ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

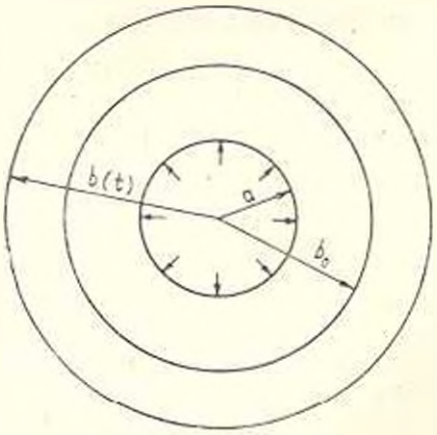
Մեխանիկա XXXVII, № 5, 1984 Механика

О НАРАЩИВАНИИ ВЯЗКОУПРУГОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА, ПОДВЕРЖЕННОГО СТАРЕНИЮ

МЕТЛОВ В. В., НИКИТИН А. В.

Приводится постановка и решение задачи о наращивании вязкоупругого полого цилиндра, находящегося в условиях неоднородного старения [2, 3] и подверженного действию переменного во времени внутреннего давления. Определение напряженного состояния сведено к нахождению одной функции времени из интегрального уравнения Вольтерра. Для ряда характерных ситуаций приведены результаты численных расчетов.

Пусть в момент времени $t = 0$ изготавливается полый цилиндр внутреннего радиуса a и внешнего b_0 (фиг. 1). Одновременно изнутри к цилиндру прикладывается равномерно распределенная радиальная нагрузка величины p_0. Далее, начиная с момента времени $t = 0$, происходит непрерывное наращивание цилиндра так, что его внешний радиус возрастает по заданному закону $b(t)$, $b(0) = b_0$. При этом давление внутри цилиндра изменяется по закону $p(t)$, $p(0) = p_0$. В момент времени T внешний радиус цилиндра достигает значения b_1 и процесс наращивания прекращается, то есть далее внешний радиус цилиндра остается неизменным $b(t) = b_1$ при $t \geqslant T$.



Фиг. 1.

Относительно функции $p(t)$ предположим, что она кусочно-непрерывна при $t \geqslant 0$. Функция $b(t)$ кусочно-непрерывно-дифференцируема при $t \geqslant 0$.

Определим напряженно-деформированное состояние в цилиндре для всех $t \geqslant 0$. Для этого рассмотрим плоскую деформацию цилиндра, то есть положим $u_z = 0$, где ось z направлена вдоль оси цилиндра, а символом u_r обозначено перемещение точек цилиндра вдоль оси r.

Примем также условие несжимаемости цилиндра, которое ввиду того, что $\varepsilon_z = 0$, запишем в виде

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0 \tag{1.1}$$

Здесь r, θ — полярные координаты в плоскости поперечного сечения цилиндра, а $\varepsilon_r(t, r)$, $\varepsilon_\theta(t, r)$ — компоненты деформаций.

Запишем остальные уравнения задачи [1]:
уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} \tag{1.2}$$

соотношения Коши для скоростей деформаций и скорости радиального перемещения $u_r(t, r)$

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r}, \qquad \dot{\varepsilon}_\theta = \frac{\dot{u}_r}{r} \tag{1.3}$$

где точкой обозначена частная производная по времени, то есть

$$\dot{u}_r(t, r) = \frac{\partial u_r(t, r)}{\partial t}, \qquad \dot{\varepsilon}_\gamma(t, r) = \frac{\partial \varepsilon_\gamma(t, r)}{\partial t}, \quad \gamma = r, \theta.$$

Для формулировки уравнения состояния введем функцию $\tau^*(r)$, равную моменту зарождения цилиндрического слоя радиуса r, совпадающему с моментом его стыковки.

Очевидно, что при $a \leqslant r \leqslant b_0$ функция τ^* тождественно равна нулю. При увеличении радиуса от b_0 до b_1 τ^* возрастает от нуля до T и является обратной функцией к функции $b(t)$, то есть

$$r = b(\tau^*(r)), \quad b_0 \leqslant r \leqslant b_1 \tag{1.4}$$

Введем также определяемую из эксперимента функцию $\mu(t, \tau)$, характеризующую закон изменения касательного напряжения во времени t в однородном вязкоупругом стареющем теле при чистом сдвиге от воздействия единичной деформации, приложенной к нему в возрасте τ. Как известно, $\mu(t, \tau)$ можно представить в форме [4]

$$\begin{aligned} &\mu(t, \tau) = G(\tau) - Q(t, \tau), \quad t \geqslant \tau \\ &0 \leqslant Q(t, \tau) < G(\tau), \quad Q(\tau, \tau) = 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

где $G(\tau)$ — упругомгновенный модуль сдвига, $Q(t, \tau)$ — мера релаксации касательных напряжений.

