ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVII, № 6, 1984 Механика

УДК 624.073

УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПАНЕЛИ БЕСКОНЕЧНОГО РАЗМАХА, СОВЕРШАЮЩЕЙ ПОЛЕТ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ

ГРИГОРЯН Н. Б.

1. Рассмотрим устойчивость трехслойной панели бесконечного размаха, совершающей полет с постоянным ускорением под действием сжимающей равномерно распределенной тангенциальной следящей силы интенсивностью P, приложенной на одном крае. Эта панель является неконсервативной системой флаттерного типа. Выделенная из такой панели полоса единичной ширины представляет собой трехслойный стержень прямоугольного поперечного сечения, нагруженный на одном конце сосредоточенной следящей силой P и совершающей полет с постоянным ускорением. Таким образом, все полученные в работе результаты в равной мере относятся как к трехслойным стержням прямоугольного поперечного сечения, так и к трехслойным панелям бесконечного размаха.

Для однородного стержня эта задача впервые была поставлена и решена К. Н. Гонаком [1]. Точное значение критической силы $P_{кр} = 109{,}69\, D/L^2$ (где D — изгибная жесткость стержня, а L — его длина) было вычислено В. И. Феодосьевым [2]. Различные вопросы задачи устойчивости свободного однородного стержня, нагруженного следящей силой, обсуждены в работах [3—9] и др.

В силу неконсервативности рассматриваемой системы для исследования ее устойчивости применяется динамический метод [10]. Для вывода уравнения малых поперечных колебаний из трехслойной панели (фиг. 1) двумя продольными и поперечными сечениями выделим элемент единичной ширины и бесконечно малой длины dx (фиг. 2). Проектируя все силы, действующие на выделенный элемент, на ось $0z$, получим

$$Q-\left(Q+\frac{\partial Q}{\partial x}dx\right)+N\frac{\partial W}{\partial x}-\left(N+\frac{\partial N}{\partial x}dx\right)\left(\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}dx\right)-$$

$$-m\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}dx=0$$

Здесь Q—суммарная поперечная сила, N—суммарная нормальная сила, m — осредненная погонная масса, соответствующие трехслойному пакету единичной ширины [11].

Пренебрегая малыми величинами высшего порядка, после упрощений имеем

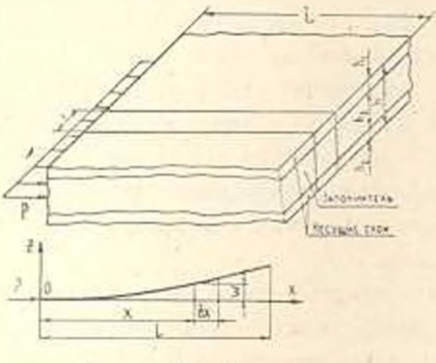
$$\frac{\partial Q}{\partial x} + N\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial N}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial x} + m\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.1)$$

Согласно [11] введем функцию перемещения χ

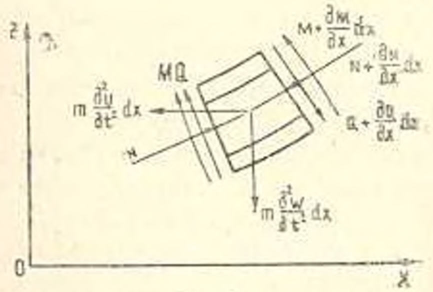
$$W = \left(1 - \frac{h^2}{\beta}\frac{d^2}{dx^2}\right)\chi \qquad (1.2)$$

$$\alpha\gamma = \left(1 - \vartheta\right)\frac{h^2}{\beta}\frac{d^3\chi}{dx^3} \qquad (1.3)$$

где α — угол поперечного сдвига в заполнителе, а β, ϑ и γ — безразмерные параметры, которые полностью характеризуют структуру упругой трехслойной панели с точки зрения ее сопротивления изгибу [11]. Изгибающий момент M и поперечная сила Q выражаются через функцию перемещения χ следующим образом [11]:



Фиг 1.



