ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVII, № 5, 1984 Механика

О КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ТОКОНЕСУЩЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

ОВАКИМЯН Р. Н.

Исследуем устойчивость круговой цилиндрической оболочки при следящей поверхностной нагрузке

$$q = -qe_n^* \tag{1.1}$$

сжимающей оболочку по нормали e_n^* к деформируемой боковой поверхности, когда величина силы q зависит от точки приложения.

Подобного рода силы (1.1) возникают в токонесущих оболочках, которые нередко служат не только токопроводом, но и несущим элементом конструкции в различных электромагнитных устройствах, например, МГД-установках, плазменных реактивных двигателях, сверхпроводящих кабелях и др. Эти силы являются следствием взаимодействия электрического тока, протекающего по тонкой, например, сверхпроводящей, наружной (или внутренней) поверхности оболочки с собственным магнитным полем. Их влияние особенно ощутимо при создании сильных магнитных полей, когда на первый план выступает требование сохранения начальной формы токонесущих элементов конструкции, как необходимого условия получения и сохранения магнитного поля заданной напряженности и конфигурации. Поэтому рассматриваемая задача устойчивости представляет теоретический и практический интерес.

Ранее эти вопросы изучались в случае одномерных возмущений сверхпроводящей оболочки [1], когда волны распространялись только вдоль оси x оболочки, что естественно не могло дать полной картины явления; в работах [2, 3] рассматривалась статическая устойчивость токонесущей оболочки, обладающей конечной проводимостью; некоторые результаты по данной теме в случае двумерных волн были изложены в тезисах конференции [4] и несколько подробнее в работе [5], где была рассмотрена устойчивость коаксиальной системы сверхпроводящих оболочек.

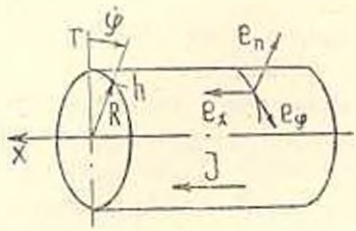
Дальнейшие исследования, проведенные в этой области и изложенные в предлагаемой работе, позволяют упростить известные выражения критической нагрузки путем сведения их к простым соотношениям с ясным физическим смыслом. Структура полученной формулы, по-видимому, может быть использована для расчета критических нагрузок различного вида.

1. Пусть имеется цилиндрическая оболочка радиуса срединной поверхности R и толщины h, изготовленная из изотропного материала с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν. В цилиндрической системе коор-

динат x, φ, r, согласно обозначениям [6], направления сторон элемента оболочки до деформации определяются орт-векторами e_x, e_φ, e_n (фиг. 1), которые в процессе деформирования вследствие возможных перемещений u, v, ω могут изменяться. В частности, при малых деформациях нормаль деформированного элемента

$$e_n^* = -\frac{\partial w}{\partial x} e_x - \frac{\partial w}{R\partial\varphi} e_\varphi + e_n \tag{1.2}$$

Определим электромагнитную силу, действующую на токонесущую оболочку. Пусть вдоль оси x по тончайшему слою сверхпроводящего сплава, покрывающему, например, наружную поверхность оболочки, протекает постоянный электрический ток силы $J = \text{const}$. В начальном (невозмущенном) состоянии, в рамках принятой в теории оболочек погрешности $\sim \frac{h}{R}$,



Фиг. 1.

вектор линейной плотности тока

$$i_0 = \frac{J}{2\pi R} e_x = i_0 e_x \tag{1.3}$$

где поверхностная плотность тока

$$i_0 = \frac{J}{2\pi R} = \text{const}$$

Магнитное поле, возникающее при осевом направлении тока (1.3), существует лишь в окружающем пространстве $r \geq R$ [7]

$$H_0 = -i_0 \frac{R}{r} e_\varphi \tag{1.4}$$

причем на поверхности оболочки $r = R$

$$H_0 = -i_0 e_\varphi \tag{1.5}$$

(внутри оболочки $r < R$ магнитное поле $H = 0$).

Электромагнитная сила, возникающая при взаимодействии поверхностного тока i с собственным магнитным полем H_0, также является поверхностной и в общем случае определяется векторным произведением

$$q = i \times B_0 \tag{1.6}$$

Здесь (1.6) в системе СИ на поверхности тела (в данном случае оболочки) вектор магнитной индукции $B_0 = \mu\mu_0 H_0$, где μ — относительная магнитная проницаемость окружающей среды (в сверхпроводниках $\mu = 0$), $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{a^2}$ — магнитная проницаемость вакуума.

