

О МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ
 УПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ С РЕГУЛЯРНЫМ
 КОЛЬЦОМ КРУГОВЫХ ПОЛОСТЕЙ

БУРЫШКИН М. А., ШУПТА В. П.

Плоская задача теории упругости для бесконечной изотропной среды, ослабленной регулярным кольцом круговых полостей, в связи с ее важными техническими приложениями рассматривалась в ряде публикаций [1—4]. Характерной особенностью этой задачи является то, что при большом числе близко расположенных полостей ее непосредственное решение численными методами и, в частности, методом Шермана-Космодамианского сопровождается существенными вычислительными затруднениями. В силу сказанного исследования, проведенные в работах [1, 3, 4], относятся только к относительно простому — циклическому нагружению.

Некоторые нециклические виды напряженно-деформированного состояния изучались в работе [2], где был предложен метод построения приближенных аналитических решений, основанный на использовании малого параметра [5] и аппарата теории представлений групп. Это обеспечило эффективность построения решений для любого числа отверстий, достаточно далеко расположенных друг от друга.

В данной работе для исследования нециклического состояния рассматриваемой среды предлагается комбинированный метод. В нем заложены, с одной стороны, идеи метода Шермана-Космодамианского, эффективного при любом расположении отверстий, а с другой — учет симметрических свойств среды на основе теории представлений групп, что позволяет изучать воздействия нециклических нагрузок при любом числе отверстий.

1. *Обобщенные циклические задачи.* Элементами симметрии бесконечной изотропной среды, ослабленной регулярным кольцом круговых отверстий (фиг. 1) являются повороты C_r ($r = 0, 1, \dots, n - 1$) вокруг точки O на углы $r\alpha$ и отражения D_r ($r = 0, 1, \dots, n - 1$) в плоскостях Π_r . Здесь и в дальнейшем под n понимается число отверстий в кольце, $\alpha = 2\pi/n$. Элементы симметрии образуют группу C_{2n} .

Аппарат прикладной теории представлений групп достаточно полно изложен в монографии [6]. В связи с этим ограничимся только введением некоторых характерных обозначений: g — произвольный элемент группы C_{2n} , τ_ν ($\nu = 1, 2, \dots, l$) — двумерные представления этой группы, представляющие собой наборы матриц $\tau_\nu(g)$ вида

$$\tau_\nu(C_r) = \begin{vmatrix} \cos r(\nu-1)x & \sin r(\nu-1)x \\ -\sin r(\nu-1)x & \cos r(\nu-1)x \end{vmatrix}$$

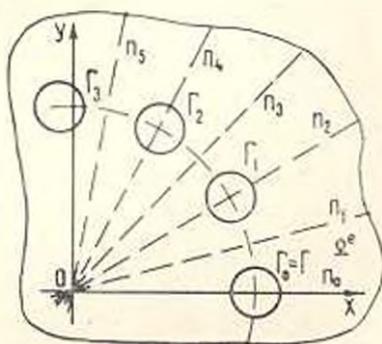
$$\tau_\nu(\theta_r) = \begin{vmatrix} \cos r(\nu-1)x & -\sin r(\nu-1)x \\ -\sin r(\nu-1)x & -\cos r(\nu-1)x \end{vmatrix} \quad (1.1)$$

$l = n/2 + 1$ (для четного n), $l = (n+1)/2$ (для нечетного n), $\tau_{\nu, \mu}(g)$ — μ -ый элемент матрицы $\tau_\nu(g)$, m ($\nu = 1, 2, \dots, l$) — числа, равные единице при $\nu = 1$, а также $\nu = l$ (для четного n), и двум во всех остальных случаях.

Считая плоскость xOy комплексной, обозначим ее пересечение с областью, занятой средой, через Ω . Под символом z в зависимости от физического смысла используемых обозначений будем понимать некоторую точку из Ω или ее аффикс.

