(s+1)}{i} [A_j s \exp(isb) + B_j (s+1) \exp(i(s+2)\theta) + \\ &\quad + \alpha_j B_j \exp(-i(s+2)\theta)] \\ \sigma_j(r, \theta) &= \tau_{j1}(r, \theta) + i \tau_{j2}(r, \theta), \quad u_j(r, \theta) = \frac{\partial u_{1j}(r, \theta)}{\partial r} + \frac{\partial u_{2j}(r, \theta)}{\partial r} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$A_j, B_j$  ( $j = 1, 2$ ) — комплексные функции параметра преобразования  $s$ . Введем обозначения

$$A_1 = C_1 + iC_2, \quad B_1 = C_3 + iC_4, \quad A_2 = C_5 + iC_6, \quad B_2 = C_7 + iC_8$$

Подставляя выражения (1.3) в граничные условия (1.1), записанные в пространстве изображений интегрального преобразования Меллина, приходим к системе восьми линейных алгебраических уравнений

$$sC_6 + (s+2)C_8 = 0, \quad sC_4 + (s+1-z_2)C_8 = 0$$

$$s \sin \theta_2 C_1 + s \cos \theta_2 C_2 + (s+2) \sin \theta_2 C_3 + (s+2) \cos \theta_2 C_4 = \frac{F_2(s)}{4(s+1)}$$

$$s \sin \theta_2 C_1 + s \cos \theta_2 C_2 + (s+1-z_1) \sin \theta_2 C_3 + (s+1-z_1) \cos \theta_2 C_4 = \frac{p_1 F_2(s)}{2(s+1)}$$

$$s \sin \theta_1 C_5 + s \cos \theta_1 C_6 - (s+2) \sin \theta_1 C_7 - (s+2) \cos \theta_1 C_8 - \\ - s \sin \theta_1 C_3 + (s+2) \sin \theta_1 C_4 = 0$$

$$s \cos \theta_1 C_5 - s \sin \theta_1 C_6 - s \cos \theta_1 C_7 + s \sin \theta_1 C_8 - s \cos \theta_1 C_3 + s \cos \theta_1 C_4 = 0$$

$$m[s \cos \theta_1 C_5 - s \sin \theta_1 C_6 - (s+1+z_1) \cos \theta_1 C_7 + (s+1+z_1) \sin \theta_1 C_8] =$$

$$- s \cos \theta_1 C_3 + (s+1+z_2) \cos \theta_1 C_4 = \frac{p_2 G_1(s)}{s+1}$$

$$m[s \sin \theta_1 C_5 + s \cos \theta_1 C_6 - (s+1-z_1) \sin \theta_1 C_7 - (s+1-z_1) \cos \theta_1 C_8] =$$

$$- s \sin \theta_1 C_3 + (s+1-z_2) \sin \theta_1 C_4 = \frac{p_2 G_2(s)}{s+1}$$

$$m = \mu_2/\mu_1, \quad \theta_j = j\pi s/2, \quad F_j(s) = \int_a^b f_j(r)r^{s-1}dr, \quad G_j(s) = \int_a^b g_j(r)r^{s-1}dr \quad (j=1,2)$$

Решение этой системы позволяет определить  $C_k$  ( $k=1, \dots, 8$ ) в зависимости от функций  $F_j(s)$ ,  $G_j(s)$  ( $j=1, 2$ )

$$C_6 = C_8 = 0$$

$$C_4 = -\frac{\cos \theta_2}{\sin \theta_2} C_2 = \frac{(s+1-z_1)F_1(s) - 2\mu_1(s+2)F_2(s)}{4s(s+1)(1+z_1)\sin \theta_2}$$

$$C_2 = \frac{p_2}{s(s+1)m_1 m_2} \{[(s+1)m_2 - m_1] \sin \theta_1 G_1(s) + [(s+1)m_2 + m_1] \cos \theta_1 G_2(s)\} -$$

$$-\frac{1}{4s(s+1)(1+z_1)} \{[m_3(s+1)(2s+2-z_1) + m_6] F_1(s) - \\ - 2\mu_1[m_3(s+1)(2s+3) + m_6] F_2(s)\}$$

$$C_2 = -\frac{\cos \theta_2}{\sin \theta_2} C_4 + \frac{F_1(s) - 2\mu_1 F_2(s)}{4(s+1)(1+z_1)\sin \theta_2}$$

$$C_6 = \frac{p_2}{(s+1)m_1} |\sin \theta_1 G_1(s) + \cos \theta_1 G_2(s)| -$$

$$\frac{m_2[(2s+2-z_1)F_1(s) - 2\mu_1(2s+3)F_2(s)]}{4(s+1)(1+z_1)}$$

$$C_5 = \frac{\mu_2}{s(s+1)m_1 m_2 \sin \theta_2} \{ |(s+1)m_1 - m_2| \sin \theta_1 G_1(s) - |(s+1)m_1 + m_2| \cos \theta_1 G_2(s) \} -$$

