

УДК 593.3

ОБ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЯХ МЕХАНИКИ  
 РАЗНОМОДУЛЬНЫХ ТЕЛ

ЛОМАКИН Е. В., СВЕКЛО В. А., ЧЕРНЫШОВ О. А.

В работе [1] получены соотношения между деформациями и напряжениями для изотропных упругих тел, сопротивление которых зависит от вида напряженного состояния. Это свойство для краткости обозначено термином «разномодульность», под которым у некоторых других авторов понималось различие упругих характеристик материала только при одноосных растяжении и сжатии [2]. Соотношения [1] были получены из условия существования упругого потенциала, имеющего такой же вид, как и потенциал для классического упругого тела, но константы которого зависят от вида напряженного состояния. При этом в качестве параметра вида напряженного состояния был выбран параметр  $\xi = \sigma/\sigma_0$ , где  $\sigma$  — среднее напряжение,  $\sigma_0$  — интенсивность напряжений. В общем случае параметр  $\xi$  может принимать значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

В данной работе продолжается рассмотрение вопросов, связанных с исследованием определяющих соотношений механики разномодульных тел. В частности, на конечных интервалах изменения аргументов строятся определяющие функции деформированного и напряженного состояния среды. Устанавливается взаимно-однозначное соответствие между ними. Указывается достаточное условие единственности решения основных краевых задач.

1°. При построении зависимостей между напряжениями и деформациями упругого изотропного тела, сопротивление которого зависит от вида напряженного состояния, исходим из следующих допущений:

1. Упругий потенциал среды  $W$  зависит только от первых двух инвариантов тензора деформации

$$W = W(J_1, J_2), \quad J_1 = 3\varepsilon, \quad J_2 = \varepsilon_0^2 \xi^2 = 3\varepsilon^2 + \frac{3}{2} \varepsilon_0^2 \quad (1.1)$$

Здесь  $\varepsilon = 1/3 \varepsilon_{ii}$  — средняя деформация,

$$\varepsilon_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 - 6\varepsilon_{12}^2 + (6\varepsilon_{23}^2 + 6\varepsilon_{13}^2)}$$

— интенсивность тензора деформаций.

2. Упругий потенциал  $W$  удовлетворяет равенству

$$J_1 \frac{\partial W}{\partial J_1} + J_2^0 \frac{\partial W}{\partial J_2^0} = 2W, \quad J_2^0 = \sqrt{J_2} \quad (1.2)$$

Допущения 1, 2 вполне естественны, они выполняются для классического упругого изотропного тела. Допущение 2 обобщает свойство однородности потенциала  $W$  в классическом случае.

Для малых деформаций  $W$  является функцией шести независимых компонент тензора деформаций  $\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i})$ . При неучете тепловых эффектов имеем

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}}, \quad e_{ij} = \begin{cases} \varepsilon_{ij} & (i=j) \\ 2\varepsilon_{ij} & (i \neq j) \end{cases}$$

что в соответствии с допущением 1 позволяет установить общий вид связи между компонентами тензоров напряжений и деформаций

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial J_1} \delta_{ij} + \frac{1}{J_2^0} \frac{\partial W}{\partial J_2^0} \varepsilon_{ij} \quad (1.3)$$

или

$$\sigma_{ij} - \varepsilon_{ij}^2 = \frac{1}{J_2^0} \frac{\partial W}{\partial J_2^0} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^2), \quad \sigma = \frac{\partial W}{\partial J_1} + \frac{1}{J_2^0} \frac{\partial W}{\partial J_2^0}, \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii} \quad (1.4)$$

Из (1.4) следует, что в рассматриваемой среде главные направления тензоров напряжения и деформации совпадают.

Рассматривая (1.2) как дифференциальное уравнение с частными производными для функции  $W$ , запишем его общее решение

$$W = \psi(\eta) (J_2^0)^3, \quad \eta = \frac{J_2}{J_2^0} \quad (1.5)$$

Здесь  $\psi(\eta)$  — произвольная достаточно число раз дифференцируемая функция. По смыслу левой части равенства (1.5)  $\psi(\eta) > 0$  для всех возможных значений аргумента. Последний назовем параметром, а  $\psi(\eta)$  — функцией вида деформированного состояния среды. Согласно (1.1) имеем  $9/2 \varepsilon_0^2 = (3 - \eta^2)(J_2^0)^2$ . Откуда следует, что для всех видов деформированного состояния  $\eta^2 \leq 3$ .