Подставляя (1.3), (1.5) в формулу (1.6), получим

$$q_0 = -\mu\mu_0 i_0^2 e_n = -q_0 e_n \tag{1.7}$$

где величина давления $q_0 = \mu\mu_0 i_0^2 = \text{const}$.

Как следует из равенства (1.7), подобные нагрузки электромагнитного происхождения всегда направлены по нормали к токонесущей поверхности оболочки и носят следящий характер, ввиду чего для решения задач устойчивости необходимо учитывать фактор времени (инерционные силы) [8], чего можно не делать в случае консервативных сил.

Определим критическую величину подобной следящей электромагнитной нагрузки q_* (1.7), предельной для сохранения начальной (круговой) формы поперечного сечения оболочки. Естественно, что давление q_* не должно превышать предела упругости материала оболочки, который меньше предела текучести $[\sigma_{mc}]$ и, тем более, предела прочности $[\sigma_*]$, обычно указываемых в машиностроительных справочниках.

Рассмотрим случай шарнирно опертой оболочки длины l, когда при $x = 0$ и $x = l$ перемещения v, ω равны нулю.

В начальном (до потери устойчивости) невозмущенном состоянии оболочка, сжимаемая равномерным давлением q_*, получит незначительный прогиб в виде полуволны синусоиды, которым в линейных задачах устойчивости обычно пренебрегают [9]; возникающее внутреннее окружное усилие считается постоянным $T_\varphi^0 = -q_0 R$.

Для исследования устойчивости используется классический метод малых возмущений, задаваемых в виде гармонических колебаний [9]

$$u = \xi_0 \cos n\varphi \cos \frac{m\pi x}{l} \exp(-i\omega t)$$

$$v = \eta_0 \sin n\varphi \sin \frac{m\pi x}{l} \exp(-i\omega t) \qquad (1.8)$$

$$w = \zeta_0 \cos n\varphi \sin \frac{m\pi x}{l} \exp(-i\omega t)$$

удовлетворяющих граничным условиям шарнирного опирания, где ξ_0, η_0, ζ_0 — амплитуды колебаний, постоянные по своей величине, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ — целое число волн, укладываемых по поперечному контуру оболочки, m — целое число полуволн по длине оболочки (в нашем случае $m = 1$), $\omega = \omega_R + i\omega_i$ — круговая частота колебаний, в общем случае комплексная величина (ω_R — вещественная, ω_i — мнимая части), t — переменная времени.

Отметим, что в возмущенном состоянии в каждой точке поперечного контура оболочки изменяются не только величина линейной плотности тока i (в невозмущенном i_0), но и его направление, хотя суммарная сила так называемого транспортируемого тока J, протекающего через поперечное сечение оболочки, остается неизменной и равной начальной $J = \text{const}$. Изменение плотности тока i влечет за собой изменение напряженности магнитного поля H в окружающей среде, хотя внутри сверхпроводящей оболочки по-прежнему сохраняется $H = 0$.

Электромагнитное поле в окружающей оболочку непроводящей среде в общем случае определяется дифференциальными уравнениями Максвелла [7]

$$\operatorname{rot} H = \frac{\partial D}{\partial t} \qquad \operatorname{div} B = 0$$
$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \operatorname{div} D = 0 \tag{1.9}$$

где $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$ — электрическая индукция, E — напряженность электрического поля, ε — относительная диэлектрическая проницаемость среды, $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{10^{-9}}{9} \frac{\Phi}{м}$ — электрическая постоянная вакуума, причем $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$ — скорость света в данной среде $\left(\text{в вакууме } c = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}, \right.$ так как $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1\Big)$.

