УДК 539.3:534.1

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ
КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ИЗГИБНЫХ ВОЛН
В ПЛАСТИНАХ С КВАДРАТИЧНОЙ И КУБИЧЕСКОЙ
НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

ТОПЧЯН Д. Х.

Нелинейные волны в упругих средах с квадратичной нелинейностью рассмотрены в [1], [2], [3]. Для нестационарных волн квадратичная нелинейность является определяющей. Вместе с тем для волн с медленно меняющейся амплитудой и фазой в диспергирующих средах, типичным примером которых можно считать волны в пластинах при наличии изгибных возмущений, существенное влияние на различные вопросы, связанные с распространением, дифракцией и устойчивостью волн, оказывает кубическая нелинейность [4], [5]. Приведенное в [6] значение кубического коэффициента для металлов настолько велико, что кубическая нелинейность по порядку оказывается большей, чем квадратичная нелинейность [1]. Во всех случаях желательно при рассмотрении вопросов устойчивости распространения [7] квазимонохроматических волн в пластинах наряду с кубической [8] учитывать и квадратичную нелинейность. Настоящая статья содержит рассмотрение вопросов устойчивости одномерных изгибных волн в пластинах с учетом квадратичной и кубической, а также геометрической нелинейности. Рассматривается высокочастотное приближение, хотя и предположено, что толщина пластины меньше длины волны, что позволяет применить длинноволновое приближение, с точки зрения теории пластин, или $kh \ll 1$, где k — волновое число, h — толщина пластины. Показана неустойчивость в адиабатическом приближении изгибных нелинейных волн в пластинах.

Рассматриваются волны в геометрически и физически нелинейных упругих пластинах с преобладанием изгибных деформаций.

Используем теорию Кирхгофа, согласно которой вертикальное перемещение пластины u_z зависит только от x , y , t . Здесь x , y , z — лагранжевы координаты, причем z перпендикулярен к пластине.

Для простоты рассмотрим одномерные волны по x и t , хотя полученное дисперсионное соотношение верно и для двумерных волн. Деформация по оси x

$$e_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \quad (1)$$

кроме того, имеет место

$$\varepsilon_x + \varepsilon_z = \frac{(1-2\nu)\varepsilon_x}{1-\nu} \quad (2)$$

где ν — коэффициент Пуассона, u — продольное перемещение в средней плоскости.

Внутренняя энергия по пятиконстантной нелинейной теории упругости [3] имеет вид

$$U = \bar{\mu} \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_x^2 dz, \quad \bar{\mu} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \quad (3)$$

$$\varepsilon_x = \frac{A}{3} \left\{ 1 - \frac{\nu^2}{(1-\nu)^2} \right\} + B \left\{ 1 + \frac{\nu^2}{(1-\nu)^2} \right\} \frac{1-2\nu}{1-\nu} + \frac{C}{3} \frac{(1-2\nu)^2}{(1-\nu)^2}$$

где A , B , C — коэффициенты, характеризующие нелинейность. Заметим, что модули Ляме λ и μ выражаются через ν и модуль юнга E

$$\lambda = E \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4)$$

Ищем перемещения в виде [8]

$$u_x = a \sin z, \quad u = u_0 + b \sin 2z, \quad z = kx - \omega t \quad (5)$$

Подставляя (1) в (3) и интегрируя по z в пределах от $-h/2$ до $h/2$, получим внутреннюю энергию

$$\bar{U} = \bar{\mu} \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right)^2 + \bar{\mu} h \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^4 \right\} + \frac{\lambda h^3}{4} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right\} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right)^2 \quad (6)$$

Введем осредненный лагранжиан

$$\bar{L} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L dz \quad (7)$$

где $L = \bar{U} - \bar{T}$ — осредненный по z лагранжиан, а кинетическая энергия

$$\bar{T} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 dz = \frac{\rho h}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 \quad (8)$$

Здесь отброшено малое инерционное слагаемое $\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2$.

