ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Физика XXXVIII, № 2, 1983 Механика

УДК 539.37 : 539.219.2 : 517.968

ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОГО КОЛЬЦА С УЧЕТОМ СИЛ СЦЕПЛЕНИЯ

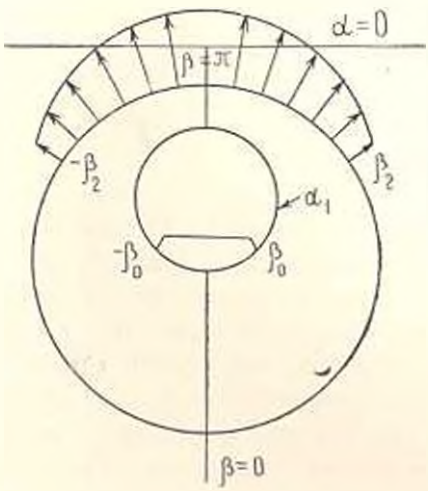
ГУЛКАНЯН Н. О., МКРТЧЯН А. М.

Плоская задача теории упругости для эксцентрического кольца, когда вдоль контуров приложены напряжения, решалась в [1, 2]. Решению плоской смешанной задачи для эксцентрического кольца, нагруженного по внутреннему контуру известной нагрузкой и соприкасающегося по наружному контуру с жесткой средой, посвящена работа [3]. Контактные задачи для эксцентрического кольца рассматривались в работах [4, 5]. В работе [4] эта задача решалась методами теории аналитических функций в случае, когда эксцентрическое кольцо по внешнему контуру неподвижно сцеплено с двумя жесткими штампами, симметрично расположенными относительно действительной оси и находящимися под действием двух равных и диаметрально противоположных сил, а внутренний контур свободен от напряжений. В статье [5] решалась задача о вдавливании штампа в упругое эксцентрическое кольцо, когда между штампом и материалом кольца отсутствует трение. Контактным задачам для частного случая эксцентрического кольца, а именно: для полуплоскости с круговым отверстием, к которой приложены штампы, без учета трения посвящены работы [6—8], а при наличии сцепления между штампами и полуплоскостью — работы [8—11].

В данной статье в биполярных координатах при помощи функции напряжений, представленной в виде рядов Фурье, и сингулярных интегральных уравнений решены плоские контактные задачи для эксцентрического кольца, прикрепленного с внутренней (или внешней) поверхности кольца к одному или к двум симметрично расположенным жестким штампам при полном сцеплении между штампами и материалом кольца. Принято, что штампы неподвижные и деформация происходит вследствие нагрузок, приложенных к остальным частям границы кольца. По всему контуру кольца вне штампов считаются заданными произвольные нормальные напряжения, а касательные напряжения приняты равными нулю. Выведены формулы для контактных напряжений под штампами с выделенной особенностью у краев штампов. Вычислены коэффициенты при особенностях для нескольких значений геометрических параметров и разных областей приложения нормальных нагрузок.

Решения таких задач могут быть построены также при помощи кусочно-однородных функций [12].

1. Решим контактную задачу для эксцентрического кольца, прикрепленного частью внутренней поверхности к неподвижному основанию (штампу), имеющему форму кольца (фиг. 1).



Фиг. 1

Пусть нормальная нагрузка приложена к кольцу симметрично относительно оси $\beta=0$ и $\beta=\pi$.

В силу наличия симметрии будем рассматривать только половину области кольца, требуя при этом выполнения условий симметрии

$$\tau_{\alpha\beta}(\alpha, 0)=\tau_{\alpha\beta}(\alpha, \pi)=0 \quad (\alpha_2\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1) \tag{1.1}$$

$$v(\alpha, 0)=0,\ v(\alpha, \pi)=0 \quad (\alpha_2\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1) \tag{1.2}$$

а также следующих граничных условий:

$$a\sigma_\alpha(\alpha_2, \beta)=f_2(\beta) \quad (0\leqslant\beta\leqslant\pi) \tag{1.3}$$

$$\tau_{\alpha\beta}(\alpha_2, \beta)=0$$

$$\tau_{\alpha\beta}(\alpha_1, \beta)=0,\quad a\sigma_\alpha(\alpha_1, \beta)=f_1(\beta) \quad (\beta_0\leqslant\beta\leqslant\pi) \tag{1.4}$$

$$u(\alpha_1, \beta)=0 \quad (0\leqslant\beta\leqslant\beta_0) \tag{1.5}$$

$$v(\alpha_1, \beta)=0$$

Здесь a — половина расстояния между полюсами системы.

Обозначая неизвестные нормальное и касательное напряжения под штампом соответственно через $\sigma(\beta)$ и $\tau(\beta)$ и принимая, что по всему контуру кольца известны напряжения, решим первую основную задачу теории упругости.

Представим напряжения в виде рядов Фурье

$$a\sigma_\alpha(\alpha_2, \beta)=f_2(\beta)-(\operatorname{ch}\alpha_2-\cos\beta)\left[\frac{f_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}f_k\cos k\beta\right]$$

$$a\tau_{\alpha\beta}(\alpha_1, \beta)=\begin{cases}\tau(\beta) & (0\leqslant\beta\leqslant\beta_0)\\ 0 & (\beta_0\leqslant\beta\leqslant\pi)\end{cases}-(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)\sum_{k=1}^{\infty}t_k\sin k\beta$$

$$a\sigma_\alpha(\alpha_1, \beta)=\begin{matrix}\sigma(\beta) & (0\leqslant\beta\leqslant\beta_0)\\ f_1(\beta) & (\beta_0\leqslant\beta\leqslant\pi)\end{matrix}-(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)\left[\frac{S_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}S_k\cos k\beta\right] \tag{1.6}$$

где

$$t_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\beta_0}\frac{\tau(\beta)\sin k\beta\,d\beta}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta},\qquad f_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f_2(\beta)\cos k\beta\,d\beta}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}$$

$$\frac{f_0}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f_2(\xi)d\xi}{\operatorname{ch}\alpha_2-\cos\xi},\qquad S_k=\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\frac{s(\xi)\cos k\xi\,d\xi}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi}+\right.$$

$$\left.+\int_0^{\pi}\frac{f_1(\xi)\cos k\xi d\xi}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi}\right|,\quad \frac{S_0}{2}=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\frac{s(\xi)d\xi}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi}+\int_0^{\pi}\frac{f_1(\xi)d\xi}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi}\right|$$

Функцию напряжений $\Phi(\alpha,\beta)$ ищем в виде

$$g\Phi(\alpha,\beta)=A\beta\sin\beta+E_0\operatorname{sh}\alpha+F_0\alpha\operatorname{sh}\alpha+\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_k(\alpha)\cos k\beta$$

где $g=\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta$.