Оказывается, согласно [7], уравнения Максвелла (1.9) можно значительно упростить, если вблизи оболочки удовлетворяется условие квазистационарности

$$\frac{l}{c} \ll T \tag{1.10}$$

где l — характерный размер оболочки, T — период колебания $\left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$. Так как нас интересует область в непосредственной близости от поверхности оболочки, то, даже в случае $l \sim 10$ м, при $c \sim 10^8 \frac{м}{с}$ и частоте колебаний $\frac{1}{T} \sim 10^3 \frac{1}{с}$, предельной в технике сильных токов [7], фактически используемых для деформации тонкостенных конструкций электромагнитными силами [10], легко убеждаемся в выполнении условия (1.10) $10^{-1} \ll 1$. Таким образом, вблизи оболочки можно использовать квазистационарные уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} H = 0 \qquad \operatorname{div} B = 0 \tag{1.11}$$

где $H = H_0 + h(x, \varphi, r, t)$ — напряженность магнитного поля в возмущенном состоянии, представляющая сумму напряженностей стационарного поля H_0 и его возмущения h, то же самое относится к магнитной индукции B.

Выпишем граничные условия на возмущенной поверхности токонесущей сверхпроводящей оболочки. Приняв для окружающей среды $\mu = 1$, что носит чисто формальный характер, имеем [7]

$$e_n^* \times (H_s + h_s) = i \qquad e_n^* \cdot (H_s + h_s) = 0 \tag{1.12}$$

где i — поверхностная плотность тока в возмущенном состоянии, H_s определяется в точке нахождения оболочки, то есть при $r = R + w$ по (1.4).

Естественно, что уравнения (1.11) имеют силу также в виде

$$\operatorname{rot} h = 0, \quad \operatorname{div} h = 0 \tag{1.13}$$

которым удовлетворяет потенциальная функция

$$h = -\operatorname{grad} \psi \tag{1.14}$$

где ψ, согласно (1.8), представим в виде гармонических колебаний в области $r \gtrless R$

$$\psi = f(r) \sin n\varphi \sin \frac{m\pi x}{l} \exp(-i\omega t) \tag{1.15}$$

Уравнение Лапласа $\Delta\psi = 0$, полученное после подстановки (1.14) в уравнение $\operatorname{div} h = 0$ (1.13), в результате дифференцирования ψ (1.15) по переменным x, φ, r сводится к уравнению Бесселя

$$r^2 f''(r) + rf'(r) - (n^2 + k^2 r^2) f(r) = 0 \tag{1.16}$$

где для сокращения записи обозначено $k = \frac{m\pi}{l}$ (в нашем случае $m = 1$).

Решение уравнения (1.16) выражается через функции Бесселя чисто мнимого аргумента

$$f(r) = C_1 I_n(kr) + C_2 K_n(kr) \tag{1.17}$$

где произвольные постоянные C_1, C_2 определяются из граничных условий. При $r \to \infty$ возмущение магнитного поля h, а следовательно, и функция $f(r)$, должны стремиться к нулю. Так как в этом случае $I_n(kr) \to \infty$, а $K_n(kr) \to 0$, то для сохранения физического смысла следует принять $C_1 = 0$. Для определения C_2 используем второе граничное условие (1.12), которое, после подстановки e_n^* (1.2), H_0 (1.4) при $r = R + w$ и h_r (1.14) с учетом (1.15), в линейном приближении примет следующий вид:

$$i_0 \frac{\partial w}{R\partial\varphi} - \frac{\partial \psi}{\partial r}\bigg|_{r=R} = 0 \tag{1.18}$$

После соответствующего дифференцирования w (1.8) и ψ (1.15) из соотношения (1.18) получим $C_2 = -i_0 \frac{n}{RK_n(kR)} \zeta_0$, где $K_n(kR) = \frac{\partial K_n(kr)}{\partial r}\Big|_{r=R}$. Таким образом, окончательно имеем

$$\psi = i_0 \frac{K_n(kr)}{K_n(kR)} \frac{\partial w}{R\partial\varphi} \tag{1.19}$$

из которого следует, что возмущение магнитного поля h (1.14) возникает лишь при деформации токонесущей оболочки в окружном направлении φ, в противном случае $h = 0$.

