

ЧИСТОЕ СКОЛЬЖЕНИЕ ТЯЖЕЛОГО ЦИЛИНДРА
ПО ПЛОСКОСТИ, ПОКРЫТОЙ СЛОЕМ ВЯЗКОГО
СТРУКТУРНОГО ВЕЩЕСТВА

ПЕТРОСЯН А. Г.

Механизму влияния твердой поверхности на контактирующую с ней жидкость были посвящены работы многих исследователей. По-видимому, молекулы жидкости, тесно контактирующие с твердым телом, сцепляясь с поверхностью или адсорбируясь на ней, создают поверхностные слои, образующие поверхность раздела соприкасающихся тел. Эти поверхностные слои обладают особыми свойствами, часто резко отличными от свойств того же вещества в объеме фазы. По мнению Кингсберн [1] в области притяжения молекул металла происходит интенсификация вязкости части жидкости. Харди и Нотгейдж [2] и Хеникер [3] также утверждают, что вблизи твердой стенки необычайно высока вязкость по сравнению с вязкостью в свободном объеме жидкости.

Многочисленными исследованиями Дерягина и его сотрудников было установлено, что полярные жидкости на границе с твердым телом образуют полимолекулярные слои с упорядоченной структурой, определяющей особые свойства жидкости в этих слоях [4—8]. При этом экспериментально установлено отличие вязкости в этих слоях от обычных значений [9].

Для выяснения влияния граничных поверхностей на вязкость тонких пленок смазки между двумя оптически плоскими параллельными круглыми дисками, сближающимися друг с другом, Нидс [10] провел серию экспериментов. Измерения, выполненные им, показали, что с уменьшением толщины слоя увеличивается расхождение между измеренными и расчетными интервалами времени сближения дисков. Фактическое время сближения дисков было больше расчетного, что указывает на некоторое увеличение эффективной вязкости смазки в тонких пленках. Нельзя дать иного объяснения этому эффекту, кроме как предполагать, что близость твердой поверхности влияет на вязкость жидкости, заставляя пленку становиться более твердой [11].

Теоретические расчеты вышеуказанных экспериментов были основаны на классической теории континуума. Однако, классическая точка зрения налагает сильные ограничения на пределы, в которых континуальное описание макроскопического поведения может успешно отражать гонкую структуру материала. Накопившиеся факты последних лет свидетельствуют о том, что классическая теория континуума Навье—Стокса не может предсказать поведения некоторого класса жидкостей и особенно течений через тонкие капилляры и узкие зазоры, так как не содержит механизма для

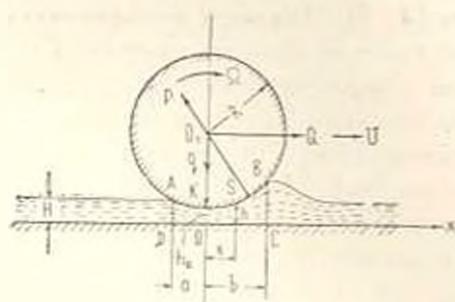
объяснения наблюдаемых новых физических явлений. Это обстоятельство совместно с другими недостатками классической теории континуума привело исследователей к разработке теории несимметричных (структурных) жидкостей. В этой теории введены два независимых кинематических векторных поля, одно из которых представляет поступательные движения частиц жидкости, а другое — вращательные движения частиц [12—16 и др.].

В работе [17] была рассмотрена задача качения тяжелого цилиндра по плоскости, покрытой слоем вязкого структурного вещества. Для решения задачи применялись приближенные уравнения смазочного слоя несимметричных жидкостей. Эти уравнения содержат члены, характеризующие несимметричность тензора силовых и моментных напряжений. Было показано влияние микроструктуры на величину силы тяги для качения цилиндра.

Для сравнения ниже рассмотрим ту же задачу при условии, что цилиндр совершает чистое скольжение по вязкому слою структурной жидкости¹.

Рассмотрим круглый цилиндр (каток) длины l , радиусом R и весом G , совершающий чистое скольжение по горизонтальной плоскости, покрытой слоем вязкого вещества толщины H (фиг. 1). Найдем величину силы тяги Q , необходимую для скольжения цилиндра.

Для решения задачи применим к части вязкого слоя $ABCD$, находящегося в рассматриваемый момент непосредственно под цилиндром, приближенные уравнения установившегося плоско-параллельного течения для смазочного слоя, имеющие вид [16, 19, 20]



Фиг. 1.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = (\nu + \nu_r) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\nu_r \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

$$(c_a + c_d) \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - 2\nu_r \left(2\omega + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.4)$$

Здесь ρ — массовая плотность жидкости, u , v — проекции скорости соответственно на оси x и y , p — давление, ω — проекция на оси z средней угловой скорости вращения частиц, ν — кинематическая ньютоновская вязкость, ν_r — кинематическая вращательная вязкость, c_a и c_d — коэффициенты моментной вязкости.

¹ Для классических ньютоновских жидкостей решение задачи дано С. М. Таргом [18].

Выбирая оси координат так, как показано на чертеже, и обозначая переменную толщину слоя под цилиндром на расстоянии x от начала координат через h , будем иметь

$$h = h_0 + R - \sqrt{R^2 - x^2} \quad (1.5)$$

где h_0 — толщина вязкого слоя при $x = 0$.