Используя связи напряжений и перемещений с функцией $g\Phi$ [1], выразим напряжения и перемещения через коэффициенты A, E_0, F_0 и через функцию $\Psi_k(\alpha)$ [5].

Представляя функцию $\Psi_k(\alpha)$ в виде

$$\Psi_1(\alpha)=E_1\operatorname{sh}2(\alpha-\alpha_2)+G_1\operatorname{ch}2(\alpha-\alpha_2)+F_1(\alpha-\alpha_2)+H_1$$

$$\Psi_k(\alpha)=E_k\operatorname{sh}(\alpha_1-\alpha)\operatorname{sh}k(\alpha_1-\alpha)+G_k\operatorname{sh}k(\alpha_1-\alpha)\operatorname{sh}(\alpha-\alpha_2)+ \tag{1.7}$$

$$+F_k\operatorname{sh}k(\alpha-\alpha_2)\operatorname{sh}(\alpha_1-\alpha)+H_k\operatorname{sh}k(\alpha-\alpha_2)\operatorname{sh}(\alpha-\alpha_1)\quad(k\geqslant 2)$$

автоматически удовлетворим условиям (1.1) и первому из условий (1.2). Для выполнения второго условия (1.2) достаточно принять

$$F_0=A\frac{\mu}{\lambda+2\mu}$$

здесь λ и μ — постоянные Ламе.

Согласно второму условию (1.3) имеем $\Psi_k'(\alpha_2)=0$, а согласно (1.6) и первому условию (1.4) имеем $\Psi_1(\alpha_1)=f_k/k$.

Удовлетворяя первому условию (1.3), отделяя главную часть полученного выражения и разлагая остальную часть этого выражения в ряд по косинусам, а также учитывая (1.6), найдем

$$f_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{A\left[2\cos^2\beta(\operatorname{ch}\alpha_2-\cos\beta)-\sin^2\beta\right]-A\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\operatorname{sh}^2\alpha_2+\right.$$

$$\left.+\sin^2\beta\sum_{p=1}^{\infty}p\Psi_p(\alpha_2)\sin p\beta+\operatorname{ch}\alpha_2\sum_{p=1}^{\infty}\Psi_p(\alpha_2)\cos p\beta\right\}\frac{d\beta}{\operatorname{ch}\alpha_2-\cos\beta} \tag{1.8}$$

$$-k^2\Psi_k(\alpha_2)=f_k+F_k(\alpha_2) \tag{1.9}$$

где

$$F_k(\alpha_2)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\frac{f_0}{2}(\operatorname{ch}\alpha_2-\cos\beta)-A\left[2\cos\beta(\operatorname{ch}\alpha_2-\cos\beta)-\sin^2\beta\right]+\right.$$

$$\left.+A\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\operatorname{sh}^2\alpha_2-\sin^2\beta\sum_{p=1}^{\infty}p^2\Psi_p(\alpha_2)\sin p\beta-\operatorname{ch}\alpha_2\sum_{p=1}^{\infty}\Psi_p(\alpha_2)\cos p\beta\right\}\frac{\cos k\beta d\beta}{\operatorname{ch}\alpha_2-\cos\beta} \tag{1.10}$$

Вводя обозначение $Z_k = -k^2\Psi_k(\alpha_2)$ и пользуясь известными значениями интегралов [1], входящих в (1.9) и (1.10), для определения значений Z_k и A получим совместную систему уравнений

$$A = \frac{1}{\exp(-\alpha_2) + \frac{p}{\lambda+2\mu}} \left\{ -\frac{f_0}{2} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\exp(-p\alpha_2)}{p^2} Z_p (p + \operatorname{cth}\alpha_2) \right\}$$

$$Z_k = -A\left[\delta_{1k} + 2\operatorname{sh}\alpha_1 \exp(-k\alpha_1)\right] + 2A\frac{p}{\lambda+2\mu}\operatorname{sh}\alpha_1 \exp(-k\alpha_1) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Z_p}{p^2} \cdot I^*_{kp}(\alpha_2) + f_k, \quad \text{где}$$

$$I^*_{kp}(\alpha_2) = \frac{p}{2}\left\{ 2\exp(-(p+k)\alpha_2) + \frac{1}{\operatorname{sh}\alpha_2}\left[\exp(-|k-p+1|\alpha_2) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\exp(-|p-k+1|\alpha_2)\right] + \operatorname{cth}\alpha_2\left[\exp(-|p-k|\alpha_2) + \exp(-(p+k)\alpha_2)\right]\right.$$

$$\delta_{1k} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq 1 \\ 1, & \text{если } k = 1 \end{cases} \tag{1.11}$$

Удовлетворяя второму условию из (1.6) и поступая аналогичным образом, как и при удовлетворении первого условия (1.3), найдем

$$S_0 = -2A\left[\exp(-\alpha_1) + \frac{p}{\lambda+2\mu}\operatorname{sh}\alpha_1\right] - 2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{f_p}{p}\exp(-p\alpha_1) -$$

$$-2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{S_p + F_p}{p^2}(p + \operatorname{cth}\alpha_1)\exp(-p\alpha_1) \tag{1.12}$$

$$\Psi_k(\alpha_1) = -\frac{S_k}{k^2} - \frac{F_k}{k^2}, \quad \text{где}$$

$$F_k = -A\left[2\delta_{1k} - \frac{\exp(-k\alpha_1)}{\operatorname{sh}\alpha_2} + \frac{1}{2\operatorname{sh}\alpha_2}(\exp(-|k-2|\alpha_1) + \exp(-(k+2)\alpha_1)) - \right.$$

$$\left. -\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\operatorname{sh}\alpha_1\exp(-k\alpha_1)\right] + \sum_{p=1}^{\infty}\frac{f_p}{p}\left[\exp(-|p-k|\alpha_1 + \exp(-(p+k)\alpha_1)\right] +$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{S_p + F_p}{p^2} I^*_{kp}(\alpha_1) \tag{1.13}$$

$I^*_{kp}(\alpha_1)$ имеет такой же вид, как и $I^*_{kp}(\alpha_2)$, в котором α_2 заменено на α_1.

