ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVII, № 6, 1984 Механика

УДК 539.376

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ РЕЖИМЕ ИЗГОТОВЛЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ ИЗ НЕОДНОРОДНО СТАРЕЮЩЕГО ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

ДРОЗДОВ А. Д.

Исследуется задача минимизации времени изготовления стержня из неоднородно стареющего вязкоупругого материала при ограничении на максимальную величину прогиба оси стержня. Показано, что оптимальная по быстродействию скорость изготовления стержня представляет собой кусочно-постоянную функцию, имеющую не более одной точки переключения. Численно изучена зависимость точки переключения от параметров задачи.

1. *Постановка задачи.* Рассмотрим плоскую деформацию стержня, изготовленного из неоднородно стареющего вязкоупругого материала. Введем ось $0x$, направленную вдоль нейтральной оси стержня в недеформированном состоянии. Начало координат на оси $0x$ выберем в левом конце стержня. Обозначим через L длину стержня, через $I(x)$ — момент инерции стержня относительно нейтральной оси в точке x, а через $\alpha(x)$ — момент изготовления элемента стержня в окрестности точки x. Для определенности положим $\alpha(0)=0$, $\alpha(x)\geqslant 0$.

Это условие означает, что стержень изготавливается, начиная с левого конца. Скорость изготовления элемента стержня в окрестности точки x обозначим через $u(x)$

$$u(x)=\frac{d\alpha(x)}{dx} \tag{1.1}$$

Будем считать, что модуль упругомгновенной деформации материала стержня E постоянен. Меру ползучести стержня зададим в виде [1, 2]

$$N(t,\tau)=\varphi(\tau)[1-\exp(-\gamma(t-\tau))]$$

Здесь $\varphi(\cdot)$ — дважды непрерывно дифференцируемая монотонно убывающая функция, принимающая положительные значения, $\gamma>0$ — постоянный коэффициент.

Предположим, что через время $T_{*}>0$ после окончания изготовления стержня к нему приложена нагрузка, состоящая из поперечной распределенной нагрузки интенсивности $q(\cdot)$

$$q(x) \geqslant 0 \tag{1.2}$$

и сжимающей силы P, направленной параллельно оси Ox. Будем считать, что существуют положительные постоянные I_1, I_2 такие, что $\frac{4PL^2}{\pi^2 E} < I_1 \leqslant I_2$ и для любого $x \in [0, L]$ выполняется неравенство

$$I_1 \leqslant I(x) \leqslant I_2 \tag{1.3}$$

Деформация $\varepsilon(t, x)$ и напряжение $\sigma(t, x)$ в точке x в момент времени $t \geqslant \alpha(L) + T_{ш}$ связаны соотношением

$$\varepsilon(t, x) = \frac{\sigma(t, x)}{E} - \int\limits_{\alpha(L)+T_{ш}}^{t} \sigma(\tau, x) \frac{\partial}{\partial\tau} N(t - \alpha(x), \tau - \alpha(x))\, d\tau$$

Будем исследовать деформацию стержня на интервале времени $[\alpha(L) + T_{ш}, \alpha(L) + T_{ш} + T]$ фиксированной длины T. Обозначим через $v(t, x)$ прогиб нейтральной оси стержня в точке x в момент времени t. Рассмотрим два вида условий закрепления стержня:

А. Левый конец стержня жестко защемлен, правый конец стержня свободен

$$v(t, 0) = 0, \qquad \frac{\partial v(t, 0)}{\partial x} = 0 \tag{1.4}$$

Б. Левый и правый концы стержня шарнирно закреплены

$$v(t, 0) = 0, \quad v(t, L) = 0 \tag{1.5}$$

Обозначим через $M(t, x)$ момент внешних сил, действующих в момент времени t на часть стержня, расположенную правее точки с координатой x. Согласно гипотезе плоских сечений функция $v(\cdot, \cdot)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{I(x)} \left[\frac{M(t, x)}{E} - \int\limits_{\alpha(L)+T_{ш}}^{t} M(\tau, x) \frac{\partial}{\partial\tau} [\varphi(\tau - \alpha(x))(1 - \right.$$

$$\left. - \exp(-\gamma(t - \tau)))]\, d\tau \right] \tag{1.6}$$

с граничными условиями (1.4), (1.5).

Обозначим через U множество измеримых функций $u(\cdot)$, для почти всех $x \in [0, L]$, удовлетворяющих неравенству

$$0 < u_1 \leqslant u(x) \leqslant u_2 < \infty \tag{1.7}$$

через a — максимальное допустимое значение прогиба оси стержня, а через T_* — максимальное допустимое значение времени изготовления стержня. Прямая задача оптимального по быстродействию режима изготовления стержня состоит в определении такой функции $u_*(\cdot) \in U$, для которой величина $\alpha(L)$ принимает минимальное значение и выполняется неравенство

$$\sup_{x \in [0,\, L]} \; \sup_{t \in [\alpha(L) + T_0,\, \alpha(L) + T_0 + T]} |v(t,\, x)| \leqslant a \tag{1.8}$$

Двойственная задача оптимального по быстродействию режима изготовления стержня состоит в определении такой функции $u_*(\cdot) \in U$, при которой величина

$$\sup_{x \in [0,\, L]} \; \sup_{t \in [\alpha(L) + T_0,\, \alpha(L) + T_0 + T]} |v(t,\, x)|$$

принимает минимальное значение и выполняется неравенство $\alpha(L) \leqslant T_a$. Сформулированные выше задачи представляют собой задачи оптимизации устойчивости стержня по Четаеву на конечном интервале времени [3]. Решения прямой и двойственной задачи оптимизации совпадают в следующем смысле. Пусть a — минимальное значение ограничения на прогиб стержня в прямой задаче, при котором оптимальное время изготовления стержня не превосходит T_*. Тогда a — оптимальное значение функционала качества в двойственной задаче, и оптимальные управления в прямой и двойственной задачах совпадают. Обратно, пусть T_a — минимальное значение времени изготовления стержня в двойственной задаче, при котором максимальное значение прогиба оси стержня не превосходит a. Тогда T_a — оптимальное время изготовления стержня в прямой задаче и оптимальные управления в прямой и двойственной задачах совпадают.