Область Ω разбивается плоскостями Π_r ($r = 0, 1, \dots, n-1$) на элементарные ячейки (фиг. 1). Ячейку, ограниченную плоскостями Π_0 и Π_1 , обозначим Ω^e ($e = C_0$) и назовем основной. Ячейку, полученную из основной при помощи движения $g \in C_{n-1}$, будем обозначать Ω^g .

Рассмотрим набор функций Q_μ ($\mu = 1, 2$), заданных на области Ω и удовлетворяющих условиям



Фиг. 1.

$$Q_\mu(gz) = \sum_{\nu=1}^2 \tau_{\nu, \mu}(g) Q_\nu(z) \quad \forall g \in C_{n-1}, \quad \forall z \in \Omega \quad (\mu = 1, 2) \quad (1.2)$$

где под gz понимается образ точки z , полученный в результате движения g . Будем говорить, что этот набор преобразуется по представлению τ_ν . Особо подчеркнем, что применение такой терминологии к функциям, описывающим компоненты нагрузки или напряженно-деформированного состояния среды, предполагает введение инвариантной системы отсчета. Последнее означает, что указанные компоненты для точек основной ячейки Ω^e отвечают осям x и y , а для точек ячейки Ω^g — осям gx и gy .

Остановимся на некоторых важных особенностях функций Q_μ ($\mu = 1, 2$).

Во-первых, согласно соотношению (1.2) задание этих функций на Ω^e однозначно определяет любую из них во всей области Ω . Именно свойства подобного рода обычно относят к симметрическим.

Во-вторых, циклическая и антициклическая функции, то есть функции с известными циклическими свойствами, являются соответственно функциями Q_{11} и Q_{21} из набора, преобразующегося по представлению τ_1 .

Указанные особенности дают возможность расценивать выражение (1.2) как описание специфических симметрических свойств, отвечающих

представлению τ , группы C_n . В дальнейшем будем говорить, что функция Q_{ν} обладает обобщенными циклическими свойствами. Линейную задачу теории упругости для циклически-симметричной среды при нагрузке Q_{ν} естественно назвать обобщенной циклической. Ее решение всегда сопровождается существенными упрощениями [7].

Выясним характер упрощений в плоской обобщенной циклической задаче для изотропной среды. Без учета свойств типа (1.2) она бы сводилась к решению системы функциональных уравнений вида [3, 4]:

$$\varphi_{\nu_r}(t_r) + t_r \overline{\varphi_{\nu_r}(t_r)} + \overline{\varphi_{\nu_r}(t_r)} = f_{\nu_r}(t_r) \quad (r = 0, 1, \dots, n-1) \quad (1.3)$$

где $\varphi_{\nu_r}(z)$ и $\psi_{\nu_r}(z)$ — комплексные потенциалы Колосона-Мусхелишвили (функции Гурса), аналитические в области Ω и отвечающие нагрузке Q_{ν_r} , t_r — точка контура $\Gamma_r = C, \Gamma, \Gamma$ или Γ_0 — контур основного отверстия (с центром на оси x), а $f_{\nu_r}(t_r)$ — функция, заданная на Γ_r и зависящая от нагрузки Q_{ν_r} . Легко видеть, что с увеличением количества отверстий растет число уравнений в системе (1.3) и усложняется структура комплексных потенциалов $\varphi_{\nu_r}(z)$ и $\psi_{\nu_r}(z)$.