Перейдем теперь к решению поставленной задачи, когда на внутреннем контуре заданы смешанные граничные условия, то есть удовлетворим условиям (1.5).

После некоторых преобразований получим

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\mu}{\lambda+2\mu}k\Psi_k(\alpha_1) - \Psi'_k(\alpha_1)\right]\sin k\beta = \bar{R}^*_n(\beta)$$

$$(0 < \beta < \beta_0)$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left[k\Psi_k(\alpha_1) - \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\Psi'_k(\alpha_1)\right]\cos k\beta = \bar{R}^*_n(\beta) \tag{1.14}$$

где

$$R_1^*(\beta) = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\overline{R}_1(\beta) +$$

$$+\frac{1}{2}\left\{-2N_1^*\Psi_1^*(\alpha_1)+2[\Psi_1(\alpha_1)-\Psi_1(\alpha_2)]\left|1-\operatorname{ch}2(\alpha_1-\alpha_2)\right|\frac{1}{\Delta_1}\right|\sin\beta$$

$$\overline{R}_2(\beta)=\overline{R}_1(\beta)-\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sin k\beta}{R}\{-(k^2-1)M_k\Psi_k(\alpha_1)+2kN_k^*\Psi_k^*(\alpha_1)+$$

$$+(k^2-1)Q_k\Psi_k(\alpha_2)\}$$

$$\overline{R}_1(\beta)=-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left|A\sin\beta-\frac{\sin\beta\operatorname{sh}\alpha_1}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}F_0-\frac{\alpha_1\sin\beta\operatorname{sh}\alpha_1}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}\frac{\mu}{\lambda+2\mu}A\right|+$$

$$+\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}A\sin\beta\left(1-\frac{\alpha_1\operatorname{sh}\alpha_1}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}\right)+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_k(\alpha_1)\cos k\beta+$$

$$+\frac{\operatorname{sh}\alpha_1}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\left|\Psi_1^*(\alpha_1)\sin\beta+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sin k\beta}{k}[2k(1+N_k)\Psi_k(\alpha_1)-\right.$$

$$\left.-\Psi_k^*(\alpha_1)M_k-R_k\Psi_k(\alpha_2)]\right|$$

$$\overline{R}_2^*(\beta)=\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\overline{f}_2(\beta)-\Psi_2(\alpha_1)\cos\beta+\frac{1}{2}\Psi_1^*(\alpha_1)\cos\beta$$

$$\overline{R}_2(\beta)=\overline{G}_1(\beta)+\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\sum_{k=2}^{\infty}\cos k\beta[2kN_k\Psi_k(\alpha_1)-\Psi_k^*(\alpha_1)M_k-R_k\Psi_k(\alpha_2)]$$

$$\overline{G}_1(\beta)=-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left\{\frac{\mu}{\lambda+2\mu}A\operatorname{sh}\alpha_1+\frac{\mu}{\lambda+2\mu}A\alpha_1\frac{1-\operatorname{ch}\alpha_1\cos\beta}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}+F_0\frac{1-\operatorname{ch}\alpha_1\cos\beta}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}-\right.$$

$$\left.-\frac{\operatorname{sh}\alpha_1}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_k(\alpha_1)\cos k\beta\right\}+\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\left|\frac{\mu}{\lambda+2\mu}A\operatorname{sh}\alpha_1+\right.$$

$$\left.+A\alpha_1\frac{1-\operatorname{ch}\alpha_1\cos\beta}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}\right|-\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\frac{\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}\left|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sin k\beta}{k}\Psi_k(\alpha_1)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^2-1}{k}\sin k\beta\int_0^{\alpha_1}\Psi_k(\alpha)d\alpha\right|-\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\frac{\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}\sin\beta\Psi_1^*(\alpha_1)\qquad(1.15)$$

$$N_1^*=\frac{1}{2\Delta_1}\{2-[1+2(\alpha_1-\alpha_2)]\exp(-2(\alpha_1-\alpha_2))-\operatorname{ch}2(\alpha_1-\alpha_2)\}$$

$$\Delta_1=\operatorname{ch}2(\alpha_1-\alpha_2)-(\alpha_1-\alpha_2)\operatorname{sh}2(\alpha_1-\alpha_2)-1$$

$$M_k=\frac{1}{\Delta}2k^2\operatorname{sh}^2(\alpha_1-\alpha_2)$$

$$N_k^*=\frac{1}{\Delta}\{\operatorname{sh}k(\alpha_1-\alpha_2)\exp(-k(\alpha_1-\alpha_2))+k^2\operatorname{sh}^2(\alpha_1-\alpha_2)-k\operatorname{sh}(\alpha_1-\alpha_2)\operatorname{ch}(\alpha_1-\alpha_2)\}$$

$$Q_k = 2k \operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{sh} k(\alpha_1 - \alpha_2) \frac{1}{\Delta}$$

$$\Delta = \operatorname{sh}^2 k(\alpha_1 - \alpha_2) - k^2 \operatorname{sh}^2(\alpha_1 - \alpha_2) \tag{1.15}$$

$$N_k = \frac{1}{\Delta}\{\operatorname{sh} k(\alpha_1 - \alpha_2) \exp(-k(\alpha_1 - \alpha_2)) + k^2 \operatorname{sh}^2(\alpha_1 - \alpha_2) +$$

$$+ k \operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{ch}(\alpha_1 - \alpha_2)\}$$

$$R_k = \frac{2k}{\Delta}\{\operatorname{sh} k(\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{ch}(\alpha_1 - \alpha_2) + k \operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{ch} k(\alpha_1 - \alpha_2)\}$$

Выражая $\Psi_k(\alpha_1)$ и $\Psi_k(\alpha_1)$ через неизвестные напряжения $\sigma(\xi)$ и $\tau(\xi)$ и воспользовавшись значениями рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\beta \cdot \cos k\xi}{k} = \frac{1}{2}\begin{cases} -\beta & (\beta > \xi) \\ -\xi & (\xi > \beta) \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\beta \cdot \sin k\xi}{k} = \frac{1}{2}\left\{\ln \frac{1}{2\sin\frac{|\beta-\xi|}{2}} - \ln \frac{1}{2\sin\frac{\beta+\xi}{2}}\right\}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\beta \cos k\xi}{k} = \frac{1}{2}\left\{\ln \frac{1}{2\sin\frac{|\beta-\xi|}{2}} + \ln \frac{1}{2\sin\frac{\beta+\xi}{2}}\right\}$$