Уравнение состояния запишем в форме интеграла Стильтьеса

$$\sigma_r(t, r) - \sigma_\theta(t, r) =$$

$$= 2 \int_{\tau^*(r)}^{t} \mu(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r))\, d(\varepsilon_r(\tau, r) - \varepsilon_\theta(\tau, r)) \tag{1.6}$$

Отметим, что уравнение состояния в форме (1.6) эквивалентно принятому в линейной теории ползучести неоднородно-стареющих тел [2]. Действительно, преобразуя (1.6) с помощью формулы интегрирования по частям с учетом (1.5) и условия $\varepsilon_\gamma(\tau^*(r), r) = 0$, $\gamma = r, \theta$, получим

$$\varepsilon_r(t, r) - \varepsilon_\theta(t, r) = 2G(t - \tau^*(r))(\varepsilon_r(t, r) - \varepsilon_\theta(t, r)) -$$

$$- \int_{\tau^*(r)}^{t} R(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r))(\varepsilon_r(\tau, r) - \varepsilon_\theta(\tau, r))\, d\tau$$

$$R(t, \tau) = 2\frac{\partial \mu(t, \tau)}{\partial \tau}$$

Соотношения (1.1)—(1.3), (1.6) образуют полную систему уравнений задачи.

Продифференцировав по t условие несжимаемости (1.1), получим

$$\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\theta = 0 \tag{1.7}$$

Подставив (1.3) в (1.7), придем к соотношению

$$\frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r} + \frac{\dot{u}_r}{r} = 0 \tag{1.8}$$

Отсюда найдем скорость перемещения

$$\dot{u}_r(t, r) = \frac{c(t)}{r} \tag{1.9}$$

где $c(t)$ — некоторая функция, подлежащая определению.

Подставив (1.9) в (1.3), найдем скорости деформаций

$$\dot{\varepsilon}_\theta(t, r) = -\dot{\varepsilon}_r(t, r) = c(t)/r^2 \tag{1.10}$$

Заметим, что уравнение состояния (1.6) предусматривает упругомгновенную реакцию при мгновенном приложении нагрузки. Следовательно, в момент времени $t = 0$ при мгновенном приложении внутреннего давления p_0 происходит упругомгновенное деформирование цилиндра. Аналогичным образом, при мгновенном изменении величины давления $p(t)$ будет происходить мгновенное изменение перемещений, деформаций и напряжений. Обозначим символом S множество точек разрыва функции $p(t)$, включая точку $t = 0$, и условимся считать все величины непрерывными слева функциями временного аргумента, а правосторонний предел какой-либо функции f в точке t обозначим символом $f(t+) = \lim_{\tau \to t+0} f(\tau)$, так что, например, имеем $p(0) = 0$, $p(0+) = p_0$. Величину разрыва произвольной функции $f(t)$ в точке $t \in S$ обозначим символом $\Delta f(t)$, то есть $\Delta f(t) = f(t+) - f(t)$.

Очевидно, при $t \in S$ соотношения Коши (1.3) должны быть выполнены для приращений деформаций $\Delta\varepsilon_r(t, r)$, $\Delta\varepsilon_\theta(t, r)$ и приращения перемещения $\Delta u_r(t, r)$. Этому требованию мы удовлетворим, понимая дифференцирование по времени в (1.3) и далее в обобщенном смысле [5]. Тогда скорости деформаций и перемещения будут содержать сингулярные слагаемые вида

$$\sum_{\tau \in S} \Delta\varepsilon_r(\tau, r)\,\delta(t-\tau), \quad \sum_{\tau \in S} \Delta\varepsilon_\theta(\tau, r)\,\delta(t-\tau), \quad \sum_{\tau \in S} \Delta u_r(\tau, r)\,\delta(t-\tau)$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. Из условия равенства сингулярных составляющих в правых и левых частях соотношений (1.3) получим требуемые соотношения

$$\Delta\varepsilon_r(\tau, r) = \frac{\partial \Delta u_r(\tau, r)}{\partial r}, \quad \Delta\varepsilon_\theta(\tau, r) = \frac{\Delta u_r(\tau, r)}{r}, \quad \tau \in S$$