Фиг. 2.

$$M = D\left(1 - \frac{\vartheta h^2}{\beta}\frac{d^2}{dx^2}\right)\frac{d^2\chi}{dx^2} \qquad (1.4)$$

$$Q = D\left(1 - \frac{\vartheta h^2}{\beta}\frac{d^2}{dx^2}\right)\frac{d^3\chi}{dx^3} \qquad (1.5)$$

где D — изгибная жесткость трехслойной панели бесконечного размаха. Нормальная сила в сечении x будет

$$N = P(1 - x/L) \qquad (1.6)$$

Подставляя выражения W (1.2), Q (1.5) и N (1.6) в уравнение (1.1), получим

$$D\left(1 - \frac{\vartheta h^2}{\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^4\chi}{\partial x^4} + P\left(1 - \frac{x}{L}\right)\left(1 - \frac{h^2}{\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} -$$

$$-\frac{P}{L}\left(1 - \frac{h^2}{\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial\chi}{\partial x} + m\left(1 - \frac{h^2}{\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.7)$$

Решение уравнения (1.7) будем искать в виде

$$\chi(x, t) = \chi^*(x)\exp(i\omega_* t) \tag{1.8}$$

где $\chi^*(x)$ — функция только переменного x, а $\omega_* = \omega_*' + i\omega_*''$ — комплексная частота колебаний трехслойной панели. Тогда из уравнения (1.7) для $\chi^*(x)$ найдем

$$D\frac{d^4\chi^*}{dx^4} - D\frac{\vartheta h^2}{\beta}\frac{d^6\chi^*}{dx^6} + P\left(1-\frac{x}{L}\right)\frac{d^2\chi^*}{dx^2} - P\left(1-\frac{x}{L}\right)\frac{h^2}{\beta}\frac{d^4\chi^*}{dx^4} -$$

$$-\frac{P}{L}\frac{d\chi^*}{dx} + \frac{Ph^2}{\beta L}\frac{d^3\chi^*}{dx^3} - m\omega_*^2\chi^* + m\omega_*^2\frac{h^2}{\beta}\frac{d^2\chi^*}{dx^2} = 0 \tag{1.9}$$

Введем следующие безразмерные параметры:

$$x = \frac{x}{L}, \quad X = \frac{\chi^*}{L}, \quad k = \frac{h^2}{\beta L^2}, \quad \omega^2 = \omega_*^2\frac{mL^4}{D}, \quad \varkappa^2 = \frac{PL^2}{D} \tag{1.10}$$

Из уравнения (1.9) с учетом (1.10) получим уравнение малых поперечных колебаний трехслойной панели бесконечного размаха в безразмерной форме

$$X^{\mathrm{VI}} + \left[\frac{\varkappa^2(1-x)}{\vartheta} - \frac{1}{\vartheta k}\right]X^{\mathrm{IV}} - \frac{\varkappa^2}{\vartheta}X''' - \left[\frac{\varkappa^2(1-x)}{\vartheta k} + \frac{\omega^2}{\vartheta}\right]X'' +$$

$$+\frac{\varkappa^2}{\vartheta k}X' + \frac{\omega^2}{\vartheta k}X = 0 \tag{1.11}$$

2. Рассмотрим следующие три варианта граничных условий:

I. Оба края трехслойной панели свободны

$$M = Q = S = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = 1$$

где $S = D\dfrac{\vartheta h^2}{\beta}\dfrac{d^4\chi}{dx^4}$ — некоторый силовой фактор, связанный с кинематическим фактором $\alpha\gamma$ [1i]. Исходя из выражения M, Q и S, найдем

$$X'' = X^{\mathrm{IV}} = (X''' - \vartheta k X^{\mathrm{V}}) = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = 1 \tag{2.1}$$

II. Один край трехслойной панели свободен, а на другом крае есть бесконечно жесткая на сдвиг диафрагма

$$M = Q = S = 0 \qquad \text{при } x = 0$$

$$M = Q = \alpha\gamma = 0 \qquad \text{при } x = 1$$

Либо, если учесть выражения M, Q и $\alpha\gamma$, то получим

$$\begin{aligned} X'' = X^{\mathrm{IV}} = X''' - \vartheta k X^{\mathrm{V}} = 0 \qquad & \text{при } x = 0 \\ X''' = X^{\mathrm{V}} = X'' - \vartheta k X^{\mathrm{IV}} = 0 \qquad & \text{при } x = 1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