$$- \frac{m}{4s(s+1) \sin \theta_2} \left| \left| \frac{2s+2-x_1}{m_1} - \frac{s+1}{m_2} \right| F_1(s) + 2\mu_1 \left| \frac{2s+3}{m_1} - \frac{s+1}{m_2} \right| F_2(s) \right\}$$

$$C_7 = \frac{\mu_2}{(s+1)m_2 \sin \theta_2} |\sin \theta_1 G_1(s) - \cos \theta_1 G_2(s)| + \frac{m |F_1(s) - 2\mu_1 F_2(s)|}{4(s+1)m_2 \sin \theta_2}$$

$$m_1 = 1 + m x_1, \quad m_2 = m + x_2, \quad m_3 = 1 - m, \quad m_4 = m x_1 - x_2, \quad m_5 = m_2/m_1, \quad m_6 = m_2/m_2 \quad (1.4)$$

Подставляя значения  $G_k(s)$  ( $k=1, \dots, 8$ ) (1.4) в соотношения (1.3), находим на линиях  $\theta = -\pi/2$  и  $\theta = \pi$

$$M |r^2 z_1(r, -\pi/2), s| = \gamma_1 \{ \operatorname{tg} \theta_1 G_1(s) - i \operatorname{ctg} \theta_1 G_2(s) + \gamma_2 |G_2(s) - i G_1(s)| \} +$$

$$+ |4(1+x_1) \cos \theta_1|^{-1} \{ |2s+3-x_1-m_5(2s+2-x_1)+m_6| F_1(s) - 2\mu_1 [2(s+2) -$$

$$- m_5(2s+3) + m_6] F_2(s) \} - i \{ 4(1+x_1) \sin \theta_1 \}^{-1} \{ |2s+1-x_1-m_5(2s+2-x_1) -$$

$$- m_6| F_1(s) - 2\mu_1 [2(s+1) - m_5(2s+3) - m_6] F_2(s) \}$$

$$M |r^2 z_{1,6}(r, \pi), s| = \mu_2 (m_1 m_2)^{-1} \{ (2s+1)m_2 - m_1 |(\cos \theta_1)^{-1} G_1(s) - |(2s+$$

$$+ 1)m_2 + m_1 |(\sin \theta_1)^{-1} G_2(s) \} + 0,5(1+x_1)^{-1} \{ (x_1-1) \operatorname{ctg} \theta_2 + [m_5(2s+1)(2s+$$

$$+ 2-x_1) + m_6] (\sin \theta_2)^{-1} |F_1(s) + 2\mu_1| 2 \operatorname{ctg} \theta_2 - [m_5(2s+$$

$$+ 1)(2s+3) + m_6] (\sin \theta_2)^{-1} |F_2(s) \}$$

$$M \left| r^2 \frac{\partial u_{1r}(r, -)}{\partial r}, s \right| = m(2m_1 m_2)^{-1} \{ (2s+x_1+2)m_2 - m_1 |(\cos \theta_1)^{-1} G_1(s) +$$

$$+ |(2s+2+x_1)m_2 + m_1 |(\sin \theta_1)^{-1} G_2(s) \} - |4\mu_1(1+x_1)|^{-1} \{ |2x_1 \operatorname{ctg} \theta_2 +$$

$$+ |m_5(2s+2-x_1) \times (2s+2+x_1) + m_6| (\sin \theta_2)^{-1} |F_1(s) - 2\mu_1 [(x_1-1) \operatorname{ctg} \theta_2 +$$

$$+ |m_5(2s+x_1+2)(2s+3) + m_6] \times (\sin \theta_2)^{-1} |F_2(s) \}$$

$$\gamma_1 = \mu_2 \frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1}, \quad \gamma_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \quad (1.5)$$

Применяя к выражениям (1.5) формулы обращения интегрального преобразования Меллина [3] и используя при этом некоторые табличные интегралы [4], получаем

$$z_{1,6}(r, -\pi/2) - i z_{1,6}(r, \pi/2) = \gamma_1 \left\{ -\frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{g_1(\xi) + i g_2(\xi)}{\xi - r} d\xi + \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{g_1(\xi) - i g_2(\xi)}{\xi + r} d\xi - \right.$$

$$- \gamma_2 |g_1(r) + i g_2(r)| - \frac{1}{2(1+x_1)\pi} \int_0^{\infty} f_1(\gamma) \left\{ \gamma \left[ |4(3+x_1)\gamma^2 - (1-x_1)r^2 - m_5| (2+$$