Подставляя (5) в (6), (7), (8) и осредняя по z , получим

$$\bar{L} = \frac{\bar{\mu} h^3}{24} a^4 k^4 + \bar{\mu} h \left\{ \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + 2b^2 k^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial u_0}{\partial x} a^2 k^2 \right\} -$$

$$+ \frac{1}{2} \overline{h} a^2 k^3 + \frac{3}{32} \overline{a}^3 k^4 \left\{ + \frac{zh^3}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u_0}{\partial x} a^2 k^4 - \frac{1}{2} b a^2 k^5 + \frac{1}{16} a^4 k^6 \right) - \frac{1}{4} \rho h \omega^2 a^2 \right. \quad (9)$$

Варьируя $\bar{I}$ по u_0 , получим

$$\overline{2} \rho h \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\overline{a} h k^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} a^2 + \frac{zh^3 k^4}{8} \frac{\partial}{\partial x} a^2 = 0 \quad (10)$$

Интегрируя, получим

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = - \frac{k^2}{4} a^2 - \frac{zh^3 k^4 a^2}{16 \rho} \quad (11)$$

Варьируя $\bar{I}$ по b , найдем

$$b = - \frac{a^2}{8} k + \frac{1}{32} \frac{zh^2 k^3 a^2}{\rho} \quad (12)$$

Варьируя $\bar{I}$ по a , получим

$$\begin{aligned} \frac{\overline{zh^3}}{24} k^4 + \frac{1}{2} \overline{a} h k^2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\overline{a} k}{2} b k^3 + \frac{3}{16} a^3 k^4 \overline{a} h + \\ + \frac{zh^3}{8} \frac{\partial u_0}{\partial x} k^4 - \frac{1}{8} zh^3 k^2 b + \frac{1}{32} zh^3 a^2 k^6 - \frac{\rho h}{4} \omega^2 = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя сюда $\frac{\partial u_0}{\partial x}$ и b , получим

$$\frac{\rho h}{4} \omega^2 - \frac{\overline{zh^3}}{21} k^4 - \frac{3}{256} \frac{zh^2 k^3 a^2}{\rho} \quad (14)$$

Обозначим через ω_0 линейную частоту

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\overline{zh^3}}{6\rho}} k^2 \quad (15)$$

Учитывая малость a , можно найти

$$\omega = \omega_0 - \frac{3}{128} \frac{zh^2 k^3 a^2}{\rho \omega_0} \quad (16)$$

Отсюда можно получить, зависимость нелинейное дисперсионное соотношение

$$\omega = \omega_0 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0 a^2 \quad (17)$$

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0 = - \frac{3}{128} \frac{zh^2 k^3}{\rho \omega_0} \quad (18)$$

Таким образом, для квадратичной нелинейной среды получается, что имеет место распространение волн, имеющих медленно меняющиеся амплитуду и фазу. Причем можно провести сравнение со случаем

нелинейно-кубической среды [8], в которой показано, что имеет место неустойчивость волновых пакетов, даваемых (1).

Условие устойчивости для уравнений медленных модуляций имеет вид [8]:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 > 0 \quad (19)$$

Преобразуя x , можно получить

$$x = \frac{(1-2\nu)\{A(1-\nu+\nu^2) + 3B(1-2\nu+2\nu^2) + C(1-2\nu)^2\}}{3(1-\nu)^2} \quad (20)$$

Для несжимаемого материала $\nu = \frac{1}{2}$; $x = 0$; $\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 = 0$, то есть нарушается условие медленно меняющихся параметров волн и требуется учесть слагаемые четвертой степени по x в U .

Для $\nu = \frac{1}{3}$, взяв металлическую пластину, данные для которой даны в [3] стр. 305, получается $x \sim -5 \cdot 10^{12} \frac{\epsilon}{\text{см сек}^2}$ и условие неустойчивости выполняется.

Таким образом, так же, как и для кубической нелинейности имеет место неустойчивость для волн огибающих, описываемых уравнениями модуляций.

Отметим, что для указанных x в (18) для $ka \ll 1$ первое слагаемое в скобке является главным по порядку, причем при отбрасывании геометрической нелинейности это слагаемое уменьшается вдвое и меняется знак. Таким образом, для квадратичной нелинейности, в отличие от кубической [8], учет геометрической нелинейности при всех значениях амплитуд необходим.