III. На обоих краях трехслойной панели имеются бесконечно жесткие на сдвиг диафрагмы

$$M = Q = \alpha\gamma = 0 \qquad \text{при } x = 0 \text{ и } x = 1$$

или с учетом выражений M, Q и $\alpha\gamma$ имеем

$$X''' = X^{\mathrm{V}} = X'' - \vartheta k X^{\mathrm{IV}} = 0 \qquad \text{при } x = 0 \text{ и } x = 1 \tag{2.3}$$

Таким образом, задача устойчивости трехслойной панели бесконечного размаха свелась к краевой задаче на собственные значения (1.11) с граничными условиями (2.1—2.3).

3. Хорошо известно [10], что динамический метод изучения устойчивости неконсервативных систем сводится к исследованию зависимости частоты колебания системы от величины внешней нагрузки. Считается, что система потеряла устойчивость, если она при некотором значении внешней нагрузки $\varkappa^2 = \varkappa^2_{\text{кр}}$ начинает совершать колебания с возрастающей амплитудой. Это произойдет тогда, когда мнимая часть комплексной частоты имеет знак минус. Если внешняя нагрузка не действует на панель, то частота колебания — вещественная величина ($\omega' = 0$), и панель совершает гармонические колебания. Частота колебаний останется вещественной и при малых значениях внешней нагрузки ($\varkappa^2 < \varkappa^2_{\text{кр}}$). Следовательно, для определения критической силы можно ограничиться лишь вещественными значениями частоты. Таким образом, все коэффициенты уравнения (1.11) — действительные числа. Решение этого дифференциального уравнения с переменными коэффициентами представим в виде ряда Тейлора

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (1 - x)^n \tag{3.1}$$

где A_n — неизвестные постоянные.

Исходя из уравнения (1.11) и выражения для X (3.1), число неизвестных постоянных, входящих в (3.1), можно сократить до шести. Подставляя выражения X и его производных в уравнение (1.11), получим рекуррентное соотношение для определения коэффициентов A_n:

$$A_n = \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)\vartheta k} \times$$

$$\times [(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)A_{n-2} - (n-3)(n-4)(n-5)^2 k\varkappa^2 A_{n-3} +$$

$$+ (n-4)(n-5)\omega^2 k A_{n-4} + (n-5)^2 \varkappa A_{n-5} - \omega^2 A_{n-6}] \tag{3.2}$$

С помощью этой формулы все неизвестные постоянные A_n, начиная с A_6, можно выразить через предыдущие. Тогда в ряду (3.1) останется только шесть коэффициентов A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

Если учесть (3.1), то граничные условия (2.1—2.3) получат такой вид:

$$\sum n(n-1)A_n = 0$$

$$\sum n(n-1)(n-2)(n-3)A_n = 0$$

$$\sum n(n-1)(n-2)A_n - \vartheta k \sum n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)A_n = 0$$

$$A_2 = 0,\ A_4 = 0,\ A_3 - 20\,\vartheta k A_5 = 0 \qquad (3.3)$$

$$\sum n(n-1)A_n = 0$$

$$\sum n(n-1)(n-2)(n-3)A_n = 0$$

$$\sum n(n-1)(n-2)A_n - \vartheta k \sum n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)A_n = 0$$

$$A_3 = 0,\quad A_5 = 0,\quad A_2 - 12\,\vartheta k A_4 = 0 \qquad (3.4)$$

и

$$\sum n(n-1)(n-2)A_n = 0$$

$$\sum n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)A_n = 0$$

$$\sum n(n-1)A_n - \vartheta k \sum n(n-1)(n-2)(n-3)A_n = 0$$

$$A_3 = 0,\quad A_5 = 0,\quad A_2 - 12\,\vartheta k A_4 = 0 \qquad (3.5)$$

Выше во всех суммах пределы суммирования от 0 до ∞.

