ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVII, № 5, 1984 Механика

О ЗАДАЧЕ МАГНИТОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В АЗИМУТАЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

ВАРДАНЯН А. В., КАЗАРЯН К. Б.

Рассматривается задача колебаний круговой цилиндрической оболочки в азимутальном магнитном поле токопровода, расположенного на оси оболочки.

Вопросы колебаний цилиндрических оболочек во внешнем продольном магнитном поле обсуждены в работах [1—3].

Рассматриваемая здесь задача тесно связана с задачами поперечных колебаний пластин во внешнем продольном магнитном поле, освещенными в обзорах [4—5].

В настоящей работе в рамках известных положений теории магнитоупругости тонких тел дается решение и выводится дисперсионное соотношение относительно частоты магнитоупругих колебаний оболочки. На основе численных расчетов проведен анализ полученных результатов.

1. Круговая замкнутая цилиндрическая оболочка бесконечной длины, толщины $2h$, радиус срединной поверхности которой равен R, отнесена к триортогональной системе координат (α, β, γ). Координатная поверхность (α, β) совпадает со срединной поверхностью оболочки, координата α есть длина образующей, β — длина дуги направляющей окружности, γ изменяется от $-R$ до бесконечности.

Оболочка находится в магнитном поле, создаваемом линейным токопроводом, расположенным на оси оболочки.

Вектор напряженности магнитного поля токопровода имеет вид

$$\overline{H} = H(\gamma)\,\hat{i}_\beta, \quad H(\gamma) = \frac{2J_0}{c(R+\gamma)} \tag{1.1}$$

В (1.1) J_0 — сила электрического тока, c — электродинамическая постоянная, $\hat{i}_\beta$ — единичный орт к координатной линии β.

Материал оболочки является изотропным, электропроводящим, не обладает свойствами поляризации и намагниченности.

Физико-механические свойства материала оболочки характеризуются удельной плотностью ρ, модулем упругости E, коэффициентом Пуассона ν, электропроводностью σ.

Принимается, что оболочка находится в среде, электромагнитные свойства которой отождествляются со свойствами вакуума.

Задача рассматривается в рамках технической теории оболочек и гипотезы магнитоупругости тонких тел [1].

В соответствии с гипотезой магнитоупругости тонких тел имеем

$$u_\alpha = u(\alpha,\ \beta,\ t) - \gamma\frac{\partial w}{\partial\alpha},\quad u_\beta = v(\alpha,\ \beta,\ t) - \gamma\frac{\partial w}{\partial\beta},\quad u_\gamma = w(\alpha,\ \beta,\ t)$$

$$e_\alpha = \varphi(\alpha,\ \beta,\ t),\ e_\beta = \psi(\alpha,\ \beta,\ t),\ h_\gamma = f(\alpha,\ \beta,\ t) \tag{1.2}$$

В (1.2) u_α, u_β, u_γ — компоненты вектора перемещения произвольной точки оболочки, u, v — тангенциальные перемещения точек срединной поверхности, w — нормальное перемещение: e_α, e_β — тангенциальные компоненты вектора индуцированного, вследствие колебания оболочки, электрического поля, h_γ — нормальная компонента вектора индуцированного магнитного поля в области, занимаемой оболочкой.

В рассматриваемой задаче принимаются также известные дополнительные предположения относительно характера изменения возмущенного электромагнитного поля в среде, окружающей оболочку [6], которые аналитически запишутся в виде

$$\begin{gathered}
h_\alpha^{(1)} = h_\alpha^{(1)}(\alpha,\ \beta,\ t),\ h_\beta^{(1)} = h_\beta^{(1)}(\alpha,\ \beta,\ t) \text{ при } -h-\lambda \leqslant \gamma \leqslant -h \\
h_\alpha^{(2)} = h_\alpha^{(2)}(\alpha,\ \beta,\ t),\ h_\beta^{(2)} = h_\beta^{(2)}(\alpha,\ \beta,\ t) \text{ при } h \leqslant \gamma \leqslant h+\lambda \\
e_\alpha^{(1)}(-h-\lambda) \ll e_\alpha^{(1)}(-h),\ e_\beta^{(1)}(-h-\lambda) \ll e_\beta^{(1)}(-h) \\
h_\gamma^{(1)}(-h-\lambda) \ll h_\gamma^{(1)}(-h) \\
e_\alpha^{(2)}(h+\lambda) \ll e_\alpha^{(2)}(h),\ e_\beta^{(2)}(h+\lambda) \ll e_\beta^{(2)}(h),\ h_\gamma^{(2)}(h+\lambda) \ll h_\gamma^{(2)}(h)
\end{gathered} \tag{1.3}$$