Вычисляя производные от  $W$  в равенстве (1.3), получим

$$\sigma_{ij} = J_2^0 \psi'(\eta) \delta_{ij} + \chi(\eta) \varepsilon_{ij}, \quad \chi(\eta) = 2\psi(\eta) - \eta \psi'(\eta) \quad (1.6)$$

что равносильно равенствам

$$\sigma_0 - \varepsilon_0^2 = \chi(\eta) (\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{ii}^2), \quad 3\sigma = \Pi_1 = 3\psi'(\eta) J_2^0 + \chi(\eta) I_1 \quad (1.7)$$

Из (1.6) следует

$$\sigma_{ij} = \chi(\eta) \varepsilon_{ij} \quad (i \neq j)$$

Отсюда получаем еще одно ограничение на функции  $\psi(\eta)$ ,

$$\chi(\eta) = 2\psi(\eta) - \eta\psi'(\eta) > 0$$

для всех  $\eta^2 \leq 3$ .

Рассмотрим сумму

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{11}^2\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}^2\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}^2\varepsilon_{33} + 2\varepsilon_{12}^2\varepsilon_{12} + 2\varepsilon_{23}^2\varepsilon_{23} + 2\varepsilon_{13}^2\varepsilon_{13}$$

Пользуясь (1.6), получим формулу Клапейрона

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} = \psi^2 J_1 J_2^2 + \chi(J_2^0)^2 - (\psi'\eta + \chi)(J_2^0)^2 - 2W$$

2°. Соотношения (1.6) при некоторых дополнительных условиях позволяют выразить  $J_k$  через  $\Pi_k$  ( $k=1, 2$ ).  $\Pi_2 = 3\varepsilon^2 + 3 \cdot 2\varepsilon_0^2$ ,  $\varepsilon_0$  — интенсивность тензора напряжений. Действительно, пользуясь (1.6), получим

$$\Pi_2^0 = 7J_2^0, \quad \Pi_2^0 = \sqrt{\Pi_2}, \quad 7\varepsilon = [(3-\eta^2)(\psi')^2 + 4\psi^2]^{1/2} \quad (2.1)$$

Полагая  $\beta = \Pi_1/\Pi_2^0$ , на основании (1.7) и (2.1) получим

$$\beta = [(3-\eta^2)\psi' + 2\eta\psi] 7\varepsilon^{-1} \quad (2.2)$$

Равенство (2.2) определяет  $\eta$  как неявную функцию на промежутке  $-3 \leq \eta \leq 3$ . Имеем

$$\frac{d\beta}{d\eta} = \chi \frac{2\psi\chi + (3-\eta^2)|2\psi\psi'' - (\psi')^2|}{J_2^0} \quad (2.3)$$

При условии неравенства нулю числителя правой части (2.3)  $\eta$  является однозначной функцией  $\beta$ , то есть отношения  $\Pi_1/\Pi_2^0$ . Таким образом, инварианты  $J_k$  однозначно выражаются через  $\Pi_k$  ( $k=1, 2$ ). Вычислим, рассматривая  $W$  как функцию только  $\Pi_k$ , левую часть равенства (1.2)

$$J_1 \frac{\partial W}{\partial J_1} + J_2^0 \frac{\partial W}{\partial J_2^0} = \left( J_1 \frac{\partial \Pi_1}{\partial J_1} + J_2^0 \frac{\partial \Pi_1}{\partial J_2^0} \right) \frac{\partial W}{\partial \Pi_1} + \left( J_1 \frac{\partial \Pi_2^0}{\partial J_1} + J_2^0 \frac{\partial \Pi_2^0}{\partial J_2^0} \right) \frac{\partial W}{\partial \Pi_2^0}$$

Легко проверить с помощью (1.6), что коэффициенты при  $\partial W/\partial \Pi_1$ ,  $\partial W/\partial \Pi_2^0$  равны, соответственно,  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ . Таким образом, приходим к равенству

$$\Pi_1 \frac{\partial W}{\partial \Pi_1} + \Pi_2 \frac{\partial W}{\partial \Pi_2} = 2W$$