2. *Преобразование задачи оптимизации.* Введем обозначения

$$y_A(t,\, x) = v_A(\alpha(L) + T_0 + t,\, L) - v_A(\alpha(L) + T_0 + t,\, x)$$

$$y_Б(t,\, x) = v_Б(\alpha(L) + T_0 + t,\, x)$$

$$m_A(x) = \int_x^L q(\xi)(\xi - x)\, d\xi \tag{2.1}$$

$$m_Б(x) = \frac{L - x}{L} \int_0^L q(\xi)\xi\, d\xi - \int_x^L q(\xi)(\xi - x)\, d\xi$$

Здесь $v_A(\cdot,\, \cdot)$ — прогиб оси стержня в случае А, $v_Б(\cdot,\, \cdot)$ — прогиб оси стержня в случае Б. Из соотношения (1.6) следует, что функции $y_A(\cdot,\, \cdot)$, $y_Б(\cdot,\, \cdot)$ удовлетворяют интегро-дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^2 y_A(t,\, x)}{\partial x^2} = -\frac{P}{I(x)} \left\{ \frac{y_A(t,\, x)}{E} - \int_0^t y_A(\tau,\, x) \frac{\partial}{\partial \tau} [\varphi(\alpha(L) - \right.$$

$$- \alpha(x) + T_0 + \tau)(1 - \exp(-\gamma(t-\tau)))]\,d\tau \Big\} -$$

$$- \frac{m_A(x)}{EI(x)} [1 + E\varphi(\alpha(L) - \alpha(x) + T_0)(1 - \exp(-\gamma t))] \qquad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 y_Б(t,x)}{\partial x^2} = -\frac{P}{I(x)} \Big\{ \frac{y_Б(t,x)}{E} - \int_0^t y_Б(\tau,x) \frac{\partial}{\partial\tau} [\varphi(\alpha(L) -$$

$$- \alpha(x) + T_0 + \tau)(1 - \exp(-\gamma(t-\tau)))]\,d\tau \Big\} -$$

$$- \frac{m_Б(x)}{EI(x)} [1 + E\varphi(\alpha(L) - \alpha(x) + T_0)(1 - \exp(-\gamma t))]$$

с граничными условиями

$$y_A(t, L) = 0, \quad \frac{\partial y_A(t, 0)}{\partial x} = 0, \quad y_Б(t, 0) = 0, \quad y_Б(t, L) = 0 \qquad (2.3)$$

В приложении показано, что при любом допустимом управлении $u(\cdot) \in U$ функции $y_A(\cdot, \cdot)$, $y_Б(\cdot, \cdot)$ принимают неотрицательные значения и при фиксированном x монотонно не убывают по t. Поэтому ограничения на максимальное значение прогиба оси стержня (1.8) можно переписать в виде

$$\sup_{x \in [0, L]} y_A(T, x) \leqslant a, \qquad \sup_{x \in [0, L]} y_Б(T, x) \leqslant a \qquad (2.4)$$

Определим функции $y(\cdot)$, $\bar{y}^1_A(\cdot)$, $\bar{y}^2_A(\cdot)$, $y^1_A(\cdot, \cdot)$, $y^2_A(\cdot, \cdot)$, $\bar{y}^1_Б(\cdot)$, $\bar{y}^2_Б(\cdot)$, $y^1_Б(\cdot, \cdot)$, $y^2_Б(\cdot, \cdot)$ по формулам

$$y(x) = \alpha(x), \quad \bar{y}^1_A(x) = y_A(T, x), \quad \bar{y}^2_A(x) = \frac{\partial y_A(T, x)}{\partial x}$$

$$y^1_A(t, x) = y_A(t, x), \quad y^2_A(t, x) = \frac{\partial y_A(t, x)}{\partial x}, \quad \bar{y}^1_Б(x) = y_Б(T, x)$$

$$\bar{y}^2_Б(x) = \frac{\partial y_Б(T, x)}{\partial x}, \quad y^1_Б(t, x) = y_Б(t, x), \quad y^2_Б(t, x) = \frac{\partial y_Б(t, x)}{\partial x}$$

Система уравнений в форме Коши

$$\frac{dy(x)}{dx} = u(x), \quad \frac{d\bar{y}^1(x)}{dx} = \bar{y}^2(x)$$

$$\frac{d\bar{y}^2(x)}{dx} = -\frac{P}{I(x)} \Big\{ \frac{\bar{y}^1(x)}{E} - \int_0^T y^1(\tau, x) \frac{\partial}{\partial\tau} [\varphi(T_0 + y(L) -$$

$$- y(x) + \tau)(1 - \exp(-\gamma(T-\tau)))]\,d\tau \Big\} -$$

$$-\frac{m(x)}{EI(x)}[1+E\varphi(T_0+y(L)-y(x))(1-\exp(-\gamma T))]$$

$$\frac{\partial y^1(t,x)}{\partial x}=y^2(t,x) \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial y^2(t,x)}{\partial x}=-\frac{P}{I(x)}\left\{\frac{y^1(t,x)}{E}-\int_0^t y^1(\tau,x)\frac{\partial}{\partial\tau}[\varphi(T_0+y(L)-\right.$$

$$\left.-y(x)+\tau)(1-\exp(-\gamma(t-\tau)))]d\tau\right\}-$$

$$-\frac{m(x)}{EI(x)}[1+E\varphi(T_0+y(L)-y(x))(1-\exp(-\gamma t))]$$

с граничными условиями

$$y(0)=0,\quad \bar{y}^1(L)=0,\quad \bar{y}^2(0)=0,\quad y^1(t,L)=0,\quad y^2(t,0)=0$$

описывает изменение переменных с индексом «А». Та же система уравнений с граничными условиями

$$y(0)=0,\quad \bar{y}^1(0)=0,\quad \bar{y}^1(L)=0,\quad y^1(t,0)=0,\quad y^1(t,L)=0$$

описывает изменение переменных с индексом «Б». Поскольку вид системы уравнений для случаев А и Б одинаков, в дальнейшем индексы «А» и «Б» будем опускать.