В то же время согласно работам [2,8] функции $\varphi_{\nu_r}(z)$ и $\psi_{\nu_r}(z)$, отвечающие любой нагрузке из набора Q_{ν_r} ($\nu = 1, 2$), преобразующегося по представлению τ , группы C_n , могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned} \varphi_{\nu_r}(z) &= \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{\gamma=1}^2 \tau_{\nu_r \gamma}(C_r) \exp(irz) \Phi^{(\nu_r)}(\exp(-irz)z) \\ \psi_{\nu_r}(z) &= \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{\gamma=1}^2 \tau_{\nu_r \gamma}(C_r) \exp(-irz) \Psi^{(\nu_r)}(\exp(-irz)z) \end{aligned} \quad \forall z \in \Omega \quad (1.4)$$

где $\Phi^{(\nu_r)}(z)$ и $\Psi^{(\nu_r)}(z)$ ($\nu_r = 1, 2$) — функции, аналитические на внешности контура Γ . Искомыми являются только голоморфные составляющие функций $\Phi^{(\nu_r)}(z)$ и $\Psi^{(\nu_r)}(z)$. Что же касается их многозначных составляющих, то они определяются по нагрузке $Q_{\nu_r}(t)$ основного контура при помощи известных формул [3] для многозначных составляющих комплексных потенциалов $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Последнее замечание непосредственно вытекает из равенств (1.4), поскольку функции $\Phi^{(\nu_r)}(\exp(irz)z)$ и $\Psi^{(\nu_r)}(\exp(irz)z)$ при $r = 1, 2, \dots, n-1$ аналитичны внутри основного контура.

Таким образом, обобщенная циклическая задача сводится к определению только четырех функций $\Phi^{(\nu_r)}(z)$ и $\Psi^{(\nu_r)}(z)$, структура которых весьма проста. Для этого можно воспользоваться системой двух функциональных уравнений:

$$\varphi_{\nu_r}(t) + t \overline{\varphi_{\nu_r}(t)} + \overline{\varphi_{\nu_r}(t)} = f_{\nu_r}(t) \quad (\nu_r = 1, 2) \quad (1.5)$$

где t — точка контура Γ . Поскольку уравнения (1.5) представляют собой стандартные граничные условия на основном контуре, то их правые части $f_{\nu_r}(t)$ вычисляются по нагрузке $Q_{\nu_r}(t)$ этого контура из обычных соотношений [3]. При этом, разумеется, предполагается,

что набор нагрузок Q_{ν} ($\nu = 1, 2$), для которых составлены граничные условия (1.5), содержит в себе рассматриваемую нагрузку Q_{μ} .

Если из системы (1.5) найти функции $\Phi^{(\nu)}(z)$ и $\Psi^{(\nu)}(z)$ ($\nu = 1, 2$), то комплексные потенциалы (1.4) при $\rho = \mu$ удовлетворяют граничному условию (1.3), отвечающему значению $r = 0$. Докажем теперь, что указанные потенциалы удовлетворяют условиям (1.3) при любом r . Для этого заметим, что в координатной системе xOy

$$\begin{aligned} C_r z &= \exp(ir\alpha) z, \quad t_r = \exp(ir\alpha) t \\ f_{\nu\rho}(t_r) &= \exp(it_r\alpha) \sum_{r=1}^2 \tau_{\nu\rho r}(C_r) f_{\nu\rho}(t) \end{aligned} \quad (1.6)$$

а комплексные потенциалы (1.4) обладают следующими свойствами [8]:

$$\begin{aligned} \varphi_{\nu\sigma}(\exp(ir\alpha) z) &= \exp(ir\alpha) \sum_{r=1}^2 \tau_{\nu\sigma r}(C_r) \varphi_{\nu\rho}(z) \\ \psi_{\nu\sigma}(\exp(ir\alpha) z) &= \exp(-ir\alpha) \sum_{r=1}^2 \tau_{\nu\sigma r}(C_r) \psi_{\nu\rho}(z) \end{aligned} \quad (\sigma = 0, 1, \dots, n-1) \quad (1.7)$$

Подставляя равенства (1.6), (1.7) в уравнение (1.3), после элементарных преобразований придем к выражению

$$\sum_{r=1}^2 \tau_{\nu\mu r}(C_r) [\varphi_{\nu\rho}(t) + t \overline{\varphi_{\nu\rho}(t)} + \overline{\psi_{\nu\rho}(t)}] = \sum_{r=1}^2 \tau_{\nu\mu r}(C_r) f_{\nu\rho}(t)$$

которое на основании (1.5) представляет собой тождество.