На поверхности оболочки $r = R + w$ с принятой погрешностью возмущение h (1.14) будет

$$h_x = -i_0\left[\frac{K_n(kR)}{RK_n'(kR)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial\varphi}e_x + \frac{\partial^2 w}{R\partial\varphi^2}e_\varphi\right) + \frac{\partial w}{R\partial\varphi}e_n\right] \qquad (1.20)$$

Зная h_x (1.20), из первого граничного условия (1.12), где согласно (1.4) $H_x = -i_0\left(1-\frac{w}{R}\right)e_z$, получим выражение плотности поверхностного тока в возмущенном состоянии

$$i_0 = i_0\left[\left(1-\frac{w}{R}+\frac{K_n}{K_n'}\frac{\partial^2 w}{R\partial x\partial\varphi}\right)e_x - \frac{K_n}{K_n'}\frac{\partial^2 w}{R\partial x\partial z}e_z + \frac{\partial w}{\partial x}e_n\right] \qquad (1.21)$$

Заодно выпишем выражение магнитной индукции $B_x = \mu\mu_0(H_x + h_x)$ на возмущенной поверхности оболочки

$$B_x = -\mu\mu_0 i_0\left[\frac{K_n}{K_n'}\frac{\partial^2 w}{R\partial x\partial\varphi}e_x + \left(1-\frac{w}{R}+\frac{K_n}{K_n'}\frac{\partial^2 w}{R^2\partial\varphi^2}\right)e_z + \frac{\partial w}{R\partial\varphi}e_n\right] \qquad (1.22)$$

Таким образом, поверхностная электромагнитная нагрузка, определяемая векторным произведением (1.6), с учетом выражений (1.21), (1.22), в линейном приближении будет

$$q = -q_0 e_n + q_0\left[\frac{\partial w}{\partial x}e_x + \frac{\partial w}{R\partial\varphi}e_\varphi + 2\left(\frac{w}{R}+\frac{K_n}{K_n'}\frac{\partial^2 w}{R^2\partial\varphi^2}\right)e_n\right] \qquad (1.23)$$

где первый член есть начальная нагрузка (1.7), а остальное — возмущение нагрузки как по величине, так и по направлению.

В нашем случае нагрузку (1.23) с принятой в теории оболочек погрешностью можно представить в виде

$$q = -q_0\left[1-2\left(\frac{w}{R}+\frac{K_n}{K_n'}\frac{\partial^2 w}{R^2\partial\varphi^2}\right)\right]e_n^* \qquad (1.24)$$

из которого следует, что в токонесущей оболочке, соответственно (1.1), возникает следящая по нормали e_n^* (1.2) электромагнитная нагрузка, величина которой в свою очередь зависит от точки приложения нагрузки, то есть прогиба оболочки w. Продифференцировав w (1.8) в квадратной скобке (1.24), получим

$$q = -q_0\left[1-2\left(1-\frac{n^2}{R}\frac{K_n}{K_n'}\right)\frac{w}{R}\right]e_n^* \qquad (1.25)$$

где выражение в круглой скобке всегда положительно, так как $K_n(kR) > 0$, а $K_n'(kR) < 0$.

Согласно (1.25) при $w > 0$ (радиус оболочки в этом месте увеличивается) сжимающая нагрузка уменьшается и, наоборот, при $w < 0$ — возрастает. Физически это объясняется уменьшением ($w > 0$) или увеличением ($w < 0$) начальной плотности поверхностного тока, а следовательно, и величины электромагнитной нагрузки (1.25).

2. Определим устойчивость токонесущей оболочки. В статье [5] на основе [6] были выведены уточненные линейные выражения усилий и моментов в возмущенном состоянии. После составления разности уравнений равновесия оболочки в возмущенном и начальном состояниях согласно [6, 8] было получено характеристическое уравнение. В этом уравнении в результате интересной перегруппировки членов удалось разделить, как будет показано в дальнейшем, главные члены от второстепенных. Приняв в отличие от [5], где рассматривалась коаксиальная система оболочек, $R_1 = R$, коэффициенты $\alpha = \dfrac{h^2}{12R^2(1-\nu^2)}$, $\beta = \delta = 2\left(1 - \dfrac{n^2}{R}\dfrac{K_n}{K_n}\right)$, имеем

$$\omega^2 = \frac{E}{\rho R^2}\left\{\frac{k^4R^4}{(n^2+k^2R^2)^2} + \alpha\left|(n^2+k^2R^2-1)^2 - \right.\right.$$

$$\left. - 2(1-\nu)k^2R^2\frac{n^2(n^2-1)-k^4R^4}{(n^2+k^2R^2)^2}\right| -$$

$$\left. - \frac{q_0R}{Eh}\left|(n^2-1+\delta) - k^2R^2\frac{n^2-\nu k^2R^2}{(n^2+k^2R^2)^2}\right|\right\} \qquad (2.1)$$

где ρ — удельная плотность материала оболочки.