Обозначим через $y(\cdot,u)$, $\bar{y}^1(\cdot,u)$, $\bar{y}^2(\cdot,u)$, $y^1(\cdot,\cdot,u)$, $y^2(\cdot,\cdot,u)$ решение системы уравнений (2.5), соответствующее управлению $u(\cdot)\in U$. Задача оптимального быстродействия состоит в определении функции $u_*(\cdot)\in U$, минимизирующей критерий качества

$$J(u)=y(L,u) \tag{2.6}$$

при наличии ограничений

$$\sup_{x\in[0,L]}\bar{y}^1(x)\leqslant a \tag{2.7}$$

3. *Решение задачи оптимизации.* Решение прямой задачи оптимизации (2.5)—(2.7) будем осуществлять при помощи метода функций штрафа [4]. Рассмотрим последовательность положительных чисел $\{A_n\}$, $\lim A_n=\infty$, и последовательность задач оптимизации функционалов

$$J_n(u)=J(u)+A_n\int_0^L\{\max[\bar{y}^1(x,u)-a,0]\}^2dx \tag{3.1}$$

Обозначим через $u_n(\cdot)\in U$ оптимальное управление в задаче (2.5), (3.1). Для любого $n=1,2,\ldots$ справедливы оценки

$$0 \leqslant A_n \int_0^L \{\max[\bar{y}^1(x, u_n) - a, 0]\}^2 dx \leqslant J_n(u_n) \leqslant J_*(u_*) = J(u_*)$$

из которых вытекает равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^L \{\max[\bar{y}^1(x, u_n) - a, 0]\}^2 dx = 0 \tag{3.2}$$

Фиксируем некоторое допустимое управление $u(\cdot) \in U$ и допустимое приращение управления $\Delta u(\cdot)$, то есть такое приращение, при котором управление $u(\cdot) + \Delta u(\cdot) \in U$. Обозначим через $\eta(\cdot, u)$, $\bar{\eta}^1(\cdot, u)$, $\bar{\eta}^2(\cdot, u)$, $\eta^1(\cdot, \cdot, u)$, $\eta^2(\cdot, \cdot, u)$ решение системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{d\eta(x)}{dx} = \Delta u(x), \qquad \frac{d\bar{\eta}^1(x)}{dx} = \bar{\eta}^2(x)$$

$$\frac{d\bar{\eta}^2(x)}{dx} = -\frac{P}{I(x)}\left\{\frac{\bar{\eta}^2(x)}{E} - \int_0^T \eta^1(\tau, x)\frac{\partial}{\partial\tau}[\varphi(T_0 + y(L, u) -\right.$$

$$\left. - y(x, u) + \tau)(1 - \exp(-\gamma(T - \tau)))]\,d\tau\right\} +$$

$$+\left\{\frac{P}{I(x)}\int_0^T y^1(t, x, u)\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{d\varphi}{dt}(T_0 + y(L, u) -\right.\right.$$

$$\left. - y(x, u) + t)(1 - \exp(-\gamma(T - t)))\right]dt -$$

$$\left. -\frac{m(x)}{I(x)}\frac{d\varphi}{dt}(T_0 + y(L, u) - y(x, u))(1 - \exp(-\gamma T))\right\}[\eta(L) + \eta(x)]$$

$$\frac{\partial\eta^1(t, x)}{\partial x} = \eta^2(t, x) \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial\eta^2(t, x)}{\partial x} = -\frac{P}{I(x)}\left\{\frac{\eta^1(t, x)}{E} - \int_0^t \eta^1(\tau, x)\frac{\partial}{\partial\tau}[\varphi(T_0 + y(L, u) -\right.$$

$$\left. - y(x, u) + \tau)(1 - \exp(-\gamma(t - \tau)))]\,d\tau\right\} +$$

$$+\left\{\frac{P}{I(x)}\int_0^t y^1(\tau, x, u)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{d\varphi}{d\tau}(T_0 + y(L, u) -\right.\right.$$

$$-y(x, u) + \tau)(1 - \exp(-\gamma(t-\tau)))\Bigg] d\tau -$$

$$-\frac{m(x)}{I(x)}\frac{d\varphi}{dt}(T_0 + y(L, u) - y(x, u))(1 - \exp(-\gamma t))\Bigg| [\eta(L) - \eta(x)]$$

а через $\bar{\psi}_1(\cdot, u)$, $\bar{\psi}_2(\cdot, u)$, $\psi_1(\cdot, \cdot, u)$, $\psi_2(\cdot, \cdot, u)$ — решение сопряженной системы уравнений

$$\frac{d\bar{\psi}_1(x)}{dx} = \frac{P}{EI(x)}\bar{\psi}_2(x) + 2A_n \max[\bar{y}^1(x, u) - a, 0]$$

$$\frac{d\bar{\psi}_2(x)}{dx} = -\bar{\psi}_1(x)$$

$$\frac{\partial\psi_1(t, x)}{\partial x} = \frac{P}{I(x)}\Bigg\{\frac{\psi_2(t, x)}{E} - \int_t^T \psi_2(\tau, x)\frac{\partial}{\partial t}[\varphi(T_0 + y(L, u) -$$