Принимая, что наращивание происходит без какого-либо предварительного натяга элементов, запишем условие равенства нулю перемещения и компонент деформаций и напряжений в элементе наращиваемого цилиндра в момент его зарождения

$$u_r(\tau^*(r), r) = 0, \quad \varepsilon_\gamma(\tau^*(r), r) = 0, \quad \sigma_\gamma(\tau^*(r), r) = 0, \ \gamma = r, \theta \quad (1.11)$$

Поскольку движущаяся граница $\Gamma(t) = \{r = b(t)\}$ наращиваемого цилиндра является линией уровня $\{\tau^*(r) = t\}$ функции $\tau^*(r)$, то из (1.11) вытекает

$$\sigma_r(t, b(t)) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \quad (1.12)$$

Наконец, при $r = a$ и $t > T$ имеем обычные граничные условия

$$\sigma_r(t, a) = -p(t), \ t > 0, \ \sigma_r(t, b_1) = 0, \ t > T \quad (1.13)$$

Интегрируя (1.9) и (1.10) по времени с учетом начального условия (1.11), найдем перемещение и компоненты деформаций

$$u_r(t, r) = A(t)/r, \ \varepsilon_\theta(t, r) = -\varepsilon_r(t, r) = A(t)/r^2, \ a \leqslant r < b_0 \quad (1.14)$$

$$u_r = (A(t) - A(\tau^*(r)))/r, \ \varepsilon_\theta = -\varepsilon_r = (A(t) - A(\tau^*(r)))/r^2, \ b_0 < r \leqslant b(t)$$

$$A(t) = \int_0^t c(\tau)\,d\tau \quad (1.15)$$

Подчеркнем, что отрезок интегрирования в (1.15) включает точку $\tau = 0$. Следовательно, если сингулярная составляющая функции $c(t)$ в нуле есть $c_0\,\delta(t)$, то $A(0+) = c_0$.

Выразим компоненты напряжений через функцию $A(t)$. С этой целью рассмотрим отдельно две области.

а) Область $a \leqslant r \leqslant b_0$.

Интегрируя (1.2) в пределах от a до r с учетом (1.13), получим

$$\sigma_r(t, r) = -p(t) + \int_a^r \frac{\sigma_\theta(t, \rho) - \sigma_r(t, \rho)}{\rho}\,d\rho \quad (1.16)$$

Подставляя выражения для деформаций (1.14) в (1.6), будем иметь

$$\sigma_\theta(t, r) - \sigma_r(t, r) = 2\int_0^t \mu(t, \tau)\frac{2dA(\tau)}{r^2} \qquad (1.17)$$

Подставляя (1.17) в (1.16), получим

$$\sigma_r(t, r) = -p(t) + \int_a^r \frac{4d\rho}{\rho^3}\int_0^t \mu(t, \tau)\,dA(\tau), \quad a \leqslant r \leqslant b_0 \qquad (1.18)$$

б) Область $b_0 < r \leqslant b(t)$.

Интегрируя (1.2) в пределах от r до $b(t)$ с учетом (1.12), (1.13), будем иметь

$$\sigma_r(t, r) = -\int_r^{b(t)} \frac{\sigma_\theta(t, \rho) - \sigma_r(t, \rho)}{\rho}\,d\rho \qquad (1.19)$$

Подставляя выражения для компонент деформаций (1.14) в (1.6), получим

$$(\varepsilon_\theta - \varepsilon_r)(t, r) = 2\int_{\tau^*(r)}^t \mu(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r))\frac{2dA(\tau)}{r^2} \qquad (1.20)$$

Подставляя (1.20) в (1.19), будем иметь

$$\sigma_r(t, r) = -\int_r^{b(t)} \frac{4d\rho}{\rho^3}\int_{\tau^*(\rho)}^t \mu(t - \tau^*(\rho), \tau - \tau^*(\rho))\,dA(\tau) \qquad (1.21)$$

Сделаем в (1.21) замену переменной $\rho = b(s)$, $(s = \tau^*(\rho))$. Имеем

$$\sigma_r(t, r) = -\int_{\tau^*(r)}^t \frac{4\dot{b}(s)\,ds}{b^3(s)}\int_s^t \mu(t - s, \tau - s)\,dA(\tau)$$