приведем (1.14) к виду

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\beta_0} \frac{\sigma(\xi)d\xi}{\operatorname{ch}\alpha_1 - \cos\xi}\left\{\ln \frac{1}{2\sin\frac{|\beta-\xi|}{2}} + \ln \frac{1}{2\sin\frac{\beta+\xi}{2}}\right\} + \frac{\nu}{\lambda+2\mu}\int_0^{\beta_0} \frac{\tau(\xi)d\xi}{\operatorname{ch}\alpha_1 - \cos\xi} =$$

$$= Q_a^*(\beta) \tag{1.16}$$

$$\frac{\nu}{\lambda+2\mu}\int_0^{\beta_0} \frac{\sigma(\xi)d\xi}{\operatorname{ch}\alpha_1 - \cos\xi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\beta_0} \frac{\tau(\xi)d\xi}{\operatorname{ch}\alpha_1 - \cos\xi}\left\{\ln \frac{1}{2\sin\frac{|\beta-\xi|}{2}} - \ln \frac{1}{2\sin\frac{\beta+\xi}{2}}\right\} =$$

$$= Q_b^*(\beta) \qquad (0 < \beta < \beta_0)$$

где

$$Q_a^*(\beta) = R_a^*(\beta) - \frac{1}{\pi}\int_{\beta_0}^{\pi} \frac{f_1(\xi)d\xi}{\operatorname{ch}\alpha_1 - \cos\xi}\left\{\ln \frac{1}{2\sin\frac{|\beta-\xi|}{2}} + \ln \frac{1}{2\sin\frac{\beta+\xi}{2}}\right\} -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k}{k}\cos k\beta + \frac{\nu}{\lambda+2\mu}\frac{1}{\pi}\int_0^{\beta_0} \frac{\xi\tau(\xi)d\xi}{\operatorname{ch}\alpha_1 - \cos\xi}$$

$$Q_b^*(\beta) = R_b^*(\beta) + \frac{\nu}{\lambda+2\mu}\frac{\beta}{\pi}\int_0^{\beta_0} \frac{\sigma(\xi)d\xi}{\operatorname{ch}\alpha_1 - \cos\xi} + \frac{\nu}{\lambda+2\mu}\frac{\beta}{\pi}\int_{\beta_0}^{\pi} \frac{f_1(\xi)d\xi}{\operatorname{ch}\alpha_1 - \cos\xi} -$$

$$- \frac{\nu}{\lambda+2\mu}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k\beta}{k} F_k$$

Дифференцируя обе части (1.16) по β и принимая во внимание, что $\sigma(\xi)$—четная, а $\tau(\xi)$—нечетная функции, сведем (1.16) к системе уравнений:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\beta_0}^{\beta_0}\frac{\sigma(\xi)}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi}\operatorname{ctg}\frac{\beta-\xi}{2}\,d\xi-\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\tau(\beta)}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}=Q_\sigma(\beta)=Q_\sigma^*(\beta)$$

$$\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\tau(\beta)}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}-\frac{1}{2\pi}\int_{-\beta_0}^{\beta_0}\frac{\tau(\xi)}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi}\operatorname{ctg}\frac{\beta-\xi}{2}\,d\xi=Q_\tau(\beta)=Q_\tau^*(\beta)\qquad(1.17)$$

Если сложить первое и второе уравнения (1.17) и ввести обозначение $\sigma(\beta)+i\tau(\beta)=(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)P(\beta)$, то для определения $P(\beta)$ получим сингулярное интегральное уравнение с ядром Гильберта

$$P(\beta)-\frac{i}{\pi(1-\nu)}\int_{-\beta_0}^{\beta_0}P(\xi)\operatorname{ctg}\frac{\xi-\beta}{2}\,d\xi=Q(\beta)=\frac{2}{1-\nu}\left|Q_\sigma(\beta)-iQ_\tau(\beta)\right|$$

здесь ν—коэффициент Пуассона.

Решение этого уравнения имеет вид [12]

$$P(\beta)=A^0Q(\beta)+B^0\frac{X(\beta)}{2\pi}\int_{-\beta_0}^{\beta_0}\frac{Q(\tau)d\tau}{X(\tau)\sin\dfrac{\tau-\beta}{2}}-2B(\beta)X(\beta)\left|A_1\sin\frac{\beta}{2}+B_1\cos\frac{\beta}{2}\right|\qquad(1.18)$$

где

$$A^0=-\frac{(1-\nu)^2}{(\nu+1)(3-\nu)},\quad B^0=-\frac{2i(1-\nu)}{(\nu+1)(3-\nu)},\quad A_1=iB_1\operatorname{th}\gamma\beta_0$$

$$X(z)=\left(\sin\frac{\beta_0-z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\gamma}\left(\sin\frac{\beta_0+z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\gamma},\quad\gamma=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{3-\nu}{1+\nu}\qquad(1.19)$$

Если проинтегрировать (1.18) от $-\beta_0$ до β_0, то получим значение B_1

$$B_1=-\frac{\operatorname{ch}\gamma\pi\operatorname{ch}\gamma\beta_0}{2\operatorname{ch}2\gamma\beta_0}\left|S_0-\frac{2}{\pi}\int_{-\beta_0}^{\beta_0}\frac{f_2(\xi)d\xi}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi}\right|$$

Если же умножить выражение (1.18) вначале на $\sin mx\,dx$ и проинтегрировать от $-\beta_0$ до β_0, а затем умножить на $\cos mx\,dx$ и проинтегрировать в тех же пределах, то после ряда преобразований получим систему уравнений

$$t_k=\sum_{m=1}^{\infty}a_{km}^{(1)}t_m+\sum_{m=1}^{\infty}b_{km}^{(1)}S_m+\sum_{m=1}^{\infty}c_{km}^{(1)}F_m+S_0T_{m1}^{(1)}+E_0T_{m1}^{(1)}+\bar{\gamma}_k^{(1)}$$

$$S_k=\sum_{m=1}^{\infty}a_{km}^{(2)}t_m+\sum_{m=1}^{\infty}b_{km}^{(2)}S_m+\sum_{m=1}^{\infty}c_{km}^{(2)}F_m+S_0T_{m2}^{(2)}+E_0T_{m2}^{(2)}+\bar{\gamma}_k^{(2)}\qquad(1.20)$$