$$+ x_1)\gamma^2 - (2-x_1)r^2 \right] \frac{1}{\gamma^2 + r^2} + m_6 \right\} + i r \left\{ |(3-x_1)\gamma^2 - (1-x_1)r^2 - m_5| (1+x_1)\gamma^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + x_1 r^2 \left| \frac{1}{\gamma^2 + r^2} - m_6 \right| \left| \frac{d\gamma}{\gamma^2 + r^2} + \frac{\mu_1}{(1+x_1)\pi} \int_a^b f_1(\gamma) \left\{ \gamma \left[ 2(\gamma^2 - r^2) - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - m_3(\gamma^2 - 3r^2) \right] \frac{1}{\gamma^2 + r^2} + m_6 \right\} + ir \left[ 2(\gamma^2 - r^2) - m_3(3\gamma^2 - r^2) \right] \frac{1}{\gamma^2 + r^2} - m_6 \right| \left| \frac{d\gamma}{\gamma^2 + r^2} \right|
 \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{115}(s, \pi) &= \frac{1}{2(1+x_1)\pi} \int_a^b f_1(\gamma) \left\{ \frac{x_1 - 1}{\gamma + s} + m_3 \left[ \frac{4(s^2 + 3\gamma s + 4\gamma^2)}{(\gamma + s)^2} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{2(3-x_1)(2\gamma + s)}{(\gamma + s)^2} \right] + \frac{[(2-x_1)m_3 + m_6]}{\gamma + s} \right\} d\gamma + \frac{2\mu_1}{(1+x_1)\pi} \int_a^b f_2(\gamma) \left\{ \frac{1}{\gamma - s} - \right. \\
 & \left. - m_3 \left[ \frac{4s^2}{(\gamma + s)^3} - \frac{6s}{(\gamma + s)^2} \right] - \frac{(3m_3 + m_6)}{2(\gamma + s)} \right\} d\gamma - \frac{2\mu_1}{m_1 m_2 \pi} \left\{ \int_0^{\xi} g_1(\xi) \xi \left[ m_1 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + m_2 \frac{5\xi^2 + s^2}{\xi^2 + s^2} \right] \frac{d\xi}{\xi^2 + s^2} - \int_0^{\eta} g_2(\xi) \xi \left[ m_1 - m_2 \frac{3\xi^2 - s^2}{\xi^2 + s^2} \right] \frac{d\xi}{\xi^2 + s^2} \right\} \\
 \frac{\partial u_{1r}(s, \pi)}{\partial s} &= \frac{1}{2\mu_1(1+x_1)\pi} \int_a^b f_1(\gamma) \left\{ \frac{x_1}{\gamma - s} + m_3 \left[ \frac{4s^2}{(\gamma + s)^3} - \frac{6s}{(\gamma + s)^2} \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{(4-x_1^2)m_3 + m_6}{2(\gamma + s)} \right\} d\gamma + \frac{1}{2(1+x_1)\pi} \int_a^b f_2(\gamma) \left\{ \frac{x_1 - 1}{\gamma - s} + m_3 \left[ \frac{4(s^2 + 3\gamma s + 4\gamma^2)}{(\gamma + s)^2} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{2(5-x_1)(2\gamma + s)}{(\gamma + s)^2} \right] + \frac{3(2-x_1)m_3 + m_6}{\gamma + s} \right\} d\gamma + \frac{m}{m_1 m_2 \pi} \left\{ \int_0^{\xi} g_1(\xi) \xi \left[ m_1 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{m_2(4-x_1^2)\xi^2 - x_1 s^2}{\xi^2 + s^2} \right] \frac{d\xi}{\xi^2 + s^2} + \int_0^{\eta} g_2(\xi) \xi \left[ -m_1 + m_2 \frac{(2-x_1)\xi^2 - (2+x_1)s^2}{\xi^2 + s^2} \right] \frac{d\xi}{\xi^2 + s^2} \right\}
 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Соотношения (1.6), (1.7) имеют место при любых значениях  $r$ , в частности,

$$\tau_{1,4}(r, \pi/2) - i\tau_{100}(r, \pi/2) = \tau_{1,9}^0(r, \pi/2) - i\tau_{100}^0(r, \pi/2), \quad 0 < r < c \quad (1.8)$$

$$\tau_{1,40}(r, \pi) = \tau_{100}^0(r, \pi) + \tau_{100}^+(r, \pi), \quad \frac{\partial u_{1r}(r, \pi)}{\partial r} = \frac{\partial u_{100}^0(r, \pi)}{\partial r} + \frac{\partial u_{100}^+(r, \pi)}{\partial r} \quad a < r < b \quad (1.9)$$