Отсюда, аналогично рассмотренному выше, находим

$$W = \varphi(\beta)(\Pi_2^0)^2, \quad \beta = \Pi_1/\Pi_2^0 \quad (2.4)$$

Здесь  $\varphi(\beta)$  — произвольная достаточно число раз дифференцируемая функция. Для всех отличных от нуля напряженных состояний среды  $\Pi_2 > 0$ ,  $\varepsilon_0 = \sqrt{2} \sqrt{3-\beta^2} \Pi_2^0/3 > 0$ . Поэтому  $\beta^2 \leq 3$ . Из (2.4) следует, что

функция  $\varphi(\beta)$ , как и функция  $\psi(\tau)$ , должна удовлетворять условию  $\varphi(\beta) > 0$  для всех  $\beta^2 \leq 3$ .

Поскольку для рассматриваемой среды справедлива формула Клапейрона, то справедливы и равенства [3]

$$e_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.5)$$

Из (2.4) и (2.5) следует

$$\varepsilon_{ij} = \varphi' \Pi_{ij}^0 + \omega(\beta) \varepsilon_{ij}, \quad \omega(\beta) = 2\varphi(\beta) - 3\varphi'(\beta) > 0$$

или

$$\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0 = \omega(\beta)(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0), \quad J_1 - 3\varphi'(\beta)\Pi_1^0 + \omega(\beta)\Pi_1 \quad (2.6)$$

Отметим, что параметр  $\xi = \Pi_1/\Pi_1^0$  имеет некоторые преимущества перед  $\xi = \varepsilon/\varepsilon_0$ , использованном в [1], поскольку ограничения, накладываемые на функцию  $\varphi(\beta)$ , должны выполняться только на отрезке  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ , а не на всей прямой, как было бы при использовании параметра  $\xi$ .

3. Напряженно-деформированное состояние рассматриваемой среды можно выразить либо с помощью функции  $\varphi(\beta)$ , либо  $\psi(\tau)$ . Между ними имеется связь. Действительно, зная функцию  $\varphi(\beta)$ , легко находим

$$\psi(\tau) = \varphi(\beta) T_\tau^{-1}, \quad \tau = |(3 - \beta^2)\varphi' + 2\beta\varphi| T_\tau^{-1}, \quad T_\tau = |(3 - \beta^2)(\varphi')^2 + 4\varphi^2|^{1/2} \quad (3.1)$$

т. е. имеем параметрическое задание функции  $\psi(\tau)$ , определяющей зависимость упругого потенциала  $W$  от компонент тензора деформаций.

Из (3.1) вытекает равенство

$$\psi'(\tau) = -\varphi'(\beta) \omega^{-1}(\beta) T_\tau^{-1} \quad (3.2)$$

Здесь в левой части производная берется по  $\tau$ , а в правой части — по переменной  $\beta$ .

На основании (3.1) и (3.2) нетрудно убедиться, что

$$\chi(\tau) \omega(\beta) = 1 \quad (3.3)$$

Поэтому из неравенств  $\varphi(\beta) > 0$ ,  $\omega(\beta) > 0$  следуют неравенства  $\psi(\tau) > 0$ ,  $\chi(\tau) > 0$  и наоборот. Покажем теперь, что из соотношений (1.7) вытекают соотношения (2.6) и наоборот. Действительно, из второго соотношения (2.6) имеем

$$J_1 = \chi^{-1}(\Pi_1 - 3\psi' J_2^0) = \omega[\Pi_1 + 3\varphi' J_2^0 \omega^{-1} T_\tau] = \omega\Pi_1 + 3\varphi' \Pi_1^0$$

Равносильность первых соотношений (1.7) и (2.6) следует из (3.3). Таким образом, напряженно-деформированное состояние может быть описано либо с помощью потенциала (1.5), либо — (2.4).

Поскольку из (2.6) следует, что  $\varepsilon_0 = \omega(\beta)\varepsilon_0$ , то для определения вида функции  $\omega(\beta)$  может быть использована методика, указанная в работе [1]. Укажем лишь, что если  $\omega(\beta) = \text{const}$ , то  $\varphi = A + B\beta^2$ ,  $A, B$  — постоянные, и мы получим

$$W = A\Pi_1^2 + B\Pi_2$$

то есть классический потенциал, который является одним из частных решений уравнения (1.2).