В работе [6] дано значение упругого модуля третьего порядка в виде γ_3 , где для металлов $\gamma_3 \approx -10^9$. Для упругой области ϵ_3 имеет порядок 10^{-3} и кубическая нелинейность становится сравнимой с линейным слагаемым, что вряд ли допустимо. Для $\epsilon_3 \sim 10^{-4}$ кубическое слагаемое по порядку превосходит рассматриваемую квадратичную нелинейность. Таким образом, или указанное в [6] значение γ_3 для металлов завышено, или следует наряду с квадратичной нелинейностью в рассматриваемых задачах теории модуляции учитывать кубическую нелинейность.

Для простоты, как и в работе [8], здесь ограничимся учетом кубических слагаемых в приближении [6]. Возьмем вместо (3) внутреннюю энергию в виде

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_1^2 + \frac{1}{2} \epsilon_2^2 + \frac{3}{8} \epsilon_3^2 \quad (21)$$

где ψ_0 — интенсивность деформации, и для рассматриваемой одномерной задачи

$$\frac{u_0^2}{a^2} = \frac{8}{9} \frac{1-\nu+\nu^2}{(1-\nu)^2} \frac{u_x^2}{a^2} \quad (22)$$

В (6) за счет кубического слагаемого добавляется

$$\frac{1}{270} \rho_0^{1/2} \frac{(1-\nu+\nu^2)^2 h^5}{(1-\nu)^4} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right)^3 \quad (23)$$

В (9) прибавится

$$\frac{1}{720} \rho_0^{1/2} \frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^4} a^4 k^3 h^6$$

В уравнении (13) добавится

$$\frac{1}{360} \rho_0^{1/2} \frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^4} h^5 u_x^2 k^6$$

и то же самое добавится в правую часть (14). При этом вместо (18) получится

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0 = - \frac{3}{128} \frac{x^2 h^4 k^8}{\rho_0 \omega_0} + \frac{1}{180} \frac{u_x^2 k^8 h^4}{\rho_0 \omega_0} \frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^4} \quad (24)$$

Для общности рассмотрения также следует учитывать инерционные слагаемые в T от продольных скоростей

$$\frac{\rho h}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} - 2b\omega \cos 2\tau \right)^2$$

При этом в (9) добавится слагаемое

$$- \frac{\rho h}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + 2b^2 \omega^2 \right\}$$

Проводя варьирование по u_0 , где учтено, что [5] $\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \approx \approx (\omega_0(k))^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$, и по b , получим (11) и (12), где в правых частях добавятся

$$\frac{h^2 k^2}{3} \frac{\partial u_0}{\partial x} \approx - \frac{k^4 h^2 a^2}{12} - \frac{x h^4 k^6 a^2}{48 \mu} \quad \text{и} \quad - \frac{h^2 h^3 a^2}{96} + \frac{x h^4 k^6 a^2}{384 \mu}$$

Тогда в (21) добавится $-\frac{3}{32} \frac{\rho k^4 h^2}{\rho(1-\nu)\omega_0} - \frac{7}{192} \frac{x h^4 k^6}{\rho \omega_0}$. С точностью до множителя $\frac{h^2 h^6}{\rho \omega_0}$ первое слагаемое в правой части (21) для металлов имеет порядок $5 \cdot 10^{12}$, второе слагаемое — порядок

$$\frac{1}{180} \gamma_2 k^2 h^2 \frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^4} \approx \frac{1}{20} \cdot 10^{12} \gamma_2 (kh)^2$$