$$-y(x, u) + t)(1 - \exp(-\gamma(\tau - t)))]d\tau\Bigg\} - \tag{3.4}$$

$$-\frac{P}{I(x)}\bar{\psi}_2(x)\frac{\partial}{\partial t}[\varphi(T_0 + y(L, u) - y(x, u) + t)(1 - \exp(-\gamma(T - t)))]$$

$$\frac{\partial\psi_2(t, x)}{\partial x} = -\psi_1(t, x)$$

Граничные условия для систем уравнений (3.3) (3.4) зададим в виде

— в случае А:

$$\begin{gathered}\eta(0) = 0, \quad \bar{\eta}^1(L) = 0, \quad \bar{\eta}^2(0) = 0, \quad \eta^1(t, L) = 0, \quad \eta^2(t, 0) = 0 \\ \bar{\psi}_1(0) = 0, \quad \bar{\psi}_2(L) = 0, \quad \psi_1(t, 0) = 0, \quad \psi_2(t, L) = 0\end{gathered} \tag{3.5}$$

— в случае Б:

$$\begin{gathered}\eta(0) = 0, \quad \bar{\eta}^2(0) = 0, \quad \bar{\eta}^1(L) = 0, \quad \eta^1(t, 0) = 0, \quad \eta^1(t, L) = 0 \\ \bar{\psi}_2(0) = 0, \quad \bar{\psi}_2(L) = 0, \quad \psi_2(t, 0) = 0, \quad \psi_2(t, L) = 0\end{gathered} \tag{3.6}$$

С помощью стандартных оценок нетрудно показать, что существует положительная постоянная c_1, такая, что для любых $t \in [0, T]$, $x \in [0, L]$, $u(\cdot)$, $u(\cdot) + \Delta u(\cdot) \in U$ выполняются неравенства

$$\begin{gathered}|y(x, u + \Delta u) - y(x, u) - \eta(x, u)| \leqslant c_1\|\Delta u\|^2_{L_2} \\ |\bar{y}^1(x, u + \Delta u) - \bar{y}^1(x, u) - \bar{\eta}^1(x, u)| \leqslant c_1\|\Delta u\|^2_{L_2} \\ |\bar{y}^2(x, u + \Delta u) - \bar{y}^2(x, u) - \bar{\eta}^2(x, u)| \leqslant c_1\|\Delta u\|^2_{L_2} \\ |y^1(t, x, u + \Delta u) - y^1(t, x, u) - \eta^1(t, x, u)| \leqslant c_1\|\Delta u\|^2_{L_2} \\ |y^2(t, x, u + \Delta u) - y^2(t, x, u) - \eta^2(t, x, u)| \leqslant c_1\|\Delta u\|^2_{L_2}\end{gathered} \tag{3.7}$$

Представим приращение функционала (3.1) в виде

$$\Delta J_n(u) = J_n(u + \Delta u) - J_n(u) =$$

$$= \int_0^L [\Delta u(x) + 2A_n \max[\overline{y}^1(x, u) - a, 0]\overline{\gamma}_1^1(x, u)]\, dx + R_n(u, \Delta u) \quad (3.8)$$

Из неравенств (3.7) следует, что для любого n существует положительная постоянная $c_1(n)$ такая, что для любых $u(\cdot)$, $u(\cdot) + \Delta u(\cdot) \in U$ справедлива оценка

$$|R_n(u, \Delta u)| \leqslant c_1(n) \|\Delta u\|^2_{L_1} \quad (3.9)$$

Перепишем равенство (3.8) с учетом соотношений (3.3), (3.4):

$$\Delta J_n(u) = \int_0^L \Delta u(x) \left[1 + \int_0^x K(\xi, u)\, d\xi\right] dx + R_n(u, \Delta u) \quad (3.10)$$

где

$$K(x, u) = \overline{\psi}_2(x, u) \left[\frac{Py^1(0, x, u) + m(x)}{l(x)} \frac{d\varphi}{dt}(T_0 + y(L, u) -\right.$$

$$- y(x, u))(1 - \exp(-\gamma T)) + \int_0^T \frac{d\varphi}{d\tau}(T_0 + y(L, u) - y(x, u) + \tau)(1 -$$

$$\left.- \exp(-\gamma(T - \tau))) \frac{\partial y^1(\tau, x, u)}{\partial \tau}\, d\tau\right] +$$

$$+ \int_0^T \psi_2(t, x, u) \left[\frac{Py^1(0, x, u) + m(x)}{l(x)} \frac{d\varphi}{dt}(T_0 + y(L, u) -\right.$$

$$- y(x, u))(1 - \exp(-\gamma t)) +$$

$$+ \int_0^t \frac{d\varphi}{d\tau}(T_0 + y(L, u) - y(x, u))(1 -$$

$$\left.- \exp(-\gamma(t - \tau))) \frac{\partial y^1(\tau, x, u)}{\partial \tau}\, d\tau\right] dt \quad (3.11)$$

Из соотношений (3.9), (3.10) и необходимого условия оптимальности [4] следует, что для почти всех $x \in [0, L]$ выполняется равенство

$$u_n(x) = \begin{cases} u_1, & \text{если } 1 + \int_0^x K(\xi, u_n)\, d\xi \geqslant 0 \\ u_2, & \text{если } 1 + \int_0^x K(\xi, u_n)\, d\xi < 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

В приложении показано, что для любых $t \in [0, T]$, $x \in [0, L]$, $u(\cdot) \in U$ выполняются неравенства

$$\varphi_2(x, u) \geqslant 0, \qquad \varphi_3(t, x, u) \geqslant 0 \tag{3.13}$$