4. Исследуем теперь условия единственности решения краевых задач для рассмотренной среды. Будем исходить из соотношений, полученных на основе потенциала (1.5). Соотношения между деформациями и напряжениями нелинейные, поэтому воспользоваться классическим доказательством теоремы единственности не представляется возможным. Единственность решения выполняется, если потенциал является выпуклой функцией [4, 5]. Однако, условия выпуклости потенциала (1.5) как функции шести независимых компонент тензора деформаций весьма громоздки, проверка которых может вызвать большие затруднения. Покажем, что единственность решения будет обеспечена при условии выпуклости потенциала как функции двух инвариантов  $J_1$  и  $J_2$ . Виртуальная работа поверхностных и объемных сил представляется следующим образом [5]:

$$\int_S P_j \delta u_j dS + \int_V P_j \delta u_j dV = \int_V \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{pq}} \delta \varepsilon_{pq} dV \quad (4.1)$$

Пусть на одной поверхности тела  $S_1$  заданы внешние напряжения на другой  $S_2$  — перемещения

$$\sigma_{ij} n_j = T_i^0 \text{ на } S_1, \quad u_j = u_j^0 \text{ на } S_2 \quad (4.2)$$

Предположим, что наряду с решением  $\varepsilon_j, u_j$ , удовлетворяющим граничным условиям (4.2), существует решение  $\varepsilon_j^*, u_j^*$ , удовлетворяющее тем же граничным условиям. Причем предположим, что  $u_j$  и  $u_j^*$  сколь угодно близки, то есть  $u_j^* = u_j + \delta u_j$ . Тогда виртуальная работа поверхностных сил и объемных сил на вариациях перемещения соответствующего разности решений  $u_j^*$  и  $u_j$  для первого решения согласно (4.1), равна

$$\int_S P_j \delta u_j dS + \int_V P_j \delta u_j dV = \int_V \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{pq}} \right) \delta \varepsilon_{pq} dV \quad (4.3)$$

но выражение, стоящее под интегралом в правой части равенства (4.3) есть удельная элементарная работа деформации  $\delta W$  и поскольку  $W$  является также функцией  $J_1$  и  $J_2$ , то справедливо

$$\left(\frac{\partial W}{\partial e_{pq}}\right)' \delta e_{pq} = \left(\frac{\partial W}{\partial J_k}\right)' (\delta J_k)', \quad k=1, 2$$

и

$$\int_S F_j' \delta u_j dS + \int_V P_j' \delta u_j dV = \int_V \left(\frac{\partial W}{\partial J_k}\right)' (\delta J_k)' dV \quad (4.4)$$

Аналогично, для второго решения имеем

$$\int_S F_j' \delta u_j dS + \int_V P_j' \delta u_j dV = \int_V \left(\frac{\partial W}{\partial J_k}\right)'' (\delta J_k)'' dV \quad (4.5)$$

Покажем, что с точностью до малых более высокого порядка значения  $\delta J_k$  и  $\delta J_k''$  совпадают. В самом деле  $\delta J_1 = \delta J_1'' = 1/3(\delta e_{11} + \delta e_{22} + \delta e_{33})$ ,

$$\delta J_2 = \frac{e_{pq}'' \delta e_{pq}}{\sqrt{e_{pq}' e_{pq}'}} \quad \delta J_2'' = \frac{e_{pq}'' \delta e_{pq}}{\sqrt{e_{pq}' e_{pq}'}}$$

Поскольку  $e_{pq}'' = e_{pq}' + \delta e_{pq}''$ , то получим

$$\delta J_2 = \left| \frac{e_{pq}''}{\sqrt{e_{pq}' e_{pq}'}} + o(\delta e_{pq}'') \right| \delta e_{pq}''$$

Поэтому

$$\delta J_2 = \delta J_2'' + o(\delta e_{pq}'') \delta e_{pq}''$$

Отбрасывая малые более высокого порядка, чем  $\delta e_{pq}''$ , получим  $\delta J_1 = \delta J_2''$ .

Составляя теперь разность выражений (4.4) и (4.5), получаем

$$\int_S \Delta F_j' \delta u_j dS = \int_V \Delta \left(\frac{\partial W}{\partial J_k}\right)' \delta J_k dV \quad (4.6)$$

Выражения в левой части равенства (4.6) тождественно равны нулю, так как  $\Delta F_j = 0$  на  $S_1$ , а  $\delta u_j = 0$  на  $S_2$ . Если же наложить на функцию  $W$  условия выпуклости, то подынтегральное выражение в правой части равенства (4.6) будет всегда больше нуля, что обеспечивает единственность решения.