Заменяя в последнем соотношении порядок интегрирования, получим

$$\sigma_r(t, r) = -\int_{\tau^*(r)}^t dA(\tau)\int_{\tau^*(r)}^{\tau} \frac{4\dot{b}(s)}{b^3(s)}\mu(t - s, \tau - s)\,ds =$$

$$= -\int_{\tau^*(r)}^t dA(\tau)\int_r^{b(\tau)} \frac{4\mu(t - \tau^*(\rho), \tau - \tau^*(\rho))}{\rho^3}\,d\rho, \quad b_0 < r \leqslant b(t) \qquad (1.22)$$

Таким образом, радиальная компонента напряжения определяется соотношениями (1.18) и (1.22).

Уравнение для нахождения функции $A(t)$ получим из условия непрерывности напряжения $\sigma_r(t, r)$ на границе раздела двух областей, то есть при $r = b_0$. Подставив в (1.18) и (1.22) значение $r = b_0$ и приравнивая затем правые части (1.18) и (1.22), будем иметь

$$\int_0^t \mu_1(t, \tau)\, dA(\tau) = p(t)$$

$$\mu_1(t, \tau) = 4 \int_0^{b(\tau)} \frac{\mu(t - \tau^*(\rho), \tau - \tau^*(\rho))}{\rho^3}\, d\rho \qquad (1.23$$

Используя формулу интегрирования по частям, запишем окончательно интегральное уравнение Вольтерра для определения функции $A(t)$

$$\mu_1(t, t) A(t) - \int_0^t A(\tau) \frac{\partial \mu_1(t, \tau)}{\partial \tau}\, d\tau = p(t) \qquad (1.24)$$

После нахождения функции $A(t)$ из уравнения (1.24) поле перемещений, деформаций и напряжений определяется из соотношений (1.14), (1.17), (1.18), (1.20), (1.22).

Определяемую экспериментальным путем функцию $\mu(t, \tau)$ наиболее удобно аппроксимировать простейшим аналитическим выражением, учитывающим старение, вида

$$\mu(t, \tau) = G(\tau) - \varphi(\tau)(1 - \exp(-\gamma(t - \tau))) \qquad (1.25)$$

Здесь $\gamma > 0$ — постоянная времени релаксации, а функция старения $\varphi(\tau)$ удовлетворяет условиям $\frac{d\varphi}{d\tau} < 0$, $0 \leqslant \varphi(\tau) < G(\tau)$.

Подставляя (1.25) в (1.23), найдем, что

$$\mu_1(t, \tau) = G_1(\tau) - \varphi_1(\tau)(1 - \exp(-\gamma(t - \tau)))$$
$$G_1(\tau) = 4 \int_a^{b(\tau)} G(\tau - \tau^*(r)) \frac{dr}{r^3}, \qquad \varphi_1(\tau) = 4 \int_a^{b(\tau)} \varphi(\tau - \tau^*(r)) \frac{dr}{r^3} \qquad (1.26)$$

Таким образом, ядро уравнения (1.24) будет вырожденным и, сводя его к дифференциальному уравнению посредством двукратного дифференцирования и исключения интегральных членов, решение уравнения (1.24) можно получить в форме

$$A(t) = \int_0^t \mu_2(t, \tau)\, dp(\tau) = \mu_2(t, t)\, p(t) - \int_0^t \frac{\partial \mu_2(t, \tau)}{\partial \tau} p(\tau)\, d\tau$$

$$\mu_2(t, \tau) = G_1(\tau)^{-1} \left[1 + \gamma \varphi_1(\tau) \int_\tau^t \frac{\exp\left\{ -\gamma \int_\tau^z (1 - \varphi_1(u)/G_1(u))\, du \right\}}{G_1(z)}\, dz \right]$$

Численный пример. Для расчетов упругомгновенный модуль сдвига G примем постоянным, а функцию $\mu(t, \tau)$ возьмем в форме

$$\mu(t, \tau) = G\left[1 - (C_0 + A_0 \exp(-\beta\tau))(1 - \exp(-\gamma(t - \tau)))\right] \qquad (1.27)$$

Параметры C_*, A_*, β, γ выбирались из условия аппроксимации кривых ползучести, полученных в работе [6], [7], аналитическим выражением, соответствующим соотношению (1.27). Для них получено

$$C_0 = 0{,}05; \quad A_0 = 0{,}45; \quad \beta = 0{,}008 \text{ сут}^{-1}; \quad \gamma = 0{,}1 \text{ сут}^{-1}$$