Из этих оценок и свойств функций $\varphi(\cdot)$, $y^1(\cdot, \cdot, \cdot)$ следует, что для любых $x \in [0, L]$, $u(\cdot) \in U$ выполняется неравенство

$$K(x, u) \leqslant 0 \tag{3.14}$$

Из соотношений (3.12), (3.14) следует, что либо для любого $x \in [0, L]$ справедлива оценка $1 + \int\limits_0^x K(\xi, u_n)\, d\xi > 0$ и оптимальное управление имеет вид $u_n(x) = u_1$, либо существует точка $x_n \in (0, L]$, такая, что $1 + \int\limits_0^{x_n} K(\xi, u_n)\, d\xi = 0$, и оптимальное управление имеет вид

$$u_n(x) = \begin{cases} u_1, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant x_n \\ u_2, & \text{если } x_n < x \leqslant L \end{cases} \tag{3.15}$$

Полагая формально в первом случае $x_n = L$, получим, что оптимальное управление в задаче (2.5), (3.1) имеет вид (3.15). Согласно теореме Вейерштрасса, из последовательности точек $\{x_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in [0, L]$. Обозначим через $u_0(\cdot)$ управление вида

$$u_0(x) = \begin{cases} u_1, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant x_0 \\ u_2, & \text{если } x_0 < x \leqslant L \end{cases}$$

Очевидно, что последовательность функций $\{u_{n_k}(\cdot)\}$ сходится к функции $u_0(\cdot)$ в норме пространства L_2. Из соотношений (3.2), (3.7) следует, что для любого $x \in [0, L]$ справедлива оценка

$$0 \leqslant y^1(x, u_0) \leqslant a \tag{3.16}$$

Из соотношений (2.6), (3.1) вытекает, что для любого $n_k = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство

$$y(L, u_{n_k}) \leqslant J_{n_k}(u_{n_k}) \leqslant J_{n_k}(u_*) = y(L, u_*)$$

Переходя в этом соотношении к пределу при $n_k \to \infty$ и учитывая оценки (3.7), получим

$$y(L, u_0) \leqslant y(L, u_*) \tag{3.17}$$

Из соотношений (3.16), (3.17) следует, что управление $u_0(\cdot) \in U$ является оптимальным управлением в задаче (2.5)—(2.7). Сформулируем этот результат в виде теоремы.

Теорема 1. Скорость изготовления стержня из неоднородно стареющего вязкоупругого материала, минимизирующая время изготовления стержня при наличии ограничения на максимальное значение прогиба оси стержня, представляет собой кусочно-постоянную функцию, имеющую не более одной точки переключения как в случае жесткого защемления одного конца стержня, так и в случае шарнирной опоры обоих концов. На первом интервале постоянства оптимальная скорость принимает наименьшее возможное значение u_1, на втором интервале — наибольшее возможное значение u_2.

Учитывая сделанные выше замечания о связи решений прямой и двойственной задач оптимизации, из теоремы 1 получим следующее утверждение.

Теорема 2. Скорость изготовления стержня из неоднородно стареющего вязкоупругого материала, минимизирующая максимальное значение прогиба оси стержня при наличии ограничения на время изготовления, представляет собой кусочно-постоянную функцию, имеющую не более одной точки переключения как в случае жесткого защемления одного конца стержня, так и в случае шарнирной опоры обоих концов. На первом интервале постоянства оптимальная скорость принимает наименьшее возможное значение u_1, на втором интервале — наибольшее возможное значение u_2.

4. *Численное исследование задачи оптимального управления.* Согласно утверждению теоремы 1, задача определения оптимального по быстродействию режима изготовления стержня сводится к задаче минимизации линейной функции одной переменной x_0:

$$\alpha(L) = Lu_2 - (u_2 - u_1)\, x_0$$

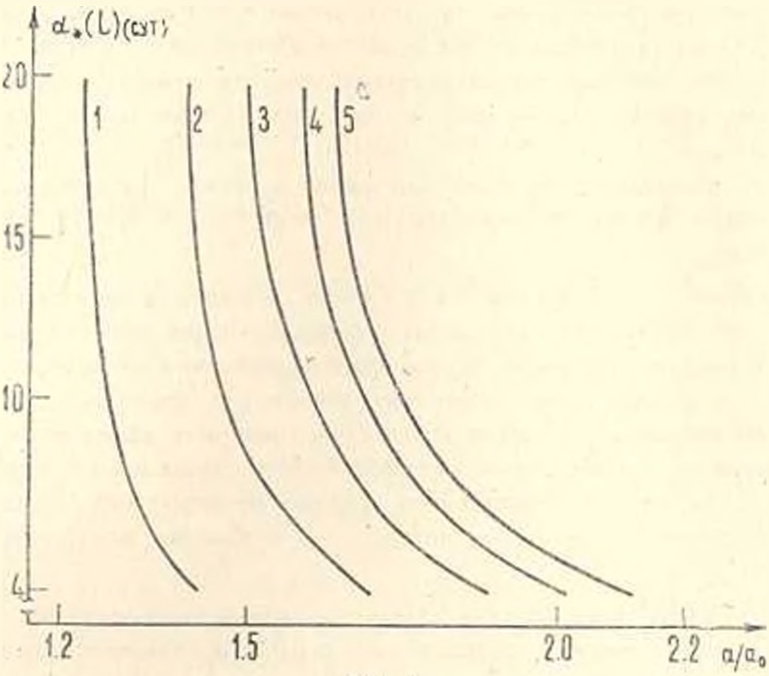
при наличии ограничения (2.7) и может быть решена с помощью известных численных методов.

Было проведено численное решение задачи быстродействия для случая жесткого защемления левого конца стержня (случай А). Для исследования был выбран стержень прямоугольного поперечного сечения длины $L = 4$ м, ширины $b = 0{,}3$ м, толщины $h = 0{.}2$ м, изготовленный из глиноземистого портландцемента, параметры которого содержатся в работе [5]. Для величин u_1, u_2, T_n были приняты значения $u_1 = 1$ сут/м, $u_2 = 5$ сут/м, $T_n = 2$ сут. Было проведено численное исследование зависимости оптимального времени, затрачиваемого на изготовление стержня, $\alpha_*(L)$, от величины a, определяющей максимально допустимый прогиб оси стержня, и времени T, на котором прогиб стержня не должен превосходить заданного значения a. Результаты численного исследования приведены на фиг. 1, 2.