Известно, что необходимым и достаточным условием выпуклости функции  $f$  является положительная определенность гесссiana

$$c_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j}$$

Находим для  $W$

$$c_{11} = \frac{\partial^2 W}{\partial J_1^2} = \gamma'', \quad c_{22} = \frac{\partial^2 W}{\partial J_2 \partial J_2} = -\gamma' \gamma'' + \gamma'$$

$$c_{33} = \frac{\partial^2 W}{\partial J_2^2} = -2\gamma' \gamma'' + \gamma'' \gamma'' + 2\gamma'$$

Вычисляя главные миноры матрицы  $\{c_{ij}\}$

$$\Delta_1 = c_{11} = \beta^2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} = 2\gamma\beta^2 - (\gamma')^2$$

и накладывая на них условия положительности, получаем достаточное условие единственности

$$\beta^2 > 0, \quad 2\gamma\beta^2 - (\gamma')^2 > 0 \quad (4.7)$$

Поскольку из положительной определенности потенциала следует, что  $\beta > 0$ , то при выполнении второго условия (4.7) первое также выполняется. Таким образом, условия единственности решения можно записать в виде

$$\beta > 0, \quad 2\gamma\beta^2 - (\gamma')^2 > 0 \quad (4.8)$$

Заметим, что условия (4.8) являются также достаточными для взаимной однозначности между параметрами  $\beta$  и  $\beta'$ , как это видно из (2.3).

В заключение отметим, что между введенным ранее параметром вида напряженного состояния  $\beta$  и использованным в данной работе параметром  $\beta'$  существует простая зависимость  $\beta' = \sqrt{2\beta} / [3(3 - \beta^2)]$ . Таким образом, неограниченный интервал изменения параметра  $\beta'$  спадает к конечному интервалу для параметра  $\beta$ . Это часто бывает полезным при проведении расчетов с помощью того или иного численного метода.

## ՏԱՐԱԼՈՒԿՈՒԹՅԱՆ ԻՍԿԱՅԻՆՆԵՐԻ ԻՏԵՎԱՆԵԿԱՅԻ ՈՐՈՇԻՉ ԿԱՊԱԿՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԻՍԿՈՒՆ

Ե. Վ ԼՕՄԱՆՆ, Ը Ա ԵՎԵԿՈ Ո Ա ՉԵՐՆՉՈՎ

### Ս մ փ ո փ ո ս մ

Ուսումնասիրվում են տարամոդուլ մարմինների մեխանիկայի որոշիչ կապակցությունների հետազոտման հետ կապված հարցեր: Քննարկվում են շարվածային վիճակի տեսքից ղեկորմացիոն բնութագրիչների կախվածության նկարագրման համար տարրեր պարամետրերի սզտազործման հնարավորությունը:

Վերլուծված են առաձգակամության տեսության որոշ թևորեմների իրավացիությունը տաթամոդուլ նյութերի համար:

Ստացված են եզրային խնդիրների լուծման միակության պայմաններ:

# ON CONSTITUTIVE RELATIONS IN THE MECHANICS OF MULTIMODULUS MATERIALS

E. V. LOMAKIN, V. A. SVEKLO, O. A. CHERNYSHOV

## S u m m a r y

Some problems of constitutive relations for multimodulus materials are considered. The possibilities of different parameters for the description of the dependence of deformation properties on the stress state are discussed. Some theorems referring to the theory of elasticity are analysed for multimodulus materials. The conditions of the unique solution for the boundary problem are defined.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ломакин Е. В., Работкин Ю. П. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела.—Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 6.
2. Албарцумян С. А. Разномодульная теория упругости. М.: «Наука», 1982.
3. Амензаде Ю. А. Теория упругости. М.: «Высшая школа», 1976.
4. Хилл. Новые горизонты в механике твердых тел.—Механика, 1957, № 4.
5. Хилл. О единственности и устойчивости в теории конечных упругих деформаций.—Механика. 1958, № 3.

Калининградский технический институт  
рыбной промышленности и хозяйства

Поступила в редакцию  
18.IV.1983.