$\sigma_{11}^0, \sigma_{33}^0, u_{1r}^0$  — напряжения и перемещения в теле при отсутствии включения и трещины, вызванные заданной внешней нагрузкой; звездочкой отмечены возмущенные величины, обусловленные наличием включения. Подставляя соотношения (1.6) в равенство (1.8), а (1.7) — в условия взаимодействия (1.2), с учетом представления (1.9) и формул

$$u_{11}(r, \pi) = u_{11}(b, \pi) + \frac{1}{2} \int_a^b f_2(s) ds - \frac{1}{2} \int_a^r f_2(s) ds$$

$$\int_a^r f_1(s) ds - \frac{1}{2} \int_a^b \operatorname{sign}(r-s) f_1(s) ds + \frac{1}{2} \int_a^b f_1(s) ds$$

$$\int_0^r g_1(t) \times [\text{четная функция по } t] dt = -\frac{i}{2} \int_{-c}^c [g_2(t) + i g_1(t)] [\text{четная функция по } t] dt$$

$$\int_0^c g_1(t) \times [\text{четная функция по } t] dt = \frac{1}{2} \int_{-c}^c t [g_2(t) + i g_1(t)] [\text{четная функция по } t] dt \quad (1.10)$$

приходим к системе трех сингулярных интегральных уравнений

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\Phi(t)}{t-y} dt - \gamma_2 \Phi(y) = \sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 I_j(t, y) \psi_j(t) dt = -\frac{1}{\gamma_1} [i \tau_{12}^0(y, \pi/2) - i \tau_{13}^0(y, \pi/2)]$$

$$-1 < y < 1$$

$$\sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 \left[ \frac{\lambda_{1j}}{\pi(t-x)} - Q_j(t, x) \right] \psi_j(t) dt - i_2 \int_{-1}^1 S(x-t) \psi_1(t) dt =$$

$$- \int_{-1}^1 H(t, x) \Phi(t) dt = P_1(x)$$

$$\sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 \left[ \frac{\lambda_{2j}}{\pi(t-x)} + Q_{1j}(t, x) + \lambda_1 S(x-t) \right] \psi_j(t) dt + \int_{-1}^1 H_1(t, x) \Phi(t) dt = P_2(x)$$

$$-1 < x < 1 \quad (1.11)$$

Здесь обозначено

$$Q_j(t, x) = Q_{1j}(t, x) + 8\nu_0 Q_{2j}(t, x) (3 - \nu_0)$$

$$H(t, x) = H_1(t, x) + 8\nu_0 H_2(t, x) / (3 - \nu_0), \quad S(x-t) = \operatorname{sign}(x-t) - \delta^*$$

$$I_1(t, y) = \frac{a^*}{2(1+\nu_1)\pi} \left[ \epsilon y \left| [(3+\nu_1)\gamma^2 - (1-\nu_1)c^2 y^2 - m_3[(4+\nu_1)\gamma^2 + \nu_1 c^2 y^2]] \right| \times \right.$$

$$\times \frac{1}{\gamma^2 + c^2 y^2} - m_4 \left| \frac{1}{\gamma^2 + c^2 y^2} + i\eta \right| \left[ (3+z_1)\gamma^2 - (1-z_1)c^2 y^2 - m_5 \left| (2+z_1)\gamma^2 - (2-z_1)c^2 y^2 \right| \frac{1}{\gamma^2 + c^2 y^2} + m_6 \left| \frac{1}{\gamma^2 + c^2 y^2} \right| \right]$$

$$I_2(t, y) = -\frac{a^2 \mu_1}{(1+z_1)\gamma_1 \pi} \left\{ cy \left[ 2(\gamma^2 - c^2 y^2) - m_5(3\gamma^2 - c^2 y^2) \right] \frac{1}{\gamma^2 + c^2 y^2} - m_6 \right\}$$

$$\times \frac{1}{\gamma^2 + c^2 y^2} + i\eta \left[ 2(\gamma^2 - c^2 y^2) - m_5(\gamma^2 - 3c^2 y^2) \right] \frac{1}{\gamma^2 + c^2 y^2} + m_6 \left| \frac{1}{\gamma^2 + c^2 y^2} \right|$$

$$H_1(t, x) = \frac{c \mu_2}{m_1 m_2 \pi} \left\{ ct \left[ m_1 - m_2 \frac{3c^2 t^2 - s^2}{c^2 t^2 + s^2} \right] \frac{1}{c^2 t^2 + s^2} + \right.$$

$$\left. + is \left[ m_1 + m_2 \frac{5c^2 t^2 - s^2}{c^2 t^2 + s^2} \right] \frac{1}{c^2 t^2 + s^2} \right\}$$

$$H_2(t, x) = \frac{cm}{2m_1 m_2 \pi} \left\{ ct \left[ -m_1 + m_2 \frac{(2-z_1)c^2 t^2 - (2+z_1)s^2}{c^2 t^2 + s^2} \right] - \right.$$

$$\left. - is \left[ m_1 + m_2 \frac{(1-z_1)c^2 t^2 - z_1 s^2}{c^2 t^2 + s^2} \right] \frac{1}{c^2 t^2 + s^2} \right\}$$

$$Q_{11}(t, x) = \frac{a^2}{2(1+z_1)\pi} \left\{ m_5 \left[ \frac{4(s^2 + 3\gamma s + 4\gamma^2)}{(\gamma + s)^3} - \frac{2(3-z_1)(2\gamma + s)}{(\gamma + s)^2} \right] + \right.$$