где

$$\bar{\gamma}_k^{(1)} = 4G_0 \sum_{l=1}^{\infty} \left| \bar{F}(-m+l, 1) \int_0^{\beta_0} W(\beta) \left| f_1^*(\beta) \cos(C(\beta)) + f_2^*(\beta) \sin(C(\beta)) \right| d\beta + \right.$$

$$\left. + \bar{F}(l, 1) \int_0^{\beta_0} W(\beta) \left| f_1^*(\beta) \cos(C(\beta) - m\beta) + f_2^*(\beta) \sin(C(\beta) - m\beta) \right| \right|$$

$$\bar{\gamma}_m^{(2)} = 4G_0 \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \bar{F}(l, 1) \int_0^{\beta_0} W(\beta) \left| f_1^*(\beta) \cos(C(\beta) - m\beta) + f_2^*(\beta) \sin(C(\beta) - m\beta) \right| - \right.$$

$$\left. - \bar{F}(l-m, 1) \int_0^{\beta_0} W(\beta) \left| f_1^*(\beta) \cos(C(\beta)) + f_2^*(\beta) \sin(C(\beta)) \right| \right\}$$

$$f_1^*(\beta) = A \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \cos\beta - A z_1 \frac{\operatorname{sh} z_1 (\operatorname{ch} z_1 \cos\beta - 1)}{(\operatorname{ch} z_1 - \cos\beta)^2} \left(1 - \frac{\mu^2}{(\lambda + 2\mu)^2} \right) + \psi^{(1)}(\beta)$$

$$f_2^*(\beta) = \frac{z_1 \operatorname{sh}^2 z_1 \sin\beta}{(\operatorname{ch} z_1 - \cos\beta)^2} A - \frac{A z_1 \mu^2}{(\lambda + 2\mu)^2} \frac{\operatorname{sh}^2 z_1 \sin\beta}{(\operatorname{ch} z_1 - \cos\beta)^2} + \psi^{(2)}(\beta)$$

$$\psi^{(1)}(\beta) = -\frac{1}{2(\operatorname{ch} z_1 - \cos\beta)^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{f_k}{k^2} Z_k \left| \sin k\beta (\operatorname{ch} z_1 \cos\beta - 1) + \right.$$

$$\left. + k \sin\beta \cos k\beta (\operatorname{ch} z_1 - \cos\beta) \right| - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{R_k}{k} Z_k \sin k\beta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\beta_0} \frac{f_1(\xi) d\xi}{\operatorname{ch} z_1 - \cos\xi} \left[\operatorname{ctg} \frac{\xi - \beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta + \xi}{2} \right]$$

$$\psi^{(2)}(\beta) = \frac{1}{2} \sum_{p=2}^{\infty} (p^2 - 1) Q_p \frac{Z_p}{p^2} \cos p\beta - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh} z_1}{(\operatorname{ch} z_1 - \cos\beta)^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{R_k}{k^2} Z_k \times$$

$$\times \left| \sin\beta \cdot \sin k\beta - k (\operatorname{ch} z_1 - \cos\beta) \cos k\beta \right| + Z_1 \left| 1 - \operatorname{ch} 2(z_1 - z_2) \right| \frac{\cos\beta}{\Delta_1}$$

$$T_{m1}^{(3)} = (1-\nu) G_0 \sum_{l=1}^{\infty} \left| \bar{F}(-m+l, 1) \int_0^{\beta_0} W(\beta) \cos(C(\beta)) d\beta + \bar{F}(l, 1) \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^{\beta_0} W(\beta) \cos(C(\beta) - m\beta) d\beta \right| - \frac{\operatorname{ch} \gamma\beta_0 \exp(\beta_0 \gamma)}{4 \operatorname{ch} 2\gamma\beta_0} \cdot \left\{ \left| \bar{F}(-m, 1) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \bar{F}(m, 1) \right| (1 + \operatorname{th} \gamma\beta_0) + \left| \bar{F}(1-m, 1) - \bar{F}(m+1, 1) \right| (1 - \operatorname{th} \gamma\beta_0) \right|$$

$$\gamma_{m2}^{(3)} = \frac{\operatorname{ch} \gamma\beta_0}{4 \operatorname{ch} 2\gamma\beta_0} \exp(\beta_0 \gamma) \left\{ \left| \bar{F}(-m, 1) + \bar{F}(m, 1) \right| (1 + \operatorname{th} \gamma\beta_0) + \right.$$

$$\left. + \left| \bar{F}(-m+1, 1) + \bar{F}(m+1, 1) \right| (1 - \operatorname{th} \gamma\beta_0) \right\} + (1-\nu) G_0 \sum_{l=1}^{\infty} \left| \bar{F}(l, 1) \int_0^{\beta_0} W(\beta) \times \right.$$

$$\left. \times \cos(C(\beta) - m\beta) d\beta - \bar{F}(l-m, 1) \int_0^{\beta_0} W(\beta) \cos(C(\beta)) d\beta \right|$$

$$T_{m1}^{(2)} = -2G_0(1-\nu)\operatorname{sh}\alpha_1 \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \bar{F}(l, 1) \int_0^{\beta_0} W(\beta) \left| \frac{1-\operatorname{ch}\alpha_1\cos\beta}{(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)^2} \times \right.\right.$$

$$\times \cos(C(\beta) - m\beta) + \frac{\operatorname{sh}\alpha_1\sin\beta}{(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)^2} \sin(C(\beta)-m\beta) \left.\right| d\beta +$$

$$+ \bar{F}(-m+l, 1) \int_0^{\beta_0} W(\beta) \left| \frac{1-\operatorname{ch}\alpha_1\cos\beta}{(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)^2} \cos(C(\beta)) + \frac{\operatorname{sh}\alpha_1\sin\beta}{(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)^2} \sin(C(\beta)) \right| d\beta$$

$$T_{m2}^{(2)} = -2G_0(1-\nu)\operatorname{sh}\alpha_1 \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \bar{F}(l, 1) \left| \int_0^{\beta_0} W(\beta) \frac{1-\operatorname{ch}\alpha_1\cos\beta}{(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)^2} \cos(C(\beta)-m\beta) + \right.\right.$$