Перепишем громоздкое уравнение (2.1), исключив вторые слагаемые в квадратных скобках,

$$\omega^2 = \frac{E}{\rho R^2}\left|\frac{k^4R^4}{(n^2+k^2R^2)^2} + \alpha(n^2+k^2R^2-1)^2 - \frac{q_0R}{Eh}(n^2-1+\delta)\right| \qquad (2.2)$$

В обоснованности проведенного упрощения можно убедиться, если сравнить величины критической нагрузки, вычисленные по уравнениям (2.1) и (2.2). Напомним, что оболочка считается устойчивой при положительном значении правых частей этих уравнений, что соответствует отсутствию мнимой части ω_2 в выражении частоты ω; критический момент наступает при $\omega = 0$, когда величина нагрузки достигает критического значения $q_0 = q_{кр}$.

Для этого случая ($\omega = 0$) на ЭВМ «Наири-2» в широком диапазоне значений $\dfrac{h}{R} = \dfrac{1}{500} \div \dfrac{1}{50}$ и $\dfrac{R}{l}$ или $kR = 0{,}048 \div 2{,}4$ при $\nu = 0{,}34$ (для меди) были получены безразмерные величины критической нагрузки $q^* = q_{кр}\dfrac{10^3}{E}$ (Табл. 1)* согласно уравнениям (2.1), (2.2) (соответственно первая и вторая строки). Из табл. 1 видно, что во всех случаях различие в значениях q^* составляет менее 0,1 % при полном

* Для подобной таблицы в [5] (коаксиальные оболочки) допущена описка: вместо напечатанного $q^* = q_{кр}\dfrac{10^3}{E}$ необходимо $q^* = q_{кр}\dfrac{10^3}{E}$, что в конечном счете в $\sqrt{10}$ раз уменьшит критическую силу тока I, в частности, в конкретном примере, приведенном в [5].

совпадении числа окружных волн n (приведено в скобках), при котором q^* (или $q_{кр}$) будет минимальным. Данные табл. 1 полностью подтверждают правомочность использования более простого уравнения устойчивости (2.2) вместо сложного (2.1).

Представим уравнение (2.2) в виде

$$\omega^2 = \Omega^2 - \beta \frac{q_0}{\rho h R} \tag{2.3}$$

где слева стоит квадрат частоты колебаний нагруженной оболочки, а справа — разность квадрата частоты собственных колебаний оболочки

$$\Omega^2 = \frac{E}{\rho R^2}\left| \frac{k^4 R^4}{(n^2 + k^2 R^2)^2} + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2}(n^2 + k^2R^2 - 1)^2 \right| \tag{2.4}$$

и величины, характеризующей радиальную нагрузку, с коэффициентом

$$\beta = n^2 - 1 + \delta \tag{2.5}$$

где $n^2 - 1$ — коэффициент консервативной нагрузки, δ — дополнительный коэффициент от следящей нагрузки.

Таблица 1

h/R / kR	1/500	1/300	1/200	1/150	1/100	1/50
0,048	0,0747 (2) 0,0747 (2)	0,3260 (2) 0,3261 (2)	1,0795 (2) 1,0799 (2)	2,5424 (2) 2,5416 (2)	8,5395 (2) 8,5367 (2)	68,117 (2) 68,095 (2)
0,24	0,2188 (4) 0,2187 (4)	0,8982 (3) 0,8974 (3)	2,4034 (3) 2,4016 (3)	5,1756 (3) 5,1721 (3)	16,212 (3) 16,202 (3)	106,19 (2) 105,18 (2)
0,48	0,3799 (5) 0,3798 (5)	1,4508 (5) 1,4507 (5)	4,1282 (4) 4,1251 (4)	8,6316 (4) 8,6269 (4)	26,352 (4) 26,340 (4)	155,05 (3) 154,61 (3)
1,2	0,8339 (8) 0,8338 (8)	3,1075 (7) 3,1069 (7)	9,0812 (7) 9,080 (7)	18,594 (6) 18,586 (6)	55,430 (6) 55,414 (6)	335,57 (5) 335,29 (5)
2,4	1,5979 (11) 1,5978 (11)	5,9109 (10) 5,9110 (10)	16,821 (9) 16,818 (9)	35,710 (8) 35,693 (8)	103,37 (8) 103,34 (8)	629,95 (6) 628,77 (6)