Итак, комплексные потенциалы (1.4), удовлетворяющие условиям (1.5), являются решением обобщенной циклической задачи (1.3).

С абстрактной точки зрения уравнения (1.5) описывают сужение оператора (1.3) на пространство комплексных потенциалов (1.4), отвечающих обобщенным циклическим задачам, то есть рассматриваемый подход является частной реализацией общей схемы учета симметрии в задачах механики деформируемого твердого тела [7]. Характер упрощений, получаемых для обобщенной циклической задачи очевиден: при любом количестве отверстий в кольце число уравнений в системе (1.5) равно лишь двум.

2. Распад плоской задачи для изотропной среды с циклической симметрией на обобщенные циклические задачи. Произвольная функция, в том числе и нагрузка Q , заданная на области Ω с группой C_{2n} симметрии, может быть разложена на составляющие с обобщенными симметрическими свойствами [2, 6]. В принятой терминологии это означает, что рассматриваемая задача при любой нагрузке распадается на обобщенные циклические задачи.

Без ограничения общности далее изучается только симметричная (Q_1) или кососимметричная (Q_2) относительно оси x контурная нагрузка. Из результатов работы [2] вытекает, что разложение нагрузки имеет весьма простой вид

$$Q_{\mu} = \sum_{\nu=1}^2 Q_{\nu\mu} \quad (\mu = 1, 2) \quad (2.1)$$

причем

$$Q_{\nu}(t_j) = \frac{m_{\nu}}{n} \sum_{r=0}^{n-1} \tau_{\nu jr} (C_r) \exp(-irx) Q_{\nu}(\exp(irx) t_j) \quad (2.2)$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, l; j = 1, 2; j = 0, 1, \dots, n-1)$$

В формуле (2.2) под t_j понимается аффикс точки j -го контура, а контурная нагрузка задается комплексной функцией. Этот прием был использован в [2] для получения более общих соотношений.

Заметим, что для составления уравнений (1.5) нам нужны значения нагрузок Q_{ν} ($\nu = 1, 2$) только на основном контуре. Поэтому с практической точки зрения из всех выражений (2.2) следует сохранить только одно, отвечающее значению $j = 0$, то есть

$$Q_{\nu}(t) = \frac{m_{\nu}}{n} \sum_{r=0}^{n-1} \tau_{\nu 0r} (C_r) \exp(-irx) Q_{\nu}(\exp(irx) t) \quad (2.3)$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, l; \rho = 1, 2)$$

Если из всех полостей загружена только основная: $Q_{\nu}(\exp(irx) t) = \delta_{r0} Q_{\nu}(t)$ ($r = 0, 1, \dots, n-1$), то из формулы (2.3) вытекает, что

$$Q_{\nu}(t) = \frac{m_{\nu}}{n} \delta_{r0} Q_{\nu}(t) \quad (\nu = 1, 2, \dots, l; \rho = 1, 2) \quad (2.4)$$

Здесь и в дальнейшем δ_{r0} и δ_{r1} — символы Кронекера.

Таким образом, исследование плоской задачи для изотропной среды с циклической симметрией может быть проведено по общей схеме учета симметрии [7]: а) разложение на обобщенные циклические задачи; б) решение последних; в) суперпозиция полученных результатов. Эффективность этой схемы связана с отмеченными ранее упрощениями, которые сопутствуют этапу б).