Принятые предположения позволяют привести задачу колебаний оболочки к исследованию следующих замкнутых двумерных уравнений:

уравнений электродинамики в области, занимаемой оболочкой,

$$\begin{gathered}
\square(h_\alpha^+ - h_\alpha^-) = \frac{2}{\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial\beta} - \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) \\
\square(h_\alpha^+ + h_\alpha^-) = \frac{2h}{\lambda R}\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha} + \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) \\
\square(h_\beta^+ - h_\beta^-) = \frac{2}{\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial\beta} - \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \\
\square(h_\beta^+ + h_\beta^-) = \frac{2h}{\lambda R}\frac{\partial f}{\partial\beta}
\end{gathered} \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial\beta} - \frac{4\pi\sigma}{c}\varphi = \frac{h_\beta^+ - h_\beta^-}{2h} + \frac{h_\beta^+ + h_\beta^-}{2R} - \frac{8\pi\sigma j_0}{c^2 R}\frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha} + \frac{4\pi\sigma}{c}\psi = \frac{h_\alpha^+ - h_\alpha^-}{2h}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} - \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = -\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\quad\left(\square \equiv \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$$

(в (1.4) $h_\alpha^\pm$, $h_\beta^\pm$ — значения тангенциальных компонент h_α, h_β индуцированного магнитного поля на поверхностях оболочки $\gamma = \pm h$);

уравнений движения оболочки

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{\nu}{R}\frac{\partial w}{\partial\alpha} = -\frac{1-\nu^2}{2Eh}\int_{-h}^{h} R_\alpha\, d\gamma$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\beta} = -\frac{1-\nu^2}{2Eh}\int_{-h}^{h} R_\beta\, d\gamma \qquad (1.5)$$

$$D\Delta^2 w + \frac{2Eh}{R(1-\nu^2)}\left(\frac{w}{R} + \nu\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\partial v}{\partial\beta}\right) + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} =$$

$$= \int_{-h}^{h} R_\gamma d\gamma + \int_{-h}^{h}\left(\frac{\partial R_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial R_\beta}{\partial\beta}\right)\gamma d\gamma \qquad \left(D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\right)$$

В уравнениях (1.5) не приведены малые члены, характеризующие инерцию тангенциальных перемещений.

Уравнения (1.4) и (1.5) связаны между собой посредством компонент R_α, R_β, R_γ вектора пондеромоторной силы Ампера $\overline{R}$, обусловленного взаимодействием индуцированного в оболочке электромагнитного поля с внешним магнитным полем $\overline{H}$.

$$R_\alpha = -\frac{\sigma H(\gamma)}{c}\left\{\frac{\gamma H(\gamma)}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial t} - \gamma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{c}{8\pi\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(h_\beta^+ + h_\beta^-\right) - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(h_\alpha^+ + h_\alpha^-\right) + \frac{h}{R}\left(h_\beta^+ - h_\beta^-\right)\right]\right\} \qquad (1.6)$$

$$R_\beta = 0, \quad R_\gamma = \frac{\sigma H(\gamma)}{c}\left(\varphi - \frac{H(\gamma)}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

Система уравнений (1.4), (1.5) с учетом (1.6) является замкнутой системой относительно десяти неизвестных функций u, v, w, φ, ψ, f, h_α^+, h_α^-, h_β^+, h_β^-.

2. Представим решения системы уравнений (1.4), (1.5) в виде плоских монохроматических волн

$$Q = Q_0 \exp i(\omega t - k_1\alpha - k_2\beta) \qquad (2.1)$$

где под Q_0 подразумевается любая из неизвестных функций уравнений (1.4), (1.5), ω — частота магнитоупругих колебаний, k_1, k_2 — волновые числа.

Подставляя (2.1) в систему уравнений (1.4), (1.5) с учетом (1.6) и выполняя соответствующие интегрирования, получим систему однородных алгебраических уравнений.