В выражении (2.4) коэффициент $(n^2 + k^2R^2 - 1)^2$, в отличие от общепринятого $(n^2 - k^2R^2)^2$, полностью отвечает физике колебаний оболочки, не говоря уже о математической точности при $n \leqslant 4$. Действительно, в случае $n = 1$, соответствующем жесткому смещению оболочки в сторону без ее деформации, что возможно в случае $kR = 0$ или очень длинной оболочки ($kR \ll 1$), согласно (2.4) получим $\Omega^2 \simeq 0$. Так как в данном случае $\delta = 0$, то по (2.5) $\beta = 0$. Учитывая это в (2.3), получим $\omega^2 \simeq 0$, что соответствует жесткому смещению (отсутствию колебаний). Помимо приведенного примера $n = 1$, в правомочности коэффициента $(n^2 + k^2R^2 - 1)^2$ можно убедиться на классической формуле критической нагрузки, полученной разными способами в случае стационарного давления для шарнирно опертой оболочки в [11] или очень длинной оболочки $R \ll l$ в [12],

$$q_{кр} = \frac{(n^2 - 1)Eh^2}{12(1-\nu^2)R^3} \tag{2.6}$$

Приняв в (2.3) $\omega = 0$, при $kR = 0$ и $\delta = 0$ для консервативной нагрузки получим

$$q_{кр} = \frac{(n^2-1)^2 Eh^3}{12(n^2-1)(1-\nu^2)R^3} = \frac{(n^2-1)Eh^3}{12(1-\nu^2)R^3}$$

что тождественно формуле (2.6).

Напишем условие устойчивости начальной формы оболочки, вытекающее из уравнения (2.3),

$$\Omega^2 \geqslant \beta \frac{q_0}{\rho Rh} \qquad (2.7)$$

где знак равенства соответствует случаю критической нагрузки $q_0 = q_{кр}$.

Интересную физическую интерпретацию можно дать этому условию (2.7), переписав его в виде

$$\beta q_0 \leqslant \rho h R \Omega^2$$

Правая часть этого неравенства есть центробежная сила, возникающая при вращении оболочки поверхностной плотности ρh вокруг оси x по окружности радиуса R с угловой скоростью Ω; левая же часть есть некая противодействующая сила, пропорциональная коэффициенту β (2.5), характеризующему вид поверхностной радиальной нагрузки. Критический момент (возможность потери устойчивости) наступает при равенстве этих двух сил.

Так как правая часть является неизменной величиной, характеризующей геометрические размеры и физические свойства материала оболочки, то, по-видимому, эту формулу можно использовать и для других видов радиальной нагрузки.

Рассмотрим случай консервативной нагрузки. Эта задача считается классической и неоднократно решалась различными авторами, хотя все полученные выражения для $q_{кр}$ имели сложный, неудобный для практических расчетов вид. Приведем, например, уравнение Мизеса [9]

$$q_{кр} = \frac{Eh}{R}\left[\frac{1}{(n^2-1)(1+N^2)} + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2}\left(n^2-1+\frac{2n^2-1-\nu}{1+N^2}\right)\right]$$

где $N = \frac{nl}{\pi R}$ при $m = 1$, или уравнение из [13]

$$q_{кр} = \frac{Eh}{R(1-\nu^2)}\left\{\frac{1}{(n^2-1)\left(\frac{2}{1-\nu}+N^2\right)N^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{h^2}{12R^2}\left[n^2-1+2\frac{n^2-1+\nu}{N^2}+\frac{n^4}{N^4(n^2-1)}\right]\right\} \qquad (2.8)$$

Взамен этих уравнений для консервативной нагрузки ($\delta = 0$, $\beta = n^2-1$) согласно (2.7) предлагается простое

$$q_{кр} = \rho R h \frac{\Omega^2}{n^2 - 1} \tag{2.9}$$

В справедливости формулы (2.9) убеждаемся, сравнивая значения $q^* = q_{кр} R \frac{1-\nu^2}{Eh} \cdot 10^5$, вычисленные по формуле (2.8) и приведенные в табл. 2 [13] для различных соотношений $\frac{R}{h}$ и $\frac{l}{R}$ при $\nu = 0{,}3$ (первая строка), с значениями q^*, вычисленными для тех же случаев по формуле (2.9) (вторая строка). Почти во всех случаях различие в значениях q^* составляет менее 1 % при полном совпадении числа волн n (приведено в скобках). Таким образом, формула (2.9), где Ω^2 определяется по (2.4), вполне применима для расчетов критической консервативной нагрузки, действующей на боковую поверхность шарнирно опертой по краям оболочки.