$$\left. + [(2-z_1)m_5 + m_6] \frac{1}{\gamma + s} \right\}$$

$$Q_{12}(t, x) = -\frac{2\gamma_1 a^2}{(1+z_1)\pi} \left\{ m_5 \left[ \frac{4s^2}{(\gamma + s)^3} - \frac{6s}{(\gamma + s)^2} \right] + \frac{1}{2} (3m_5 + m_6) \frac{1}{\gamma + s} \right\}$$

$$Q_{21}(t, x) = -\frac{a^2}{2\mu_1(1+z_1)\pi} \left\{ m_5 \left[ \frac{4s^2}{(\gamma + s)^3} - \frac{6s}{(\gamma + s)^2} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} [(4-z_1^2)m_5 + m_6] \frac{1}{\gamma + s} \right\}$$

$$Q_{22}(t, x) = \frac{a^2}{2(1+z_1)\pi} \left\{ m_5 \left[ \frac{4(s^2 + 3\gamma s + 4\gamma^2)}{(\gamma + s)^3} - \frac{2(5+z_1)(2\gamma + s)}{(\gamma + s)^2} \right] + \right.$$

$$\left. + [3(2+z_1)m_5 + m_6] \frac{1}{\gamma + s} \right\}$$

$$P_1(x) = \frac{1+z_0}{3-z_0} N(1) - z_{100}^0(x, \pi) - \frac{8\gamma_0}{(3-z_0)} \frac{\partial z_{10}^0(x, \pi)}{\partial x}$$

$$P_2(x) = \frac{\gamma_0 - 3}{1+z_0} N(1) + z_{100}^0(x, \pi) - \frac{8\gamma_0}{(1+z_0)} \frac{u_{10}(1, \pi)}{2h_0}$$

$$u_{10}(1, \pi) = \frac{h_0(1+z_0)}{4} \frac{[(1+z_0)z_{100}^0(1, \pi) - (3-z_0)z_{10}^0(1, \pi)]}{\max(L_0, E)}$$

$$N(1) = |\ln(\mu_0, \mu_1)/\mu_1|^{1-\alpha} \varphi_{1,r}(1, \pi), \quad \Phi(y) = g_2(cy) + ig_1(cy)$$

$$\psi_j(t) = f_j(\tau) \quad (j=1, 2), \quad \tau = ct, \quad r = cy, \quad a_0 = (b-a)/2, \quad b_0 = (b+a)/2$$

$$\chi = \begin{cases} a_0 t + b_0, & a \neq 0 \\ bt, & a = 0 \end{cases} \quad s = \begin{cases} a_0 x + b_0, & a \neq 0 \\ bx, & a = 0 \end{cases}$$

$$a^* = \begin{cases} a_0, & a \neq 0 \\ b, & a = 0 \end{cases} \quad \delta^* = \begin{cases} 0, & a \neq 0 \\ 1, & a = 0 \end{cases}$$

Если  $a > 0$ , то для однозначной разрешимости системы сингулярных интегральных уравнений (1.11) к ней следует прибавить условия

$$\int_{-1}^1 \Phi(t) dt = 0, \quad \int_{-1}^1 \psi_j(t) dt = 0 \quad (j=1, 2) \quad (1.12)$$

При  $a = 0$  из соотношения (1.10) получаем

$$u_{13}(x, \pi) = -\frac{b}{2} \int_{-1}^x \psi_2(t) dt + \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \psi_2(t) dt + u_{13}(1, \pi)$$

Интегрируя условия (1.11) и отделяя действительную и мнимую части, имеем

$$u_{1r}(y, \pi/2) - u_{2r}(y, \pi/2) = -c \operatorname{Im} \int_0^y \Phi(t) dt + \operatorname{Im} [C]$$

$$u_{1i}(y, \pi/2) - u_{2i}(y, \pi/2) = -c \operatorname{Re} \int_0^y \Phi(t) dt - \operatorname{Re} [C]$$

$$C = c \int_0^1 \Phi(t) dt$$

Отсюда, учитывая свойства функции  $\Phi(t)$ , находим

$$\operatorname{Im} [C] = -\frac{ic}{2} \int_{-1}^1 \Phi(t) dt$$

и, поскольку,

$$u_{1r}(0, \pi/2) - u_{2r}(0, \pi/2) - u_{1r}(0, \pi/2) = -u_{1i}(-1, \pi),$$

получаем

$$-\frac{ic}{2} \int_{-1}^1 \Phi(t) dt = -\frac{b}{2} \int_{-1}^1 \psi_2(t) dt + u_{13}(1, \pi) \quad (1.13)$$