Из условия равенства нулю детерминанта этой системы имеем следующее характеристическое уравнение относительно частоты магнитоупругих колебаний тонкой оболочки:

$$D(k_1^2+k_2^2)^2+\frac{2Ehk_1^4}{R^2(k_1^2+k_2^2)^2}-2\rho h\omega^2=$$

$$=-\frac{2\sigma i\omega hH_0^2}{c^2(1+\lambda h\nu_1^2)(4\pi\sigma h\lambda\nu_0^2+i\omega)}\Bigg\{4\pi\sigma h\lambda k_2^2(1+h\lambda\nu_0^2)+$$

$$+i\omega(1+h\lambda\nu_1^2)-\frac{k_1^2h^2(k_2^2-\nu k_1^2)}{\nu_0^2R^2(k_1^2+k_2^2)^2}\Bigg[k_2^2(4\pi\sigma h\lambda\nu_0^2+i\omega)+ \tag{2.2}$$

$$+\frac{2}{3}i\omega\nu_0^2(1+h\lambda\nu_1^2)\Bigg]\Bigg\}$$

где $\nu_0^2=k_1^2+k_2^2-\omega^2/c^2$, $\nu_1^2=k_1^2+k_2^2+\dfrac{4\pi\sigma i\omega}{c^2}$, H_0 — значение внешнего магнитного поля на срединной поверхности оболочки.

В (2.3) присутствует неизвестная величина λ. В работах [7, 8] на основе сопоставления точных решений задач магнитоупругих колебаний пластинки с приближенными решениями, основанными на допущении о характере изменения электромагнитного поля во внешних пограничных областях пластинки, показано, что с достаточной точностью можно принять

$$\lambda=(k_1^2+k_2^2)^{-1/2} \tag{2.3}$$

В дальнейшем выражение (2.3) принимается и для рассматриваемой цилиндрической оболочки.

В уравнении (2.2), пренебрегая малыми членами $h^2/R^2\ll 1$, $|i\omega|\ll 4\pi\sigma h\sqrt{k_1^2+k_2^2}$, $\omega^2/c^2\ll k_1^2+k_2^2$, $h^2(k_1^2+k_2^2)\ll 1$ и переходя к безразмерным величинам, получим, с учетом (2.3), следующее дисперсионное соотношение:

$$\Omega^3+a(1+b)\Omega^2+(1+ba_1)\Omega+a=0 \tag{2.4}$$

В (2.4) приняты следующие обозначения:

$$a=\frac{\sqrt{k_1^2+k_2^2}\,c^2(1+h\sqrt{k_1^2+k_2^2})}{4\pi\sigma h\Omega_0},\quad b=\frac{H_0^2}{4\pi\rho hc^2\sqrt{k_1^2+k_2^2}}$$

$$a_1=\frac{k_2^2c^2(1+h\sqrt{k_1^2+k_2^2})}{\Omega_0^2},\quad \Omega=\frac{i\omega}{\Omega_0}$$

$$\Omega_0^2=\frac{Eh^2(k_1^2+k_2^2)^2}{3(1-\nu^2)\rho}+\frac{Ek_1^4}{\rho R^2(k_1^2+k_2^2)^2}$$

На основе уравнения (2.4) приведем некоторые численные результаты относительно частоты колебаний $\mathrm{Im}\,\Omega$ и коэффициента затухания

$-\operatorname{Re}\Omega$ для шарнирно-опертой оболочки длины $L\left(k_1=\frac{\pi m}{L},\ k_2=\frac{n}{R}\right)$.

Рассмотрены три цилиндрические оболочки различной геометрии, изготовленные из меди. При решении уравнения (2.4) в качестве Ω_0 было взято значение первой низшей собственной частоты оболочки.

В табл. 1, 2 для трех различных оболочек приведены значения $\operatorname{Im}\Omega$ и $-\operatorname{Re}\Omega$ в зависимости от H_0.

Таблица 1

$H_0[T]$	$2h=0{,}2$см, $R=10$см, $L=20$см, $\Omega_0=6{,}1\cdot10^3$Гц		$2h=0{,}1$см, $R=2{,}5$см, $L=25$см, $\Omega_0=6{,}85\cdot10^3$Гц	
	$\operatorname{Im}\Omega$	$-\operatorname{Re}\Omega$	$\operatorname{Im}\Omega$	$-\operatorname{Re}\Omega$
1	1,0461	0,0042	1,0718	0,0109
2	1,1740	0,0135	1,2650	0,0317
3	1,3612	0.0226	1,5358	0,0487
4	1,5870	0.0296	1,8508	0,0598
5	1,8369	0,0345	2,1888	0,0669