$$+ \frac{\operatorname{sh}\alpha_1\sin\beta}{(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)^2} \sin(C(\beta)-m\beta) \left| d\beta - \bar{F}(l-m, 1) \int_0^{\beta_0} W(\beta) \right| \frac{1-\operatorname{ch}\alpha_1\cos\beta}{(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)^2} \times$$

$$\times \cos(C(\beta)) + \frac{\operatorname{sh}\alpha_1\sin\beta}{(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)^2} \sin(C(\beta)) \left| d\beta \right\}$$

$$W(\beta) = \sqrt{\sin\frac{\beta_0-\beta}{2}\sin\frac{\beta_0+\beta}{2}}$$

$$G_0 = \frac{2\exp(\beta_0\gamma)}{\pi(1+\nu)(3-\nu)} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}\pi\gamma}$$

$$C(\beta) = \left(l-\frac{1}{2}\right)\beta - \gamma\ln\frac{\sin\frac{\beta_0-\beta}{2}}{\sin\frac{\beta_0+\beta}{2}}$$

$$\bar{F}(\alpha, \beta) = \exp(i\alpha\beta_0) F\left(\alpha, \frac{1}{2}-i\gamma, \beta, 1-\exp(2i\beta_0)\right)$$

(здесь $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ – гипергеометрическая функция)

$$g_1^{(1)}(\beta) = -\frac{1}{2}\frac{\sin\beta}{(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)^2}[(\cos\beta\operatorname{ch}\alpha_1-1)+\cos\beta(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)] - \frac{1}{2}\sin\beta$$

$$g_1^{(2)}(\beta) = \sin\beta - \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\operatorname{sh}\alpha_1\frac{\sin\beta\operatorname{ch}\alpha_1}{(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)^2}$$

$$g_1^{(3)}(\beta) = \frac{\operatorname{sh}\alpha_1}{2}\frac{\operatorname{ch}\alpha_1\cos\beta-1}{(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)^2} - N_1'\cos\beta$$

$$g_1^{(4)}(\beta) = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}[\cos\beta(\operatorname{ch}\alpha_1\cos\beta-1) - \sin^2\beta(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)] \times$$

$$\times \frac{1}{(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)^2} + [1-\operatorname{ch}2(\alpha_1-\alpha_2)]\frac{1}{\Delta_1}\cos\beta$$

$$g_p^{(1)}(\xi) = \frac{1}{2}\sin p\xi \cdot M_p + \frac{1}{2}\frac{M_p}{p^2}\frac{1}{(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi)^2}\{\sin p\xi(\operatorname{ch}\alpha_1\cos\xi-1) +$$

$$+ p\sin\xi\cos p\xi(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi)\} \qquad (p \geqslant 2)$$

$$g_p^{(2)}(\xi) = -\sin p\xi \cdot N_p - \frac{\nu}{\lambda+2\mu}\operatorname{sh}\alpha_1\frac{1}{p^2}\frac{1}{(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi)^2} \cdot [p\sin p\xi(\operatorname{ch}\alpha_1 -$$

$$-\cos\xi) + \sin\xi\cos p\xi] - (1+N_p)\frac{1}{p^2}\frac{1}{(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi)^2}[\sin p\xi(\operatorname{ch}\alpha_1\cos\xi-1) +$$

$$+ p\sin\xi\cos p\xi \cdot (\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi)] \qquad (p \geqslant 2)$$

$$g_p^{(3)}(\xi) = -\cos p\xi \cdot N_p^* - \frac{\operatorname{sh}\alpha_1}{2p^2}M_p[p\cos p\xi(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi) -$$

$$-\sin\xi\cdot\sin p\xi]\cdot\frac{1}{(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi)^2} \qquad (p \geqslant 2)$$

$$g_p^{(4)}(\xi) = \frac{1}{2}\cos p\xi\frac{p^2-1}{p^2}M_p + \frac{\nu}{\lambda+2\mu}\frac{1}{p^2}[\cos p\xi(\operatorname{ch}\alpha_1\cos\xi-1) -$$

$$-p\sin\xi\sin p\xi(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi)]\frac{1}{(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi)^2} + \frac{\operatorname{sh}\alpha_1}{p^2}(1+N_p)\times$$

$$\times[p\cos p\xi(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi) - \sin\xi\sin p\xi]\frac{1}{(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi)^2} \qquad (p \geqslant 2)$$

$\overline{S}_m^{(i)}$ $(i=1, 2)$ — операторы, которые в применении к некоторой функции $f(\xi)$ после ряда преобразований и использования значений интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X(\xi)\,d\xi}{\sin\frac{\beta-\xi}{2}} = 2\pi i\,X(\beta)\operatorname{th}\pi\gamma$$

$$\int_0^1 t^{\gamma-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tz)^{-\alpha}dt = B(\beta,\ \gamma-\beta)F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z) \quad (\operatorname{Re}\gamma>\operatorname{Re}\beta>0)$$

где $B(\alpha, \beta)$ — бета-функция, приводятся к виду

$$\overline{S}_m^{(1)} = \frac{B^0}{2\operatorname{ch}\pi\gamma}\sum_{l=1}^{m}\left[\overline{F}(-m+l,\ 1)\int_b^b\frac{f(-i\ln y)\,y^{l-2}dy}{(b-y)^{\frac{1}{2}+i\gamma}(y-\overline{b})^{\frac{1}{2}-i\gamma}} + \right. \qquad (1.21)$$

$$\left. + \overline{F}(l,\ 1)\int_{\overline{b}}^{b}\frac{f(-i\ln y)\,y^{l-2-m}\,dy}{(b-y)^{\frac{1}{2}+i\gamma}(y-\overline{b})^{\frac{1}{2}-i\gamma}}\right]$$

$$\overline{S}_m^{(2)} = \frac{B^0 i}{2}\frac{1}{\operatorname{ch}\pi\gamma}\sum_{l=1}^{m}\left[\overline{F}(l,\ 1)\int_{\overline{b}}^{b}\frac{f(-i\ln y)\,y^{l-2-m}\,dy}{(b-y)^{\frac{1}{2}+i\gamma}(y-\overline{b})^{\frac{1}{2}-i\gamma}} - \right.$$