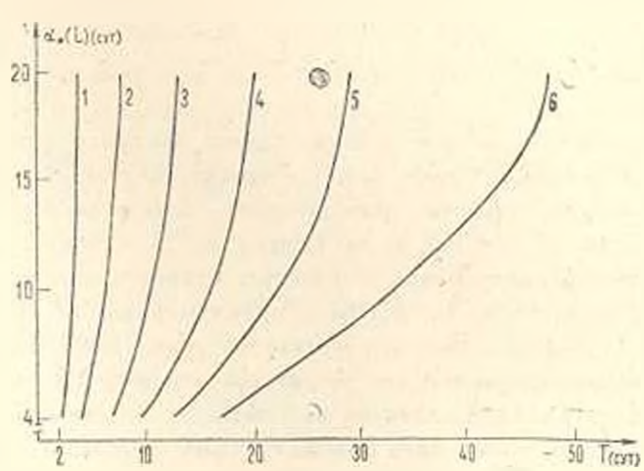
На фиг. 1 кривая с номером N отвечает значению $T = 10 \cdot N$ сут.

На фиг. 2 кривая с номером N отвечает значению $a = \left(1 + \dfrac{N}{10}\right) a_0$.

Здесь a_0 — максимальное значение прогиба в момент приложения внешней нагрузки при наличии только упругих деформаций. Общий вид кривых на фиг. 1, 2 показывает, что минимальное время изготовления стержня увеличивается при уменьшении значения параметра a и при увеличении значения параметра T.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Замечание. Возможны различные обобщения исходной постановки задачи оптимального быстродействия: отсутствие полной информации о внешних воздействиях, вероятностное описание действующих нагрузок, наличие случайной составляющей скорости изготовления стержня и т. д.

Подробный анализ задач оптимизации дан в работах [6, 7]. Метод решения задачи оптимального быстродействия, развиваемый в данной работе, может быть применен к любой из этих задач.

Приложение.

Теорема. Обозначим через $z_А(\cdot, \cdot)$ решение интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 z(t, x)}{\partial x^2} = -f(x)\left[z(t, x) + \int_0^t g(t, \tau, x)\, z(\tau, x)\, d\tau + h(t, x)\right] \quad (4.1)$$

с граничными условиями

$$z_А(t, L) = 0, \qquad \frac{\partial z_А(t, 0)}{\partial x} = 0 \quad (4.2)$$

а через $z_Б(\cdot, \cdot)$ — решение уравнения (4.1) с граничными условиями

$$z_Б(t, 0) = 0, \quad z_Б(t, L) = 0 \quad (4.3)$$

Предположим, что функции $f(\cdot)$, $g(\cdot, \cdot, \cdot)$, $h(\cdot, \cdot)$ непрерывны и существуют положительные постоянные f_0, f_1, g_1, h_1, такие, что для любых $t, \tau \in [0, T]$, $x \in [0, L]$ выполняются неравенства

$$0 < f_0 \leqslant f(x) \leqslant f_1 < \frac{\pi^2}{4L^2}, \quad 0 \leqslant g(t, \tau, x) \leqslant g_1, \quad 0 \leqslant h(t, x) \leqslant h_1 \quad (4.4)$$

Тогда для любых $t \in [0, T]$, $x \in [0, L]$ функции $z_А(\cdot, \cdot)$, $z_Б(\cdot, \cdot)$ принимают неотрицательные значения.

Обозначим через $\theta(\cdot)$, $\Phi(\cdot, \cdot)$ решения обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} + f(x)\theta(x) = 0, \qquad \frac{\partial^2\Phi(x, \xi)}{\partial x^2} + f(x)\Phi(x, \xi) = 0$$

с начальными условиями

$$\theta(0) = 1, \quad \frac{d\theta(0)}{dx} = 0, \quad \Phi(\xi, \xi) = 0, \quad \frac{\partial\Phi(\xi, \xi)}{\partial x} = 1$$

Из соотношений (4.1)—(4.3) следует, что функции $z_А(\cdot, \cdot)$, $z_Б(\cdot, \cdot)$ удовлетворяют интегральным уравнениям

$$z_А(t, x) = \frac{\theta(x)}{\theta(L)} \int_0^L \Phi(L, \xi) f(\xi)\left[h(t, \xi) + \int_0^t g(t, \tau, \xi)\, z_А(\tau, \xi)\, d\tau\right] d\xi -$$

$$- \int_0^x \Phi(x, \xi) f(\xi)\left[h(t, \xi) + \int_0^t g(t, \tau, \xi)\, z_А(\tau, \xi)\, d\tau\right] d\xi \quad (4.5)$$

$$z_Б(t, x) = \frac{1}{\Phi(L, 0)}\Big\{\Phi(L, x)\int_0^x \Phi(\xi, 0) f(\xi)\Big[h(t, \xi) +$$

$$+\int_0^t g(t, \tau, \xi) z_Б(\tau, \xi)\,d\tau\Big]d\xi + \Phi(x, 0)\int_x^L \Phi(L, \xi) f(\xi)\Big[h(t, \xi) +$$

$$+\int_0^t g(t, \tau, \xi) z_Б(\tau, \xi)\,d\tau\Big]\,d\xi\Big\}$$

С помощью теоремы сравнения решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка [8] легко показать, что для любых $x, \xi \in [0, L]$, $x \geqslant \xi$, выполняются неравенства

$$0 < \cos\sqrt{f_1}\,x \leqslant \theta(x) \leqslant \cos\sqrt{f_0}\,x \leqslant 1, \quad 1 \leqslant \frac{\theta(x)}{\theta(L)} \leqslant \frac{1}{\cos\sqrt{f_1}L}$$