Таблица 2

$H_0(T)$	$2h=0{,}02$см, $R=5$см, $L=50$см, $\Omega_0=1{,}05\cdot10^3$Гц	
	$\operatorname{Im}\Omega$	$-\operatorname{Re}\Omega$
0,4	0,9217	0,5688
0,44	0,8435	0,7198
0.48	0,6958	0,9084
0,52	0,2947	1,1589
0,53	0	1,4799
0,54	0	1,8115
0,55	0	2,1057
0,56	0	2,4235
0,57	0	2,8287
0,58	0,4155	3,5539
0,6	1,3518	3,5935
0,7	2,8805	3,6784
0,8	3,973	3,725
1,0	5,7744	3,774

Из табл. 1 видно, что увеличение интенсивности магнитного поля до 5 T приводит к увеличению частоты собственных колебаний почти в два раза. Коэффициент затухания также возрастает с увеличением интенсивности магнитного поля.

Рассматривая табл. 2, замечаем, что с увеличением интенсивности магнитного поля частота колебаний сначала убывает, достигая нулевого значения в некотором диапазоне значений H_0. Дальнейшее увеличение H_0 приводит к существенному увеличению частоты колебаний. Коэффициент затухания монотонно возрастает. Отметим, что в этом рассмотренном примере магнитоупругие эффекты ярко выражены при сравнительно слабом внешнем магнитном поле.

Таким образом, можно сделать вывод, что наличие азимутального магнитного поля приводит как к увеличению, так и к уменьшению частоты колебаний в зависимости от геометрических параметров оболочки.

Отметим также, что в тонких телах магнитоупругий колебательный процесс, в котором может иметь место затухание возмущений без колебаний, впервые был обнаружен С. А. Амбарцумяном как в задаче колебаний пластинки в поперечном магнитном поле [9], так и при рассмотрении колебаний пластинки в продольном магнитном поле [10].

ԱԶԻՄՈՒՏԱՅԻՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ԳՏՆՎՈՂ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Լ. Վ. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ, Կ. Բ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Ամփոփում

Բարակ մարմինների մագնիսաառաձգականության տեսության հիմնական դրույթների շրջանակներում, հետազոտված է ազիմուտային մագնիսական դաշտում գտնվող գլանային թաղանթի տատանումների խնդիրը։

Թաղանթի տատանումների հաճախականության և մարման գործակցի համար ստացված է բնութագրիչ հավասարումը։ Ներկայացված են թվային արդյունքները։

ON THE MAGNETOELASTIC VIBRATION PROBLEM OF A CYLINDRICAL SHELL IN AN AZIMUTHAL MAGNETIC FIELD

L. V. VARDANIAN, K. B. KAZARIAN

Summary

By means of the basic assumptions of magnetoelasticity theory of thin bodies, the problem of cylindrical shell vibration in an azimuthal magnetic field has been investigated. The dispersion equation relating to the shell vibration frequency and damping is obtained. The numerical results are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
2. *Kaliski S.* Magnetoelastic vibration of a perfectly conducting cylindrical shells in a uniform magnetic field. -Bull. de Acad. Pol. Sci. 1963, vol. 12, №11a.
3. *Гонткевич В. С.* Собственные магнитоупругие колебания круговой цилиндрической оболочки.— Тр. VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1966.
4. *Кудрявцев Б. А., Партон В. З.* Магнитоупругость.— Сб. Итоги науки и техники, сер. Механика деформируемого твердого тела, т. 14, М.: ВИНИТИ, 1981.
5. *Амбарцумян С. А., Белубекян М. В.* Взаимодействие проводящих оболочек и пластин с электромагнитным полем.— Межвузовский сб. научных трудов. Механика. Ереван: Издательство ЕрГУ, 1982, с. 5—22.
6. *Белубекян М. В.* К задаче колебаний токонесущих пластин.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1975, т. 28, № 2, с. 22—30.
7. *Белубекян М. В.* К задаче колебаний электропроводящей пластинки в продольном магнитном поле.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1976, т. 29, № 5, с. 42—49.
8. *Белубекян М. В., Варданян Л. В.* О применимости некоторых приближенных методов в задачах колебаний электропроводящей пластинки в продольном магнитном поле.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1977, т. 30, № 6, с. 44—52.
9. *Амбарцумян С. А.* К вопросу о колебаниях электропроводящей пластинки в поперечном магнитном поле.— МТТ, 1979, № 3.
10. *Амбарцумян С. А.* Некоторые особенности колебаний пластинок в магнитном поле.— МТТ, 1983, № 4, с. 194—200.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
26. XI. 1982