$$\left. - \overline{F}(l-m,\ 1)\int_{\overline{b}}^{b}\frac{f(-i\ln y)\,y^{l-2}\,dy}{(b-y)^{\frac{1}{2}+i\gamma}(y-\overline{b})^{\frac{1}{2}-i\gamma}}\right]$$

$$b=\exp(i\beta_0),\quad \bar{b}=\exp(-\beta_0 i)$$

Из условия $u(\beta)=0$ при $\beta=0$ находим значение E_0

$$E_0=-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}A\operatorname{sh}\alpha_1+A\alpha_1\left(\frac{\lambda+2\mu}{\mu}-\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\right)+t_1+\sum_{p=2}^{\infty}\frac{t_p}{p}\left[1+\frac{\lambda+2\mu}{2\mu}M_p\right]+$$

$$+\sum_{p=2}^{\infty}\frac{F_p+S_p}{p^2}\left[\operatorname{cth}\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\lambda+2\mu}{\mu}p(1+N_p)\right]-\frac{\lambda+2\mu}{2\mu}\sum_{p=2}^{\infty}R_p\frac{Z_p}{p}+(F_1+S_1)\operatorname{cth}\frac{\alpha_1}{2} \tag{1.22}$$

Итак, имеем совокупность бесконечных уравнений (1.13), (1.20), из решения которой находим значения неизвестных S_k, F_k и t_k. Суммы модулей коэффициентов системы (1.20) имеют порядок $\ln k/\sqrt{k}$, а системы (1.13) имеют порядок $O(k^{-3/2})$. Свободные члены этих систем ограничены и стремятся к нулю, как $1/\sqrt{k}$.

Подставляя в (1.18) найденные значения неизвестных, определим приведенное напряжение $P(\beta)$. Отделяя мнимую и действительную части полученного выражения, найдем значения контактных напряжений $\sigma(\beta)$ и $\tau(\beta)$ с выделенной особенностью.

Заметим, что заменяя α_1 на α_2, будем иметь решение этой же задачи, когда кольцо прикреплено к неподвижному штампу снаружи.

Аналогичным образом может быть рассмотрена плоская контактная задача для эксцентрического кольца с двумя симметричными относительно оси $\beta=0$ и $\beta=\pi$ участками закрепления кольца к жестким неподвижным штампам при наличии сцепления, когда на остальных частях контура кольца заданы напряжения.

2. В качестве числового примера для задачи, рассмотренной в п. 1, вычислены коэффициенты при особенности контактных напряжений для различных значений β_0, α_2 и области β_0 приложения нагрузки на контуре $\alpha=\alpha_2$.

После некоторых преобразований выражения (1.18) контактные напряжения можно представить в удобном для вычислений виде

$$\sigma(\xi)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos\xi-\cos\beta_0}}(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi)[R\cos(h(\xi))-I\sin(h(\xi))]$$

$$\tau(\xi)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos\xi-\cos\beta_0}}(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi)[R\sin(h(\xi))+I\cos(h(\xi))] \tag{3.1}$$

где R и I—соответственно действительная и мнимая части выражения

$$-\frac{B_0}{\operatorname{ch}\pi\gamma}\sin\left(\frac{\xi}{2}-i\gamma\beta_0\right)+\frac{\operatorname{ch}\gamma\pi}{2\operatorname{ch}2\gamma\beta_0}\left[S_0-\frac{2}{\pi}\int_{\beta_0}^{\beta}\frac{f_1(\xi)d\xi}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi}\right]\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\xi}{2}-i\gamma\beta\right)+\frac{B_0}{2\pi}\int_{-\beta_0}^{\beta_0}\frac{[Q(\tau)-Q(\xi)]d\tau}{X(\tau)\sin\frac{\tau-\xi}{2}}$$

$$h(\vartheta) = \gamma \ln \frac{\sin \frac{\vartheta_0 - \vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta_0 + \vartheta}{2}}$$

Как видно из (3.1), напряжения состоят из двух осциллирующих слагаемых. Вычислено максимальное значение $R_0 = (R^2 + I^2)^{1/2}$ коэффициентов при $(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)^{-1/2}$.

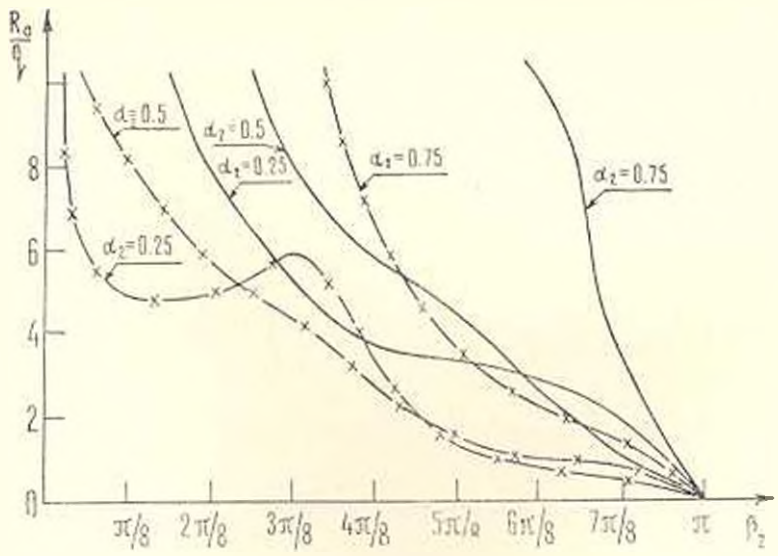
При расчетах принято $\nu = 0{,}3$, $E = 1 \cdot 10^6$ кг/см^2, $a = 1$, $\varepsilon = 1{,}009$, $f_1(\vartheta) = 0$

$$f_2(\vartheta) = \begin{cases} -p_0 & (\vartheta_2 < \vartheta < \pi) \\ 0 & (0 < \vartheta < \vartheta_2) \end{cases}$$

Результаты расчетов приведены в табл. 1 и на фиг. 2—3.