Из (3.3) (3.4), (3.5) с использованием формулы (3.2) получим системы трех линейных алгебраических однородных уравнений относительно A_0, A_1, A_5:

$$\begin{aligned} a_{11}A_0 + a_{12}A_1 + a_{13}A_5 &= 0\\ a_{21}A_0 + a_{22}A_1 + a_{23}A_5 &= 0\\ a_{31}A_0 + a_{32}A_1 + a_{33}A_5 &= 0 \end{aligned} \qquad (3.6)$$

или A_0, A_1, A_4:

$$\begin{aligned} b_{11}A_0 + b_{12}A_1 + b_{13}A_4 &= 0\\ b_{21}A_0 + b_{22}A_1 + b_{23}A_4 &= 0\\ b_{31}A_0 + b_{32}A_1 + b_{33}A_4 &= 0 \end{aligned} \qquad (3.7)$$

либо A_0, A_1, A_4 в виде

$$\begin{aligned} c_{11}A_0 + c_{12}A_1 + c_{13}A_4 &= 0\\ c_{21}A_0 + c_{22}A_1 + c_{23}A_4 &= 0\\ c_{31}A_0 + c_{32}A_1 + c_{33}A_4 &= 0 \end{aligned} \qquad (3.8)$$

Для существования нетривиального решения этих систем необходимо, чтобы их определители были равны нулю. Отсюда получим частотные уравнения в виде

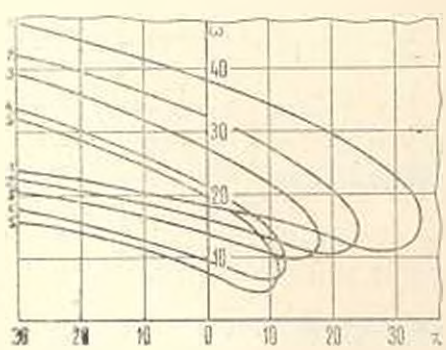
$$\Delta(\varkappa^2, \omega) = 0 \qquad (3.9)$$

Разработан алгоритм и составлена программа [12] для построения зависимости частоты колебаний трехслойной панели от безразмерной силы $\varkappa^2$.

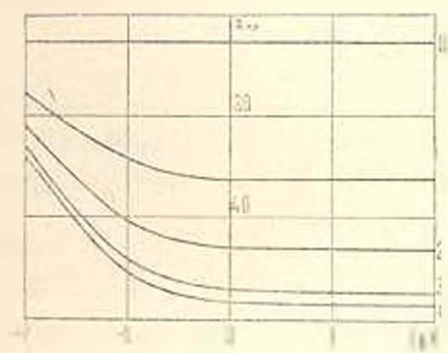
4. На основе проведенных расчетов на ЭВМ построены графики зависимости частот колебаний от безразмерной силы для всех трех случаев граничных условий. Для некоторых значений жесткостных параметров θ и k при граничных условиях I кривые собственных значений представлены на фиг. 3.

Отметим, что параметр θ характеризует изгибную жесткость несущих слоев. Теоретически пределы изменения параметра весьма широки $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Верхняя граница $\theta = 1$ достигается, когда трехслойная панель вырождается в однородную, состоящую из одного несущего слоя. При $\theta = 0$ несущие слои являются мембранами. Параметр k характеризует сдвиговую жесткость заполнителя. Этот параметр может изменяться в пределах $0 \leqslant k \leqslant \infty$, причем малые значения k соответствуют большой сдвиговой жесткости заполнителя. При $k = 0$ жесткость заполнителя на сдвиг бесконечная, а при $k = \infty$ жесткость заполнителя на сдвиг равна нулю.

Характерная особенность этих кривых состоит в том, что частоты обоих тонов колебаний уменьшаются, когда сжимающая сила возрастает, начиная с нуля, причем частоты второго тона колебаний уменьшаются быстрее, чем первого тона. При дальнейшем увеличении сжатия частоты первого тона начинают возрастать и при $\varkappa^2 = \varkappa^2_*$ частоты обоих тонов колебаний становятся равными. Кривые собственных значений для всех случаев граничных условий качественно не отличаются. Наличие бесконечно жесткой на сдвиг диафрагмы на краях панели имеет заметное стабилизирующее влияние лишь при больших значениях жесткостных параметров θ и k ($\theta > 0,1$; $k \geqslant 1$).



Фиг. 3. Кривые собственных значений при $\theta = 0,1$ и 1 — $k = 0,05$; 2 — $k = 0,1$; 3 — $k = 0,2$; 4 — $k = 1$, 5 — $k = 10$. Граничные условия I.