В случае абсолютно жесткого включения ( $E_0 = \infty$ )  $\psi_2(x) = 0$  и последние два уравнения системы (1.11) преобразуются в одно уравнение

$$\frac{\gamma_1}{2\gamma_1(1+\gamma_1)\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_1(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 Q_{21}(t, x) \psi_1(t) dt + \int_{-1}^1 H_2(t, x) \Phi(t) dt =$$

$$= -\frac{\partial u_{12}^+(x, \pi)}{\partial x} \quad |x| < 1$$

Когда же  $E_0=0$ , тогда и  $\psi_1(x)=0$ . В этом случае имеем

$$\frac{2\gamma_1}{(1-\gamma_1)\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_2(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 Q_{12}(t, x) \psi_2(t) dt + \int_{-1}^1 H_1(t, x) \Phi(t) dt = -\tau_{12}^+(x, \pi)$$

— интегральное уравнение, которое вместе с первым уравнением системы (1.11) описывает упругое равновесие спаянных разнородных полуплоскостей с трещиной на прямой линии раздела материалов и перпендикулярно ей расположенной трещиной внутри одной из полуплоскостей.

Приближенное решение системы сингулярных интегральных уравнений (1.11) будем искать методом коллокаций [5, 6]. Пусть

$$\Phi(t) = (1-t)^{\alpha} (1+t)^{\beta} \Phi^*(t), \quad \alpha = -\frac{1}{2} - i\omega, \quad \beta = -\frac{1}{2} + i\omega, \quad \omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1+\gamma_1}{1-\gamma_1}$$

$$\psi_1(t) = (1-t^2)^{-1/2} \psi_1^*(t), \quad a > 0, \quad \psi_2(t) = (1-t^2)^{-1/2} \psi_2^*(t) = (1-t^2)^{\alpha} \psi_2^*(t), \quad a = 0$$

Тогда из (1.11) — (1.13) получаем

$$\sum_{m=1}^M \frac{A_m}{t_m - y_k} \Phi^*(t_m) - i \sum_{j=1}^2 \sum_{a=1}^N \tau \omega^* I_j(t_a, y_k) \psi_j^*(t_a) = -\frac{1}{\gamma_1} [\tau_{12}^+(y_k) - i\tau_{12}^0(y_k)]$$

$$+ \sum_{n=1}^N \tau \omega^* \left\{ \left| \frac{i\tau_{11}}{\pi(t_n - x_1)} - i_3 S(x_1 - t_n) - Q_1(t_n, x_1) \right| \psi_1^*(t_n) + \right.$$

$$\left. + \left| \frac{i\tau_{12}}{\pi(t_n - x_1)} - Q_2(t_n, x_1) \right| \psi_2^*(t_n) \right\} + \sum_{m=1}^M A_m H_2(t_m, x_1) \Phi(t_m) - P_2(x_1)$$

$$+ \sum_{j=1}^2 \sum_{a=1}^N \tau \omega^* \left\{ \frac{i\tau_{2j}}{\pi(t_n - x_j)} + i_3 S(x_j - t_n) + Q_{1j}(t_n, x_j) \right\} \psi_j^*(t_n) +$$

$$+ \sum_{m=1}^M A_m H_1(t_m, x_j) \Phi(t_m) - P_1(x_j) \quad (1.14)$$

$$\sum_{m=1}^M A_m \Phi^*(t_m) = 0, \quad \sum_{a=1}^N \frac{\pi}{N} \psi_j^*(t_a) = 0 \quad (j=1, 2), \quad a > 0 \quad (1.15)$$

$$- \frac{tc}{2} \sum_{m=1}^M A_m \Phi(t_m) = -\frac{b}{2} \sum_{k=1, 2, N+1}^N \frac{\pi}{2N+1} \psi_2^*(t_k) + u_{12}(1, \pi), \quad a = 0 \quad (1.16)$$

$$k = 1, \dots, M-1; \quad t = \begin{cases} 1, \dots, N-1, & a > 0 \\ 1, \dots, N, & a = 0 \end{cases}$$

Здесь

$$(t^2-1)P_{M-2}^{(\alpha+1, \beta+1)}(t_m) = 0, \quad P_{M-1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(y_k) = 0$$

$$A_m = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(M+\alpha) \Gamma(M+\beta)}{(M-1) \Gamma(M) \Gamma(M+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma}{[P_{M-1}^{(\alpha, \beta)}(t_m)]}$$

$$A_1 = (1+\alpha)A_1^*, \quad A_M = (1+\beta)A_M^*, \quad A_p = A_p^* \quad (p=2, \dots, M-1)$$

$$t_n = \cos\left(\frac{2n-1}{2N^*} \pi\right), \quad x_l = \cos\left(\frac{l}{N^*} \pi\right), \quad \omega^* = \frac{\pi}{N^*}, \quad N^* = \begin{cases} N, & a > 0 \\ 2N+1, & a = 0 \end{cases}$$

$\Gamma(x)$  — гамма-функция,  $P_m^{(\alpha, \beta)}(x)$  — полиномы Якоби.