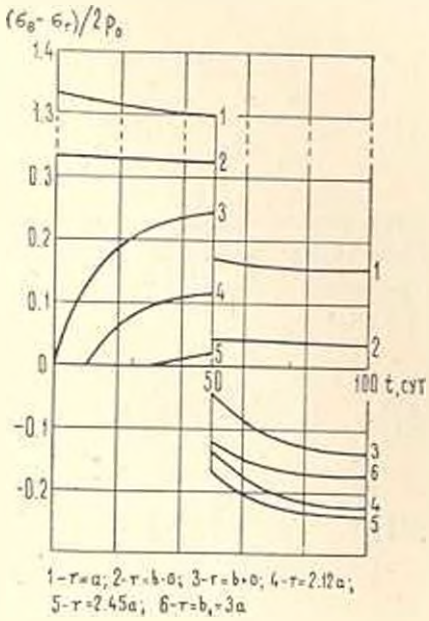
Примем следующий закон наращивания:

$$\frac{1}{b^2(t)} = \frac{1}{b_0^2} - a(t \wedge T), \quad a > 0 \tag{1.28}$$

где $t \wedge T$ означает минимум из двух чисел t и T, T — момент окончания наращивания. Принятие закона наращивания в форме (1.28) ввиду (1.27) позволяет выразить φ_* и C_* в (1.26) через элементарные функции. Закон наращивания (1.28) полностью определяется заданием трех величин — продолжительности наращивания T, а также начального и конечного радиусов b_0 и $b_1 = b(T)$. При расчетах величины b_0 и b_1 фиксированы и равны $b_0 = 2a$, $b_1 = 3a$, где a — внутренний радиус цилиндра.

Примем следующий закон нагружения: в процессе наращивания внутреннее давление поддерживается постоянным $p(t) = p_0$ при $0 < t \leqslant T$, а в момент окончания наращивания T нагрузка полностью снимается, то есть $p(t) = 0$ при $t > T$.

Имея в виду проблему прочности, заметим, что в рассматриваемой задаче максимальное касательное напряжение равно $\frac{1}{2}|\sigma_\theta - \sigma_r|$. Поэтому на фиг. 2 изображены кривые величины $(\sigma_\theta - \sigma_r)/2p_0$ в зависимости от времени t для нескольких точек цилиндра при $T = 50$ сут. Кривые 1 и 2 соответствуют точкам $r = a$ и $r = b_0 - 0$ исходного цилиндра. Кривые 3, 4, 5, 6 соответствуют наращиваемым элементам, зарожденным в моменты времени τ^*, равные соответственно нулю, $T/5$, $3T/5$ и T. Соответствующие значения радиуса равны $b_0 + 0$, $2.12a$, $2.45a$ и $b_1 = 3a$.



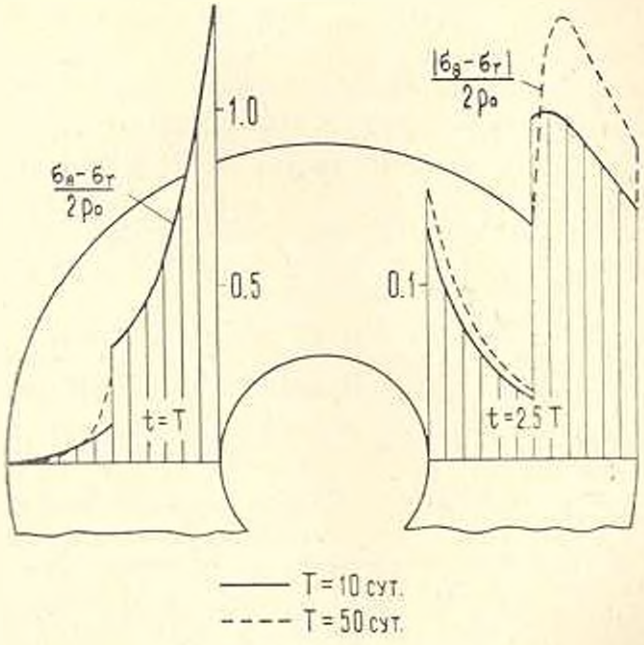
Фиг. 2.