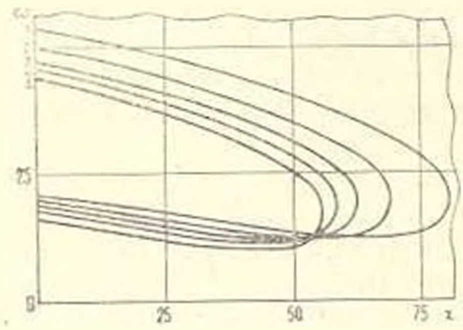
Фиг. 4. Зависимость критической нагрузки от сдвиговой жесткости заполнителя при 0 — $\theta = 1$; 1 — $\theta = 0,5$; 2 — $\theta = 0,25$; 3 — $\theta = 0,1$; 4 — $\theta = 0,05$. Граничные условия I.

Исследовано влияние величин жесткостных параметров θ и k на устойчивость трехслойной панели бесконечного размаха. На фиг. 4 представлены кривые зависимости величины критической силы от сдвиговой жесткости заполнителя k при различных значениях параметра θ для граничных условий 1.

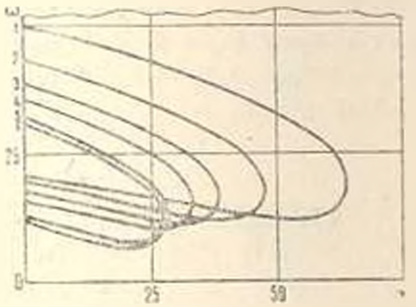
Увеличение сдвиговой жесткости заполнителя приводит к возрастанию критической силы, что особенно заметно в отрезке $0.01 \leqslant k \leqslant 1$. При $k \geqslant 10$ изменение параметра k практически не влияет на величину критической силы. Чем меньше параметр θ, тем заметнее становится влияние сдвиговой жесткости заполнителя на устойчивость трехслойной панели. Аналогичная картина просматривается и при остальных граничных условиях.

На практике применяются такие трехслойные конструкции, у которых $\theta \leqslant 0,1$, причем, чем меньше θ, тем рациональнее построена эта конструкция, поскольку при этом обеспечивается легкость конструкции. Но определенный интерес представляет расчет таких конструкций, у которых $\theta \geqslant 0.25$. В этом случае конструкция может трактоваться как двухслойная. Например, при $\theta = 0,25$ получим двухслойную панель симметричной структуры, а при $\theta = 0,5$ — двухслойную панель с отношением собственных изгибных жесткостей слоев как $1 : 3.72$. Параметр k в случае двухслойных конструкций может характеризовать сдвиговую жесткость клея, соединяющего два слоя друг с другом.

Кривые собственных значений двухслойных панелей бесконечного размаха для различных значений k показаны на фиг. 5 ($\theta = 0.5$) и 6 ($\theta = 0,25$). Эти графики соответствуют граничным условиям 1. Исследовано влияние жесткости склеивания на величину критической силы (фиг. 4, кривые 1 и 2). С увеличением этой жесткости значение критической силы возрастает.



Фиг. 5. Кривые собственных значений двухслойной панели при $\theta = 0,5$ и 1 — $k = 0,02$, 2 — $k = 0,05$; 3 — $k = 0.1$; 4 — $k = 0.25$; 5 — $k = 1$. Граничные условия 1.



Фиг. 6. Кривые собственных значений двухслойной панели при $\theta = 0,25$ и 1 — $k = 0,02$; 2 — $k = 0,05$; 3 — $k = 0.1$; 4 — $k = 0.2$; 5 — $k = 1$; 6 — $k = 10$. Граничные условия 1.

Интересно отметить, что при $k \geqslant 10$ и граничных условиях 1 два слоя панеля работают как практически несвязанные друг с другом панели бесконечного размаха. Тогда при $\theta = 0,25$ общая жесткость полосы единичной ширины $2E\,(h/2)^3/12 = Eh^3/48$ и величина критической силы составят четвертую часть жесткости $Eh^3/12$ и величины критической силы соответствующего однородного стержня единичной ширины. Исходя из этого. было определено, что для однородного стержня $P_{кр} = 110{,}09 D/L^2$, что отличается от результата работы [2] на 0.37%, а от [6] — на 4,35%.