Коэффициенты интенсивности напряжений вычисляем по формулам

$$k_j^* = \mp \left[ \frac{2z_1}{1+z_1}, \frac{z_1-1}{2(1+z_1)} \right] \varphi_j^*(1) \quad (j=1, 2)$$

на торцах включения и по формулам

$$k = k_1 + ik_2 - c(1-\gamma_2^2)\Phi^*(1)$$

в вершине трещины.

2. Численное решение системы линейных алгебраических уравнений (1.14), (1.15) (если  $a > 0$ ) и (1.14), (1.16) ( $a = 0$ ) получено для комбинации материалов полуплоскостей алюминий-эпоксид ( $E_{11}/E_{22} = 22,47$ ,  $\nu_{12} = 0,3$ ,  $\nu_{21} = 0,35$ ) и случае плоской деформации. При этом

$$\varepsilon_0 = \frac{\nu_1}{1-\nu_2} = 0,42857, \quad \varepsilon_1 = 1,0, \quad \varepsilon_2 = 0,26844 \quad (\text{алюминий-эпоксид})$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\nu}{1-\nu_2} = 0,42857, \quad \varepsilon_2 = 0,26844, \quad \varepsilon_1 = 1,0 \quad (\text{эпоксид-алюминий})$$

Определение комплексных точек коллокации  $u_j$  и узлов  $t_k$ , являющихся корнями полиномов Якоби, проводилось методом Ньютона—Рафсона. В качестве нулевых приближений брались точные значения корней соответствующих полиномов Чебышева.

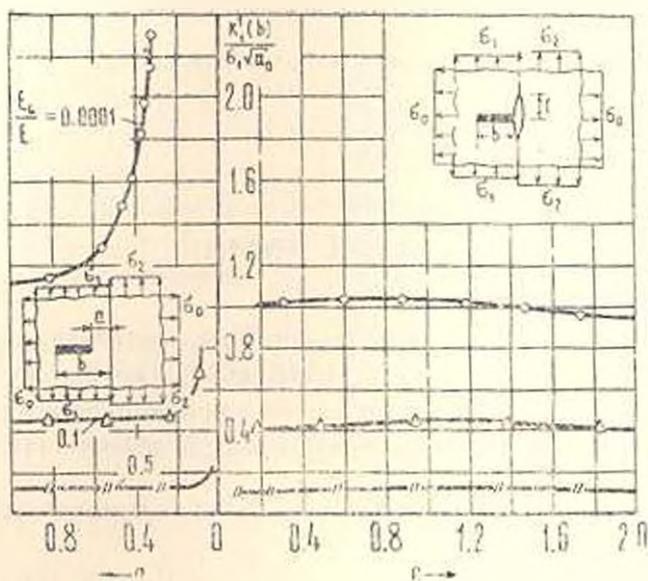
Для достижения относительной точности в 1% потребовалось при самых неблагоприятных значениях параметров задачи положить в (1.14—1.16)  $N^* = 21$ ,  $M = 25$ .

Результаты вычислений приведенных коэффициентов интенсивности напряжений

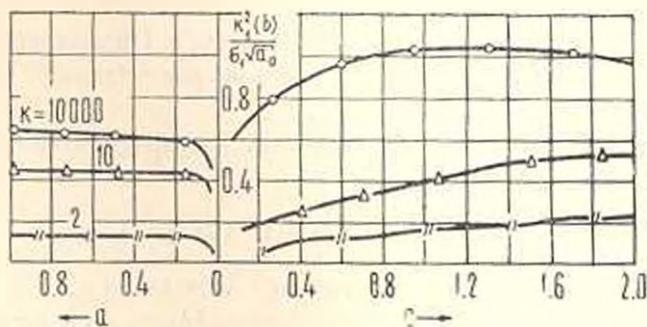
$$k_j'(b) = k_j^*(b) / (\varepsilon_1 \sqrt{a_0}) \quad (j=1, 2)$$

для значений относительной жесткости включения  $k_0 = E_0/E_1 = 0,0001$ ; 0,1; 0,5; 2; 10; 10000, расположенного в алюминиевой матрице, представлены на фиг. 2, 3. Здесь фиксировали длину включения  $a_1 = 1$ , его толщину  $h_0 = 0,1$  и исследовали влияние расстояния правого торца  $x = a$  на коэффициенты  $k_j'(b)$  ( $j=1, 2$ ). После достижения торцом  $x = a$  линии раздела материалов полуплоскостей ( $a = 0$ ) предполагалось возникновение трещины полудлины  $c$  вдоль этой линии. Зависимость  $k_j'(b)$  от величины параметра  $c$  представляла в правых частях фиг. 2, 3.

Установлено, что при  $k = 0,0001$  значения  $k_1^1$  с относительной точностью не более 1% совпадают с коэффициентом  $k_1$ , соответствующей задаче для трещины [7]. При  $k = 10000$ ,  $a = 8$  получаем решение задачи для абсолютно жесткого включения в однородной изотропной плоскости [8].