3. Решение обобщенных циклических задач для изотропной среды с круговыми отверстиями методом Шермана-Космодамианского [3]. Все сказанное выше относилось к отверстиям достаточно общего вида. Ограничимся теперь изучением только круговых отверстий единичного радиуса. Кроме того, будем считать, что функции $\varphi_{\nu}(z)$ и $\psi_{\nu}(z)$ голоморфны на внешности основного контура, так как многозначные составляющие комплексных потенциалов известны заранее. Тогда искомые функции $\Phi^{(\nu)}(z)$ и $\Psi^{(\nu)}(z)$ можно искать в виде

$$\Phi^{(\nu)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu k}^* (z-R)^{-k}; \quad \Psi^{(\nu)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{\nu k}^* (z-R)^{-k} \quad (\nu = 1, 2) \quad (3.1)$$

где $a_{\nu k}^*$ и $b_{\nu k}^*$ ($\nu = 1, 2; k = 1, 2, \dots$) — неизвестные коэффициенты.

Подставим выражения (3.1) в (1.4) и разложим комплексные потенциалы $\varphi_{\nu}(z)$ и $\psi_{\nu}(z)$ ($\nu = 1, 2, \dots$) вблизи основного контура в ряды Лорана:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\nu\rho}(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu k}^* (z - R)^{-k} + \\
&+ \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{\gamma=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu k}^* C_{k+s-1}^s z^{k+s} (-1)^k \lambda_{s-1, k+s}^{(\nu\rho)} (z - R)^s \\
\psi_{\nu\rho}(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{\nu k}^* (z - R)^{-k} + \\
&+ \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{\gamma=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} b_{\nu k}^* C_{k+s-1}^s z^{k+s} (-1)^k \lambda_{s-1, k+s}^{(\nu\rho)} (z - R)^s
\end{aligned} \tag{3.2}$$

При этом

$$\begin{aligned}
\lambda_{k\nu}^{(\nu\rho)} &= \sum_{m=0}^{n-1} \cos [m(\nu - 1)\alpha] \exp(ikm\alpha) (1 - \exp(im\alpha))^{-1} \\
\lambda_{k\nu}^{(\nu\rho)} &= (-1)^{\nu-1} \sum_{m=1}^{\nu-1} \sin [m(\nu - 1)\alpha] \exp(ikm\alpha) (1 - \exp(im\alpha))^{-1} \quad (\nu \neq \rho)
\end{aligned}$$

$\epsilon = 1$ R , C_k^s — число сочетаний из k элементов по s ; R — радиус окружности центров.

Разложим обе части граничных условий (1.5) в ряд Фурье, учитывая соотношения (3.2), и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $\sigma = e^{i\theta}$ (θ — полярный угол точки основного контура). В результате получим квазирегулярную бесконечную систему уравнений

$$\sum_{\gamma=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} [A_{s\rho k\gamma}^{(j)} a_{\nu k} + B_{s\rho k\gamma}^{(j)} b_{\nu k}] = f_{s\rho}^{(j)} \quad (s = 1, 2, \dots; j, \rho = 1, 2) \tag{3.3}$$

Здесь $a_{1k} = a_{1k}^*$, $b_{1k} = b_{1k}^*$, $a_{2k} = -ia_{2k}^*$, $b_{2k} = -ib_{2k}^*$ — искомые действительные коэффициенты, $f_{s\rho}^{(j)}$ — коэффициенты при σ^{-s} ($j = 1$) и σ^s ($j = 2$) в разложении правой части уравнений (1.5) в ряд Фурье,