Для реальных волн $kh \geq 0,1$ и, взяв γ_2 по [6], получим для второго слагаемого порядок $10^{12} \cdot \frac{1}{2} 10^3$, который для выбранных длин волн больше порядки первого слагаемого и тем более превосходит последнее добавленное слагаемое. Таким образом, при значении γ_2 , взятом из [6], кубическая нелинейность определяет величину коэффициента $\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0$. Однако, следует пересмотреть значение γ_2 , тем более, что для полимеров и композитов γ_2 может быть небольшим. Следует отметить, что все указанные слагаемые в (24) для металлов отрицательные. Таким образом, имеет место в адиабатическом приближении неустойчивость модуляционных волн. В более точном приближении с учетом в лагранжиане производных от амплитуд, можно получить [8], что волны устойчивы для амплитуд

$$a^2 < -\frac{\omega_0(k) k_1^2}{4 \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0}$$

где $\omega_0 = 2 \sqrt{\frac{\nu k^2}{6\rho}}$, а k_1 есть волновое число для возмущенных волновых пакетов, которое по смыслу волн гнбающих [8] значительно меньше k . Поскольку $-\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0$ велико, амплитуды, которые соответствуют устойчивым волнам, малы. Таким образом, одновременный учет как кубической, так и квадратичной нелинейности приводит к сужению области устойчивости волн.

Автор благодарит А. Г. Бадоева и И. А. Мовсисяна за ценные советы.

ՀԱՅԿԱՍՏԱՆԻ ԵՎ ԵՐՐԱՆԱՐԴԱՅԻՆ ԱԳՐԱՅՆՈՒԹՅԱՆԲ ԽՈՒՆԴՈՒՄ
ԿԱԶՄԻՐՈՆԵՐՈՄԱՏԻՊ ԽՈՒՄԱՆ ԱԻՔՆԵՐԻ
ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Գ. Ե. ԹՈՓՅԱՆ

Ա. Մ Փ Ո Փ Ո Մ

Հոդվածում դիտարկվում է քառակուսային, խորանարդային, ինչպես նաև, երկրաչափական ոչդաշնությամբ սալերում ծոց միաչափ ալիքների կայունության հարցերը:

Դիտարկվում է բարձր հաճախականության մոտավորումները, ընչպես

ընդունվում է, որ սալի ճաստոթյունը փոքր է այնքի երկարությունից, որը
բաց սալերի տեսութան, կամ որ $kh \ll 1$, որտեղ k -ն այնքային թիվն է, h -ը
սալի ճաստոթյունը, թայլ է սալի կիրառելի երկարալիք մոտավորում: Ճույց
է արված սալերում ծոպ ոչգծային այնքների անկայունությունը ադիարատ
մոտավորումում:

THE INVESTIGATION OF STABILITY OF QUASIMONOCHROMATIC BENDING WAVES IN PLATES WITH QUADRATIC AND CUBIC NONLINEARITIES

D. KH. TOPCHIAN

S u m m a r y

This paper considers the problem of stability of one-dimensional bending waves in plates taking into account quadratic and cubic nonlinearity. High frequency approximation is considered although it is supposed that the thickness of the plate is less than the wavelength, which allows to apply high wave approximation in view of the theory of plates or for $kh \ll 1$, where k is the wave number and h the plate thickness. The instability in adiabatic approximation of bent nonlinear waves in plates is shown.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишгул У. К., Энгельбрехт Ю. К. Нелинейные и линейные переходные волновые процессы деформации термоупругих и упругих тел. Таллин: Изд-во АН ЭССР, 1972. 174 с.
2. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 520 с.
3. Багдасов А. Г., Мовсисян Л. А. К вопросу определения ударной волны в нелинейных задачах теории упругости. Изв. АН АрмССР, Механика, 1968, т. 21, № 3, с. 19—24.
4. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
5. Уилем Дж. Б. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
6. Кудерер Г. Нелинейная механика. М.: ИЛ, 1961. 777 с.
7. Лидтхилд М. Дж. Некоторые частные случаи применения теории Уилем. В кн.: Нелинейная теория распространения волн. М.: Мир, 1970, с. 43—76.
8. Багдасов А. Г., Мовсисян Л. А. Квазимонохроматические волны изгиба в нелинейно-упругих пластинах. Изв. АН СССР, МТТ, 1981, № 4, с. 169—176.

Ленинградский политехнический
институт

Поступило в редакцию
17.VI.1983