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{f_1}}\sin\sqrt{f_1}(x-\xi) \leqslant \Phi(x, \xi) \leqslant \frac{1}{\sqrt{f_0}}\sin\sqrt{f_0}(x-\xi) \leqslant \frac{1}{\sqrt{f_0}}$$

$$-f_0 \leqslant \frac{d\theta(x)}{dx} \leqslant 0, \quad 0 \leqslant \frac{\partial\Phi(x, \xi)}{\partial x} \leqslant 1 \qquad (4.6)$$

Операторы $\Lambda_Д$, $\Lambda_Б$, определенные по формулам

$$\Lambda_Д z(t, x) = \frac{\theta(x)}{\theta(L)}\int_0^L \Phi(L, \xi) f(\xi)\Big[h(t, \xi) + \int_0^t g(t, \tau, \xi) z(\tau, \xi)\,d\tau\Big]d\xi -$$

$$-\int_0^x \Phi(x, \xi) f(\xi)\Big[h(t, \xi) + \int_0^t g(t, \tau, \xi) z(\tau, \xi)\,d\tau\Big]\,d\xi \qquad (4.7)$$

$$\Lambda_Б z(t, x) = \frac{1}{\Phi(L, 0)}\Big\{\Phi(L, x)\int_0^x \Phi(\xi, 0) f(\xi)\Big[h(t, \xi) +$$

$$+\int_0^t g(t, \tau, \xi) z(\tau, \xi)\,d\tau\Big]\,d\xi + \Phi(x, 0)\int_x^L \Phi(L, \xi) f(\xi)\Big[h(t, \xi) +$$

$$+\int_0^t g(t, \tau, \xi) z(\tau, \xi)\,d\tau\Big]\,d\xi\Big\}$$

отображают пространство непрерывных функций в себя. Из соотношений (4.6), (4.7) следует, что для любых $t \in [0, T]$, $x \in [0, L]$ и любых непрерывных функций $z_1(\cdot, \cdot)$, $z_2(\cdot, \cdot)$ выполняются неравенства

$$\sup_{\tau\in[0,t]}\sup_{x\in[0,L]}|\Lambda_А z_1(\tau,x)-\Lambda_А z_2(\tau,x)|\leqslant\frac{f_1g_1}{\sqrt{f_0}}\left(1+\frac{1}{\cos\sqrt{f_1}L}\right)\times$$

$$\times\int_0^t\sup_{\xi\in[0,\tau]}\sup_{x\in[0,L]}|z_1(\xi,x)-z_2(\xi,x)|\,d\tau$$

$$\sup_{\tau\in[0,t]}\sup_{x\in[0,L]}|\Lambda_Б z_1(\tau,x)-\Lambda_Б z_2(\tau,x)|\leqslant\frac{2f_1\sqrt{f_1}g_1}{f_0\sin\sqrt{f_1}L}\times$$

$$\times\int_0^t\sup_{\xi\in[0,\tau]}\sup_{x\in[0,L]}|z_1(\xi,x)-z_2(\xi,x)|\,d\tau$$

С помощью метода математической индукции нетрудно показать, что для любого $n=1,2\ldots$ из этих неравенств вытекают оценки

$$\sup_{t\in[0,T]}\sup_{x\in[0,L]}|\Lambda_А^n z_1(t,x)-\Lambda_А^n z_2(t,x)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{n!}\left|\frac{f_1g_1T}{\sqrt{f_0}}\left(1+\frac{1}{\cos\sqrt{f_1}L}\right)\right|^n\sup_{t\in[0,T]}\sup_{x\in[0,L]}|z_1(t,x)-z_2(t,x)|$$

$$\sup_{t\in[0,T]}\sup_{x\in[0,L]}|\Lambda_Б^n z_1(t,x)-\Lambda_Б^n z_2(t,x)|\leqslant \tag{4.8}$$

$$\leqslant\frac{1}{n!}\left|\frac{2f_1\sqrt{f_1}g_1T}{f_0\sin\sqrt{f_1}L}\right|^n\sup_{t\in[0,T]}\sup_{x\in[0,L]}|z_1(t,x)-z_2(t,x)|$$

Из соотношений (4.4), (4.8) и обобщенной теоремы о неподвижной точке сжимающего оператора [9] следует существование и единственность решений уравнений (4.5). Эти решения являются равномерными пределами последовательностей функций $\{z_А^{(n)}(\cdot,\cdot)\}$, $\{z_Б^{(n)}(\cdot,\cdot)\}$, определяемых по формулам

$$z_А^{(n)}(t,x)=\Lambda_А z_А^{(n-1)}(t,x),\quad z_Б^{(n)}(t,x)=\Lambda_Б z_Б^{(n-1)}(t,x),\quad n=1,2,\ldots$$

$$z_А^{(0)}(t,x)=0,\quad z_Б^{(0)}(t,x)=0$$

Используя соотношения (4.6), (4.7) с помощью метода математической индукции нетрудно показать, что для любого $n=1,2,\ldots$ и любых $t\in[0,T]$, $x\in[0,L]$ справедливы оценки

$$z_А^{(n)}(t,x)\geqslant 0,\quad z_Б^{(n)}(t,x)\geqslant 0$$

Переходя в этих соотношениях к пределу при $n\to\infty$, получим утверждение теоремы.