$$\begin{aligned}
A_{s\rho k\gamma}^{(1)} &= \delta_{k\rho} \delta_{\gamma\rho} + (-1)^{k+\rho+1} \epsilon^{k+\rho-1} [R(s+1) C_{k+s-1}^{s+1} T_{s, k+s-1}^{(\gamma\rho)} + \\
&+ (s+2) C_{k+s-1}^{s+2} T_{s-1, k+s-2}^{(\gamma\rho)}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{s\rho k\gamma}^{(2)} &= (1 + \delta_{s1}) (-1)^k C_{k+s+1}^s z^{k+s} T_{s-1, k+s}^{(\gamma\rho)} + \\
&+ \delta_{\rho 1} (-1)^{\rho} [R(s-1) \delta_{k, s-1} + (1 - \delta_{1s})(s-2) \delta_{k, s-2}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{s\rho k\gamma}^{(1)} &= (-1)^{k+\rho+1} C_{k+s+1}^s z^{k+s} T_{s+1, k+s}^{(\gamma\rho)}, \quad B_{s\rho k\gamma}^{(2)} = \delta_{\rho 1} \delta_{s\rho} (-1)^{\rho-1} \\
T_{s, k}^{(\gamma\rho)} &= i_{s, k}^{(\gamma\rho)}; \quad T_{s, k}^{(\gamma\rho)} = -i_{k, s}^{(\gamma\rho)} \quad (\rho \neq \gamma)
\end{aligned}$$

Система (3.3) решается методом редукции. После определения коэффициентов $a_{\nu k}$ и $b_{\nu k}$ ($\rho = 1, 2$; $k = 1, 2, \dots$) значения комплексных потенциалов $\varphi_{\nu\rho}(z)$ и $\psi_{\nu\rho}(z)$ вычисляются с помощью (3.1) и (1.4).

4. Напряженное состояние, вызванное равномерным давлением интенсивности p на основном контуре. Несмотря на частный характер, эта задача имеет большое значение для многочисленных приложений. В самом деле, из нее с помощью поворотов и суперпозиций может быть получен целый ряд практически важных задач.

Согласно (2.4) $Q_{,1}(t) = pm(t - R)/n$, $Q_{,2} = 0$, то есть рассматриваемая задача распадается на l обобщенных симметричных задач, причем $f_{sp}^{(j)} = 0$ ($s = 1, 2, \dots; j = 1, 2$) за исключением $f_{11}^{(2)} = pm_{,1}n$.

Допустимый уровень редукции контролировался соответствием между заданным давлением p и получаемыми в результате расчета напряжениями σ_r в контурных точках. Во всех приводимых далее результатах нагрузка не превышала 3% от величины p . При этом в системе (3.3) удерживалось до 80 уравнений.

В ходе вычислений в широком диапазоне варьировалось количество отверстий и величина $d = 2R \sin(\alpha/2) - 2$ (расстояние между смежными контурами).

Таблица 1

n	d	$\theta=0$	$3\pi/12$	$5\pi/12$	$7\pi/12$	$9\pi/12$	∞
5	0,4	-0,871	-1,04	-1,67	-3,00	-0,08	-2,63
	0,7	-0,98	-1,16	-1,56	-1,56	-0,742	-1,086
	1,0	-1,00	-1,12	-1,32	-1,19	-0,92	-1,48
10	0,4	-0,848	-1,234	-2,352	-0,88	-0,71	-2,23
	0,7	-1,01	-1,34	-1,78	-0,61	-1,28	-1,73
	1,0	-1,05	-1,23	-1,33	-0,80	-1,15	-1,42
20	0,4	-0,81	-1,36	-2,67	-0,51	-1,81	-2,07
	0,7	-1,08	-1,45	-1,51	-0,41	-1,46	-1,54
	1,0	-1,10	-1,29	-1,20	-0,77	-1,27	-1,34
∞	0,4	-1,36	-2,08	-1,23	-1,23	-2,08	-1,37
	1,0	-1,20	-1,30	-0,97	-0,97	-1,30	-1,20