Рассмотрим вначале процесс наращивания цилиндра при постоянном внутреннем давлении p_0, $t \leqslant T$. В момент времени $t = 0$ происходит упругомгновенное деформирование исходного цилиндра $a \leqslant r \leqslant b_0$. Возникающее напряженное состояние в нем в силу его однородности совпадает с решением задачи теории упругости для цилиндра, находящегося под внутренним давлением p_0. Действительно, положив в (1.23), (1.24), (1.17), (1.18) $t = 0+$, получим

$$\sigma_r(0+, r) = p_0 - \frac{a^2}{b_0^2 - a^2}\frac{r^2 - b_0^2}{r^2}, \quad \sigma_\theta(0+, r) = p_0 \frac{a^2}{b_0^2 - a^2}\frac{r^2 + b_0^2}{r^2}$$

Начиная с момента $t = 0$ элементы исходного цилиндра вследствие ползучести перемещаются в радиальном направлении. Возникающее при этом взаимодействие исходного цилиндра с наращиваемыми слоями эквивалентно приложению к нему некоторого нарастающего со временем наружного давления. Следовательно, в исходном цилиндре сжимающие напряжения $|\sigma_r|$ будут расти, а растягивающие σ_θ будут убывать со временем. При этом несмотря на значительное изменение напряжений σ_θ и σ_r (порядка 30%) максимальное касательное напряжение, равное $\frac{1}{2}(\sigma_\theta + |\sigma_r|)$, в исходном цилиндре изменяется незначительно. Как видно из фиг. 2 (кривые 1 и 2), в исходном цилиндре происходит лишь небольшая разгрузка. В наращиваемых элементах как сжимающее $|\sigma_r|$, так и растягивающее напряжение σ_θ с течением времени увеличиваются.

Величина загружения зарождающихся элементов (кривые 3, 4, 5 на фиг. 2) определяется интенсивностью процесса ползучести в исходном цилиндре и в ранее зарожденных элементах. Скорость процесса ползучести исходного цилиндра затухает, вследствие чего напряжения стабилизируются, и при увеличении времени наращивания T элементы, зарожденные в конце процесса наращивания, загружаются незначительно.



Фиг. 3.

При снятии внешней нагрузки в момент T, как видим на фиг. 2, в цилиндре остаются значительные остаточные напряжения. На фиг. 3 приве-

дены эпюры величины максимального касательного напряжения для момента T (перед снятием внешней нагрузки) и момента $T_1 = 2.5T$ при двух значениях параметра T, равных 10 и 50 суткам. Отсюда видим, что скорость процесса наращивания оказывает весьма существенное влияние на распределение напряжений как в конце процесса наращивания, так и после снятия внешней нагрузки.

В заключение авторы благодарят Н. Х. Арутюняна за постановку задачи и внимание к работе.

ԾԵՐԱՑՄԱՆ ԵՆԹԱՐԿՎԱԾ ԱՌԱՁԳԱՄԱՆՈՒԹՅԱՆ ԴԱՆԻ ԱՃԵՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Վ. Վ. ՄԵՏԼՈՎ, Ա. Վ. ՆԻԿԻՏԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Բերված է անհամասեռ ծերացող դյանի աճեցման համար սողքի տեսության խնդրի դրվածքը և լուծումը։ Սարմադային-դեֆորմացիոն վիճակի գտնման խնդիրը բերվել է ինտեգրալ հավասարումից ժամանակից կախված որոշակի ֆունկցիայի գտնվուն։ Ներկայացված են թվային հաշվարկի արդյունքները։

ON THE GROWING OF VISCOELASTIC CYLINDER SUBJECT TO AGEING

V. V. METLOV, A. V. NIKITIN

S u m m a r y

The formulation and solving of the creep problem for inhomogeneously ageing cylinder which is growing are presented. The stress-and-strain problem is reduced to the determination of a certain function of time from the integral equation. The results of numerical calculations are presented.

АНТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела.— ПММ, 1977, № 5.
2. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел.— Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 3.
3. *Арутюнян Н. Х.* О теории ползучести для неоднородно-стареющих сред.— Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 3.
4. *Трапезников Л. Н.* Термодинамические потенциалы в теории ползучести стареющих сред.— Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 1.
5. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959.
6. *Ross A. D.* Creep of Concrete under variable stress. —Journ. of the American Concr. Inst., 1958, vol. 29, N. 9.
7. *Struik L. C. E.* Physical aging in amorphous polymers and other materials. Amsterdam: Elsevier, 1978. 229p.

Институт проблем механики
АН СССР

Поступила в редакцию
26. IV. 1982