Применяя утверждение теоремы к решениям уравнений (2.2), (2.3) и учитывая соотношения (1.2), (1.3), (2.1), получим, что для любых $t\in[0,T]$, $x\in[0,L]$ выполняются неравенства

$$y_А(t,x)\geqslant 0,\quad y_Б(t,x)\geqslant 0 \tag{4.9}$$

Из соотношений (2.2), (2.3) следует, что функции $y_А(\cdot,\cdot) = \frac{\partial y_А(\cdot,\cdot)}{\partial t}$, $y_Б(\cdot,\cdot) = \frac{\partial y_Б(\cdot,\cdot)}{\partial t}$ удовлетворяют интегро-дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^2 y'_А(t,x)}{\partial x^2} = -\frac{P}{I(x)}\Bigg[\frac{y'_А(t,x)}{E} + \gamma\int\limits_0^t \varphi(\alpha(L) - \alpha(x) +$$

$$+ T_0 + \tau)\exp(-\gamma(t-\tau))\,y'_А(\tau,x)\,d\tau\Bigg] -$$

$$-\gamma\frac{m_А(x) + y_А(0,x)}{I(x)}\varphi(\alpha(L) - \alpha(x) + T_0)\exp(-\gamma t) \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial^2 y'_Б(t,x)}{\partial x^2} = -\frac{P}{I(x)}\Bigg[\frac{y'_Б(t,x)}{E} + \gamma\int\limits_0^t \varphi(\alpha(L) - \alpha(x) +$$

$$+ T_0 + \tau)\exp(-\gamma(t-\tau))\,y'_Б(\tau,x)\,d\tau\Bigg] -$$

$$-\gamma\frac{m_Б(x) + y_Б(0,x)}{I(x)}\varphi(\alpha(L) - \alpha(x) + T_0)\exp(-\gamma t)$$

с граничными условиями

$$y'_А(t,L) = 0,\quad \frac{\partial y'_А(t,0)}{\partial x} = 0,\quad y'_Б(t,0) = 0,\quad y'_Б(t,L) = 0 \tag{4.11}$$

Применяя утверждение теоремы к решениям уравнений (4.10), (4.11) и используя соотношения (1.2), (1.3), (2.1), (4.9), получим, что для любых $t\in[0,T]$, $x\in[0,L]$ справедливы оценки

$$y'_А(t,x) \geqslant 0,\quad y'_Б(t,x) \geqslant 0 \tag{4.12}$$

Из соотношений (4.9), (4.12) вытекают равенства

$$\sup_{t\in[0,T]}\sup_{x\in[0,L]}|y_А(t,0) - y_А(t,x)| = \sup_{x\in[0,L]} y_А(T,x)$$

$$\sup_{t\in[0,T]}\sup_{x\in[0,L]}|y_Б(t,x)| = \sup_{x\in[0,L]} y_Б(T,x)$$

Из уравнений (3.4) следует, что функции $\overline{\psi}_2(\cdot,u)$, $\psi_2(\cdot,\cdot,u)$ удовлетворяют интегро-дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2\overline{\psi}_2(x)}{dx^2} = -\frac{P}{EI(x)}\overline{\psi}_2(x) - 2A_n\max[\overline{y}^2(x,u) - a, 0] \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial^2\psi_2(t,x)}{\partial x^2} = -\frac{P}{I(x)}\Bigg\{\frac{\psi_2(t,x)}{E} - \int\limits_t^T \psi_2(\tau,x)\frac{\partial}{\partial t}[\varphi(T_0 + \alpha(L) -$$

$$-\alpha(x)+t)(1-\exp(-\gamma(\tau-t)))]\,d\tau\Big\}+$$

$$+\frac{P}{I(x)}\bar{\varphi}_2(x)\frac{\partial}{\partial t}[\varphi(T_0+\alpha(L)-\alpha(x)+t)(1-\exp(-\gamma(T-t)))] \quad (4.13)$$

с граничными условиями (3.5), (3.6). Применяя утверждение теоремы к системе уравнений (4.13) и учитывая неравенство (1.3), получим, что для любых $t\in[0, T]$, $x\in[0, L]$ справедливы оценки (3.13).

Автор выражает глубокую благодарность В. Б. Колмановскому за внимание к работе.

ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԾԵՐԱՑՈՂ ԱՌԱՁԳԱՄԱԾՈՒՑԻԿ ՆՅՈՒԹԻՑ ՁՈՂԵՐԻ ՊԱՏՐԱՍՏՄԱՆ ԸՍՏ ԱՐԱԳԱՑՄԱՆ ՕՊՏԻՄԱԼ ՌԵԺԻՄԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Դ. ԴՐՈԶԴՈՎ

Ամփոփում

Աշխատանքում թվային և անալիտիկ հետազոտված են անհամասեռ ծերացող առաձգամածուցիկ նյութից ձողերի արագ պատրաստման օպտիմալության որոշման խնդիրը, երբ սահմանափակում է դրված ձողի առանցքի ճկվածքի մեծության վրա

ON THE TIME OPTIMAL REGIME OF MAKING NONHOMOGENEOUS VISCO-ELASTIC BEAMS

A. D. DROZDOV

Summary

In this paper we have investigated by means of numerical and analytic methods, the problem of definition time optimal speed of making a nonhomogeneous visco-elastic beam with restriction on the value of beam buckling.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* О теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих сред.— ДАН СССР, 1976, т. 229, № 3, с. 569—571.
2. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел.— Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 3, с. 153—164.
3. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965, 207 с.
4. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
5. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л.: Гостехиздат, 1952. 324 с.

6. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Задача оптимизации в теории ползучести неоднородных балок, подверженных старению. ПМ, 1979, т. 15, № 10, с. 97—106.
7. *Генкин А. В., Колмановский В. Б.* Оптимизация по прочности формы вязкоупругого неоднородно-стареющего армированного стержня.— Изв. АН СССР, ПММ, 1982, т. 48, вып. 4, с. 683—690.
8. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970. 280 с.
9. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.

Московский автомеханический
институт

Поступила в редакцию
24. V. 1982