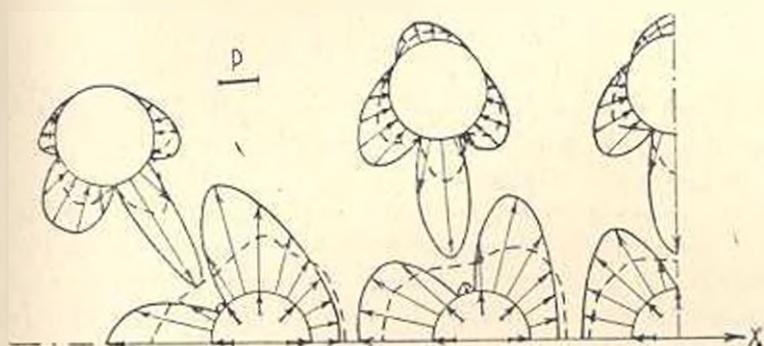
Таблица 2

n	d	$\theta=\pi$	$15\pi/12$	$17\pi/12$	$19\pi/12$	$21\pi/12$	2π
5	0,4	1,414	-3,48	0,09	0,75	0,38	0,03
	0,7	0,79	-1,68	-0,49	0,73	0,49	0,10
	1,0	0,54	-1,03	-0,49	0,50	0,42	0,11
10	0,4	0,96	-0,45	-2,11	0,76	0,71	0,27
	0,7	0,67	-0,21	-1,79	0,42	0,76	0,35
	1,0	0,49	0,20	-1,16	0,12	0,59	0,32
20	0,4	0,83	0,72	-3,11	0,67	0,82	0,38
	0,7	0,54	0,41	-1,69	-0,10	0,81	0,48
	1,0	0,43	0,18	-1,08	-0,25	0,60	0,42
∞	0,4	0,5	1,43	-1,57	-1,57	1,43	0,5
	1,0	0,33	0,48	-0,78	-0,78	0,48	0,33

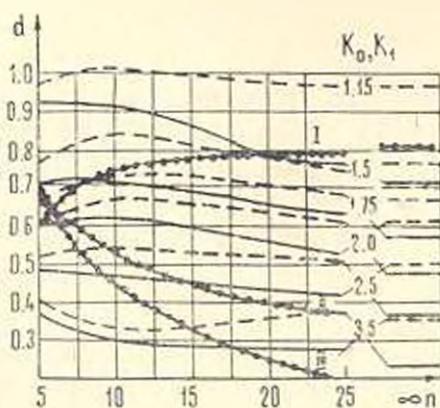
В табл. 1 и 2 приведены значения σ_r в зависимости от n , d и полярного угла θ соответственно на контурах Γ и Γ_1 . Для сравнения в строках $n = \infty$ помещены данные для среды периодической структуры, полученные по методике из работы [9]. Очевидно, что задача о напряженном со-

стоянии такой среды является предельным случаем для рассматриваемых циклических задач, так как при фиксированном параметре d и $n \rightarrow \infty$ радиус R кольца отверстий неограниченно возрастает. Анализ численных результатов показывает, что при $d \geq 1$ распределение напряжений в средах циклической и периодической структуры практически совпадают уже при $n = 30$. Для меньших значений величины d это совпадение достигается при значительно большем числе n .

Характерные эпюры σ_0 на контурах Γ и Γ' для $n = 5$ (слева), $n = 20$ (в центре) и $n = \infty$ (справа) приведены на фиг. 2. Сплошные линии графиков отвечают значению $d = 0,4$, штриховые — $d = 1,0$. При любом числе n и $d > 0,4$ минимальные напряжения на основном контуре и максимальные на смежном достигаются вблизи прямой, проходящей через центры отверстий. При значениях $d < 0,4$ в указанной зоне основного контура, как правило, возникают зоны сжимающих напряжений σ_0 , быстро растущих с уменьшением расстояния d .



Фиг. 2.



Фиг. 3.

На фиг. 3 приведены номограммы коэффициента концентрации напряжений $k = \sigma_{\text{max}}/p$. Сплошные и штриховые линии являются линиями уровня коэффициента k соответственно для основного ($k = k_0$) и смежного ($k = k_1$) с ним контура. Справа от основного поля номограммы

указаны асимптоты этих линий ($n \rightarrow \infty$). Нетрудно видеть, что при малых значениях d наибольшие по величине напряжения возникают на незагруженном контуре Γ_1 .