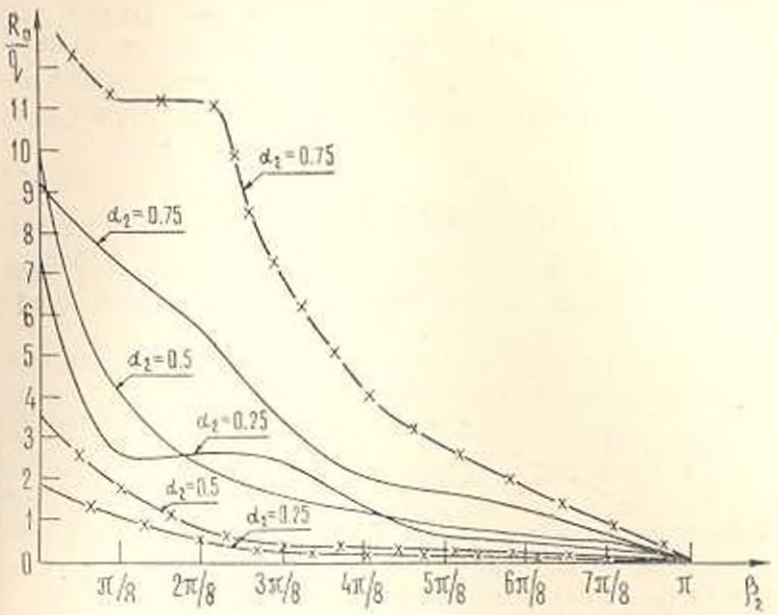
Таблица 1

	$\alpha_2 = 0{,}25$				$\alpha = 0.5$			
$\vartheta_2 / \vartheta_0$	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/8$	$\pi/16$	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/8$	$\pi/16$
$7\pi/8$	1,92	0,89	0,14	0,06	0,94	0,78	0,42	0,10
$6\pi/8$	3,08	0,72	0,16	0,09	2,78	0,94	0,61	0,16
$5\pi/8$	3,39	1,08	0,59	0,05	4,81	1,36	0,84	0,23
$4\pi/8$	3,61	3,20	1,26	0,13	6,28	2,68	1,24	0,34
$3\pi/8$	5,37	6,01	2,38	0,26	8,52	4,53	1,61	0,42
$2\pi/8$	9,61	4,95	2,51	0,26	11,7	5,60	2,17	0,64



Фиг. 2

В табл. 1 приведены максимальные значения коэффициента $R_0 q$ при $(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)^{-1/2}$ для различных значений длины штампа и области приложения нагрузки. На фигурах изображены зависимость этих же коэффициентов от ϑ_2 при фиксированных значениях ϑ_0 для трех зна-



Фиг. 3

чений α_2, причем на фиг. 2 сплошные линии соответствуют $\beta_0=\pi/2$, а линии с крестиками — $\beta_0=\pi/4$, на фиг. 3 сплошные линии соответствуют $\beta_0=\pi/8$, а линии с крестиками — $\beta_0=\pi/16$.

Отметим, что если коэффициент при нормальной нагрузке в ходе осцилляции достигает максимального значения, то при этом коэффициент при особенности для касательного напряжения становится нулем, и наоборот.

ԱՐՏԱԿԵՆՏՐՈՆ ՕՂԱԿԻ ՀԱՄԱՐ ՀԱՐԹ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ ՀԱՇՎԱԿՑՄԱՆ ՈՒՂՂԻՐ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ն. Հ. ԳՈՒԼՋԱՆՅԱՆ, Ա. Մ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է հարթ կոնտակտային խնդիր արտակենտրոն օղակի համար։ Օղակի եզրագծի մի մասը ամրակցված է անշարժ կոշտ դրոշմի։ Դրոշմի և օղակի նյութի մեջ տեղի ունի հարակցում։ Եզրագծի մնացած մասում գործում են նորմալ բեռներ։

Խնդիրը բերված է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման, որն իր հերթին բերված է գծային հավասարումների քվոսի լիովին ռեգուլյար անվերջ սիստեմների։

A PLANE CONTACT PROBLEM FOR AN ECCENTRIC RING TAKING INTO ACCOUNT COUPLING

N. O. GULKANIAN, A. M. MKRTCHIAN

S u m m a r y

A plane contact problem of the theory of elasticity for an eccentric ring is considered. One part of the contour of the ring is fastened to the

motionless hard punch. Between the punch and material of the ring coupling occurs. A normal load acts on the other parts of the contour. The problem is reduced to a singular integral equation which in its turn is reduced to a quasi-quite regular infinite system of linear equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уфлянд Я. С.* Биполярные координаты в теории упругости. М.—Л., 1950.
2. *Еганян В. В.* Плоская задача теории упругости для эксцентрического кольца.—Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. н., 1964, т. 17, № 1.
3. *Бабаджанян В. В.* Решение смешанной плоской задачи теории упругости для эксцентрического кольца.—Изв. АН СССР, МТТ, 1975, № 6.
4. *Заргарян С. С.* Об одной контактной задаче для эксцентрического круглого кольца.—Докл. АН Арм. ССР, 1971, т. 52, № 5.
5. *Гулканян Н. О., Мкртчян А. М.* Плоская контактная задача для эксцентрического кольца без учета трения.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1978, т. 31, № 1.
6. *Александрян М. А.* Контактная задача для полуплоскости, ослабленной круговой полостью.—Докл. АН Арм. ССР, 1968, т. 46, № 5.
7. *Tamate O.* On a contact problem of an elastic half-plane with a circular hole. Part 2. The case of frictionless contact.—Technol. Repts Tohoku Univ., 1961, vol. 29, № 2.
8. *Александрян М. А.* Вдавливание двух штампов в полуплоскость с круглым отверстием.—Докл. АН Арм. ССР, 1971, т. 53, № 3.
9. *Араманович И. Г.* Задачи о давлении штампа на упругую полуплоскость с круговым отверстием.—Докл. АН СССР, 1957, т. 112, № 1.
10. *Tamate O.* On a contact problem of an elastic half-plane with a circular hole. Part 1.—Technol. Repts Tohoku Univ., 1963, vol. 27, № 2.
11. *Араманович И. Г., Фотиева Н. Н., Лыткин В. Л.* Вдавливание жесткого штампа в полуплоскость с круговым отверстием. В сб. «Контактные задачи и их инженерные приложения». М.: Изд. НИИ Маш., 1969, с. 72—80.
12. *Нуллер Б. М.* О некоторых обобщениях метода кусочно-однородных решений.—Изв. ВНИИГ, 1978, т. 120.
13. *Чибрикова Л. И.* О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений. Ученые записки Казанского госуниверситета, 1962, т. 122, кн. 3.
14. *Галов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Поступила в редакцию
1.VII. 1983