Фиг. 2



Фиг. 3

Соответствующие результаты для включения, локализованного в матрице из эпоксида, содержатся в табл. 1, 2.

Таблица

x	$k_1^+(b)$			$k_1^-(b)$		
	0.0001	0.1	0.5	2	10	10000
2.0	0.9616	0.4264	0.1172	0.01753	0.04638	0.06662
1.8	0.9566	0.4277	0.1172	0.01754	0.04645	0.06677
1.6	0.9506	0.4268	0.1171	0.01755	0.04653	0.06695
1.4	0.9433	0.4258	0.1170	0.01756	0.04663	0.06717
1.2	0.9343	0.4245	0.1169	0.01758	0.04675	0.06747
1.0	0.9231	0.4230	0.1168	0.01761	0.04692	0.06785
0.8	0.9090	0.4210	0.1167	0.01763	0.04714	0.06835
0.6	0.8910	0.4185	0.1165	0.01767	0.04745	0.06914
0.4	0.8680	0.4154	0.1162	0.01773	0.04792	0.07031
0.2	0.8387	0.4114	0.1160	0.01782	0.04871	0.07241

Таблица 2

x	$k_1^+(b)$			$k_1^-(b)$		
	0.0001	0.1	0.5	2	10	10000
0.1	0.8124	0.3581	0.08753	-0.02213	-0.08939	-0.1748
0.3	0.8339	0.3642	0.08939	-0.01812	-0.07303	-0.1572
0.5	0.8684	0.3818	0.10051	-0.01053	-0.05344	-0.1022
0.7	0.8975	0.398	0.11244	-0.00195	-0.03759	-0.0707
0.9	0.9211	0.4162	0.12375	0.00712	-0.02108	-0.0419
1.1	0.9382	0.429	0.13325	0.01617	-0.00553	-0.0192
1.3	0.9479	0.4372	0.13999	0.02454	0.00778	0.01814
1.5	0.9493	0.4399	0.14344	0.03160	0.01646	0.04177
1.7	0.9427	0.4261	0.14453	0.03744	0.02815	0.04595
1.9	0.9288	0.4154	0.1463	0.04252	0.03615	0.05044

ԿՏՈՐ ԱՌԻ ԿՏՈՐ ՀԱՄԱՍԻՆՈՒ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ԲԱՐՈՒ ԱՌԱՋՊԱԿԱՆ ՆԵՐՊՐԱԿԻ ՓՈՆԵԱԶՎԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ՆԱԲԻ ՀՆՏ

Գ. Վ. ԳՐԵԼՅԱՆՑ, Ա. Ա. ՆՎՍԻՆՆԻՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Մ

Ստացված է երկու իրար զուգված դժային առաձգական տարասևն կիսա-հարթությունների խնդրի լուծումը, որոնք պարունակում են զոդման զծի երկայնքով ճաթ. ինչպես նաև կիսահարթություններից որևէ մեկում ճաթին ներդրակը կարող է հատել միջֆազային ճաթը: Մեկին ինտեգրալ ձևափոխության օգտագործումով կառուցված է լուծող ինտեգրալ համասարումների սխեմները: Թվային արդյունքները ներկայացված են լարումների ինտենսիվության գործակիցների համար:

# INTERACTION OF THE THIN ELASTIC INCLUSION WITH CRACK IN BONDED HALF-PLANES

D. V. GRILITSKI, A. A. JEVUSHENKO

## С у м м а р у

The solution is given for two bonded isotropic linearly elastic half-planes of different elastic properties having a crack along the interface as well as a perpendicular inclusion in one of the half-planes which may intersect the interface crack. The appropriate integral equations have been developed through the use of Mellin transforms.

Numerical results are presented for the stress intensity factors.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Чобанян К. С., Хачикян А. С. Плоское деформированное состояние упругого тела тонкостенным гибким включением.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1967, т. 2, № 6, с. 19—29.
2. Coker E., Pilon L. N. A treatise on photo-elasticity. 2d ed., Cambridge University Press: 1957. 720 p.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования и задачи теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука, 1968, т. 1. 343 с.
5. Erdogan F., Gupta G. D. On the numerical solution of singular integral equations.—Quart. Appl. Math., 1972, vol. 2, № 4, p. 525—531.
6. Ioakimidis N. I., Theocaris P. S. Numerical solution of Cauchy type singular integral equations by use of the Lobatto-Jacobi numerical integration rule.—Appl. Math. et informatique, 1978, vol. 23, № 6, p. 439—452.
7. Corie J. G., Venezia W. A. Bonded elastic half-planes with an interface crack and a perpendicular intersecting crack that extends into the adjacent material. Int. J. Eng. Sci., 1977, vol. 15, № 1, p. 1—17.
8. Сулим Г. Т. Влияние формы тонкостенного включения на концентрацию напряжений в пластине.—Физ.-хим. механика материалов, 1981, № 3, с. 61—68.

Львовский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
26.1.19