Для удобства анализа напряженного состояния на поле номограммы нанесены три сепаратриссы. Их точки отвечают геометрическим параметрам задач, для которых: I) $k_0 = k_1$, II) $k_1 = k_u$, III) $k_2 = \bar{k}_u$, где k_u — коэффициент концентрации напряжений в соответствующей циклической задаче (все контуры загружены давлением с интенсивностью p).

ՌԵԿՈՆԸՅԱՐ ՕՂԱԿՈՎ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ԽՈՒՈՉՆԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ԻՉՈՏՐՈՊ
 ԻՆԶԱՎԱՅՐԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ
 ԽՆԴՐԻ ԼՈՒՍՄԱՆ ԻՆԹՈՂԻ ՄԱՍԻՆ

Ի Լ ԲՈՒՐԻՇԿԻՆ, Վ Պ ՏՈՒՊՏԱ

Ա մ փ ո փ ո մ

Շարադրված է ուղղանկյուն օղակով շրջանային անցքերով թուլացված իզոտրոպ միջավայրի համար առաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծման արդյունավետ մեթոդը:

Խնդիրը բերված է ուղղանկյունի մեթոդով լուծվող (Յ.1) անվերջ կվադրի ուղղանկյուն համակարգի: Կատարված է խոտոչներից մեկի վրա տրված ճշնշումից առաջացած լարվածային վիճակի հետազոտություն: Ստացված են բևեռավորված և նրան հարակից խոտոչների վրա լարման բաշխման բնութագրիչ էպյուրաններ: Կատուցված է նոմոգրամմա, որը հնարավորություն է տալիս որոշելու շ, լարման մաքսիմում արժեքը, կախված խոտոչների թվից և նրանց միջև եղած հեռավորությունից:

METHOD OF SOLUTION OF PLANAR PROBLEM
 OF THE THEORY OF ELASTICITY IN ISOTROPIC
 MEDIUM WITH REGULAR RING OF CIRCULAR HOLE

M. I. BURISHKIN, V. P. SHUPTA

S u m m a r y

An account of an effective method for the solution of planar problems of the theory of elasticity in an isotropic medium weakened with a regular ring of circular hole is given. Studies of stress condition aroused due to pressure was carried out in one of the cavities. A character diagram of distribution of stresses σ_1 on loaded cavity and adjacent to it has been revealed. A nomogram has been drawn out which can help to determine the maximum stress value σ_1 depending on the number of cavities and distances between them.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буйвол В. М. Бігармонічна задача для багатозв'язних систем з циклічною симетрією. Прикладна механіка, 1962, т. 8, № 3.
2. Бурьшкін М. А. Обобщенная циклическая задача теории упругости. Сб. «Механика деформируемых сред», вып. 6. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1979, с. 174—183.
3. Космодамианский А. С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. Киев: Вища школа, 1975. 228 с.
4. Космодамианский А. С. Распределение напряжений в изотропных многосвязных средах. Донецк: Изд-во Донецкого ун-та, 1972. 266 с.
5. Ворович И. И., Космодамианский А. С. Упругие равновесие изотропной пластинки, ослабленной рядом криволинейных отверстий.—Изв. АН ССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 3.
6. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике. М.—Л.: Физматгиз, 1958. 354 с.
7. Бурьшкін М. А. Общая схема решения неоднородных линейных задач для симметричных механических систем.—ПММ, 1981, т. 45, вып. 5, с. 849—861.
8. Бурьшкін М. А. О функциях Колосова-Мухелишвили в обобщенных симметричных задачах теории упругости.—Докл. АН УССР, 1979, № 5, с. 344—348.
9. Бурьшкін М. А., Романенко Ф. А. О численном исследовании концентрации напряжений в изотропной пластинке, ослабленной регулярным рядом круговых отверстий. ПМ, 1979, т. 15, № 11, с. 93—100.

Одесский инженерно-строительный институт

Поступила в редакцию
15. III. 1982