Таблица 2

l/R \ R/h	500	250	125	50	31,25
50	0,133 (2) 0,132 (2)	0,434 (2) 0,440 (2)	1,63 (2) 1.634 (2)	10.03 (2) 10,06 (2)	25,7 (2) 25,7 (2)
25	0,305 (3) 0.303 (3)	0,921 (2) 0,873 (2)	2.13 (2) 2.086 (2)	10,5 (2) 10,57 (2)	26.3 (2) 26,34 (2)
10	0.7-6 (4) 0.735 (4)	2.27 (4) 2,255 (4)	5.85 (3) 5,711 (3)	28,7 (3) 28,67 (3)	46,0 (2) 44,89 (2)
5	1.52 (6) 1.509 (6)	4.29 (5) 4,223 (5)	12,2 (4) 11,94 (4)	50.5 (3) 49,45 (3)	96.0 (3) 95,27 (3)
2	3.90 (9) 3.828 (9)	11,2 (8) 11,06 (8)	32,6 (6) 32,09 (6)	129,5 (5) 127,9 (5)	280,0 (5) 279,6 (5)
1	7,97 (13) 7,926 (13)	23,1 (11) 23,05 (11)	67,0 (9) 67.26 (9)	283,0 (7) 285,8 (7)	604,0 (6) 611,1 (6)

По-видимому, если постараться, можно получить подобные (2.3) уравнения устойчивости оболочек для различных граничных условий и даже видов их нагружения, естественно, в рамках принятой погрешности в вычислении значений критической нагрузки с сохранением физического смысла.

ՀՈՍԱՆՔԱՏԱՐ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇԻ ՄԱՍԻՆ

Ռ. Ն. ՀՈՎԱԿԻՄՅԱՆ

Ամփոփում

Ստացված է Հետևող էլեկտրամագնիսական ուժով բեռնավորված հոսանքատար գլանային թաղանթի կայունության հավասարումը պարզ տեսքով։ Տրված է նրա ֆիզիկական հիմնավորումը։

Այդ հավասարման հիման վրա դուրս է բերված կայունության հայտանիշ: Հոդվածագրերն ամրացված թաղանթի համար հետեղ և կոնսերվատիվ բեռների դեպքում հաշվում է բեռի կրիտիկական մեծությունը $\frac{h}{R}$ *և* $\frac{R}{l}$ *արժեքների լայն սիրուքում:*

ON THE STABILITY CRITERION OF A CURRENT—CARRYING CYLINDRICAL SHELL

R. N. OVAKIMIAN

Summary

The simplified equation of shell stability from the physical point of view is verified. The stability criterion on the basis of the equation is deduced. The critical values of the follower and conservative loads in a large range $\frac{h}{R}$ and $\frac{R}{l}$ are calculated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овакимян Р. Н.* Об устойчивости цилиндрической токонесущей оболочки бесконечной проводимости.— Изв. АН Арм.ССР. Механика, 1969, т. 22, № 4.
2. *Казарян К. Б.* Колебания и устойчивость токонесущей цилиндрической оболочки.— Изв. АН Арм.ССР. Механика, 1974, т. 27, № 2.
3. *Белубекян М. В., Казарян К. Б.* Выпучивание цилиндрической оболочки, служащей для транспортировки электрического тока. Межвуз. сб. научн. трудов ЕрГУ. Механика, вып. 2, 1982.
4. *Овакимян Р. Н.* Об устойчивости цилиндрической оболочки при следящей электромагнитной нагрузке. Тезисы докл. XI Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Харьков. М., 1977.
5. *Овакимян Р. Н.* Об устойчивости коаксиальной системы сверхпроводящих оболочек.— Изв. АН Арм.ССР. Механика, 1979, т. 32, № 3.
6. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л., Судпромиздат, 1962.
7. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1976.
8. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961.
9. *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем. М.—Л.: Гостехиздат, 1946.
10. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977.
11. *Феодосьев В. И.* Сопротивление материалов. М.: Наука, 1970.
12. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
13. Справочник машиностроителя. Т. 3, под ред. Серенсена С. В., М.: Машгиз, 1962.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
20. X. 1982