Исследовано поведение трехслойных панелей бесконечного размаха, совершающих полет с постоянным ускорением под действием растягивающей равномерно распределенной тангенциальной следящей силы, приложенной на одном крае. Зависимость частоты колебания от величины растягивающей силы при граничных условиях I для некоторых значений параметров β и k представлена левыми частями кривых на фиг. 3. Увеличение величины растягивающей силы приводит к возрастанию частот обоих тонов колебаний.

ՀԵՏԵՎՈՂ ՈՒԺԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ ԹՌՉՈՂ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌՈՐԵՆ ԵՌԱՇԵՐՏ ՊԱՆԵԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ն. Բ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է անսահմանորեն լայն եռաշերտ պանելի կայունությունը, որը թռչում է հաստատուն արագացումով, համաչափորեն բաշխված տանգենցիալ հետևող սեղմող ուժերի ազդեցության տակ։ Այդ ուժերը կիրառված են պանելի մի եզրի վրա։ Օգտագործված է Գրիգոլյուկ-Չուլկովի եռաշերտ պանելների տեսությունը։ Այս ֆլատտերային տիպի ոչ կոնսերվատիվ համակարգի կայունությունը ուսումնասիրված է դինամիկ մեթոդով։

Գնահատված են զանազան տիպի եզրային պայմանների ազդեցությունը կրիտիկական ուժի մեծության վրա։ Դիտարկված են կրող շերտերի ըստ ծռման ունեցած կոշտության և լցոնի ըստ սահքի ունեցած կոշտության ազդեցությունները կրիտիկական ուժի մեծության վրա։ Քննարկված է երկշերտ պանելների դեպքը։

STABILITY OF THE SANDWICH PLATE OF INFINITE WIDTH PERFORMING FLIGHT UNDER THE ACTION OF FOLLOWER FORCE

N. B. GRIGORIAN

S u m m a r y

The nonconservative problem of stability of sandwich free-free plate of infinite width subjected to a uniformly distributed follower compressing force acting along one edge is considered. The influence of proper flexural rigidity of the faces and shear stiffness of the core on flatter load is investigated. The case of a two-layer plate is discussed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гопак К. Н.* Потеря устойчивости свободного стержня, ускоренно движущегося под действием следящей силы.— Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1960, № 4, с. 136—137.
2. *Феодосьев В. И.* Об одной задаче устойчивости.— ПММ, 1965, вып. 2, с. 391—392.
3. *Гопак К. Н.* Устойчивость свободного стержня при распределенной следящей нагрузке.— ПМ, 1970, т. 6, с. 116—118.
4. *Гопак К. Н.* Динамическая устойчивость свободного стержня переменной массы.— ПМ, 1976, т. 12, № 4, с. 131—135.
5. *Горшков А. Г., Шклярчук Ф. Н.* Устойчивость упругого тела вращения в потоке газа при действии следящей силы.— Инж. журнал МТТ, 1966, № 5, с. 151—154.
6. *Konig H.* Einfluss der Strahlreaktionskrafte auf das elastomechanische Verhalten von Raketen.— Raumfahrtforschung, 1964, Bd. 8, No. 1, s. 22—32.
7. *Beal T. R.* Dynamic stability of a flexible missile under constant and pulsating thrusts.—AIAA Journal, 1965, v. 3, No. 3, p. 486—493.
8. *Wu J. J.* Missile stability using finite elements—an unconstrained variational approach.—AIAA Journal, 1976, v. 14, No. 3, p. 313—319.
9. *Wu J. J.* On missile stability.— J. Sound and Vibr., 1976, v. 49, No. 1, p. 141—147.
10. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: ГИФМЛ, 1961. 340 с.
11. *Григолюк Э. И., Чулков П. П.* Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 172 с.
12. *Григорян Н. Б.* Методические рекомендации. Расчеты и испытания на прочность. Метод и программа расчета на ЭВМ устойчивости трехслойных стержней, нагруженных следящими силами. М.: ВНИИНМаш, 1982. 52 с.

Ленинаканский филиал
Ереванского политехнического
института им. К. Маркса

Поступила в редакцию 11.1.1983