Обозначая абсциссы крайних точек A и B через $-a$ и b , примем для рассматриваемой задачи следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \text{при } y = 0 \quad u = 0, \quad v = 0, \quad \omega = 0 \\ \text{при } y = h \quad u = \dot{U}, \quad v = 0, \quad \omega = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \text{при } x = -a \text{ и } x = b \quad p = 0 \\ \text{при } x = -a \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Условия (1.6) выражают предположение о прилипании жидкости к твердой границе. Первое из условий (1.7) означает, что давление вне объема поджатой части вязкого слоя полагается постоянным. Последнее условие принято во избежание отрицательных давлений в слое $ABCD$ вблизи границы AD [21].

Решая уравнения (1.1) и (1.3) и используя граничные условия (1.6), для скорости u и угловой скорости ω , соответственно, получим

$$\begin{aligned} u = & \frac{1}{2\rho\nu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - hy) + \frac{y}{h} U \frac{kh \operatorname{sh} kh}{kh \operatorname{sh} kh + 2N^2(1 - \operatorname{ch} kh)} + \\ & + N^2 h \left[(e^{2y} - 1) \frac{(e^{-kh} - 1) \left[\frac{1}{2} \frac{U}{h} - \frac{h}{4\rho\nu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(1 + \frac{2N^2}{kh} \right) \right] - \frac{h}{2\rho\nu} \frac{\partial p}{\partial x}}{kh \operatorname{sh} kh + 2N^2(1 - \operatorname{ch} kh)} + \right. \\ & \left. + (e^{-2y} - 1) \frac{(e^{kh} - 1) \left[\frac{1}{2} \frac{U}{h} - \frac{h}{4\rho\nu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(1 - \frac{2N^2}{kh} \right) \right] - \frac{h}{2\rho\nu} \frac{\partial p}{\partial x}}{kh \operatorname{sh} kh + 2N^2(1 - \operatorname{ch} kh)} \right] \quad (1.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega = & \left[\frac{1}{2} \frac{U}{h} \frac{kh \operatorname{sh} kh}{kh \operatorname{sh} kh + 2N^2(1 - \operatorname{ch} kh)} - \frac{h}{4\rho\nu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] \times \\ & \times \left[\frac{e^{-2y}(e^{4k} - 1) - e^{2y}(e^{-4k} - 1)}{2\operatorname{sh} kh} - 1 \right] + \frac{1}{2\rho\nu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{\operatorname{sh} ky}{\operatorname{sh} kh} h - y \right) \quad (1.9) \end{aligned}$$

Здесь

$$N = \left(\frac{\nu_r}{\nu + \nu_r} \right)^{1/2}, \quad l = \left(\frac{c_a + c_d}{4\nu} \right)^{1/2}, \quad k = \frac{N}{l}$$

Для определения давления p воспользуемся уравнением неразрывности (1.4). Беря от обеих частей этого уравнения интегралы по y в пределах от 0 до h и принимая во внимание условия (1.6), получим

$$0 = \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy - \frac{\partial h}{\partial x} (u)_h = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy - U \frac{dh}{dx}$$

откуда, интегрируя по x , находим

$$\int_0^h u dy = Uh + C \quad (1.10)$$

Подставляя в левую часть полученного равенства значение u из (1.8) и вычисляя интеграл, получим

$$\frac{h^3}{6\gamma U} \frac{\partial p}{\partial x} f_h(N, l, h) = -(Uh + C) \quad (1.11)$$

где

$$f_h(N, l, h) = 1 + \frac{12l^2}{h^2} - \frac{6Nl}{h} \frac{kh(1 + \operatorname{ch} kh) - 2N^2 \operatorname{sh} kh}{kh \operatorname{sh} kh + 2N^2(1 - \operatorname{ch} kh)} \quad (1.12)$$

Заменяя здесь h его значением из (1.5) и определяя C по последнему из условий (1.7), найдем

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 6\gamma U \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{R^2 - a^2} + \sqrt{R^2 - x^2}} \frac{1}{h^3 f_h(N, l, h)} \quad (1.13)$$

Выражения (1.8) и (1.9) вместе с (1.13) дают законы распределения скоростей и угловых скоростей в слое.

Закон распределения давлений находим из (1.13), принимая во внимание условие (1.7)

$$p(x) = 6\gamma U \int_{-a}^x \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{R^2 - a^2} + \sqrt{R^2 - x^2}} \frac{dx}{h^3 f_h(N, l, h)} \quad (1.14)$$

Равнодействующая P сил давлений со стороны слоя на центр будет, очевидно, проходить через центр O , цилиндра, а ее проекции на оси координат будут равны

$$P_x = -l_0 \int_{-a}^b \frac{p(x) x dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad P_y = l_0 \int_{-a}^b p(x) dx \quad (1.15)$$

При этом абсцисса точки S приложения равнодействующей будет

$$x_s = \frac{P_y R}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2}} \quad (1.16)$$

Касательная составляющая вектора напряжения на элементе поверхности цилиндра, внутренняя нормаль к которому образует с осью ou угол φ , определяется по формуле

$$\tau_{xx} = \frac{1}{2} (\tau_{xx} - \tau_{yy}) \sin 2\varphi - \tau_{yx} \cos^2 \varphi + \tau_{xy} \sin^2 \varphi \quad (1.17)$$

В рассматриваемом нами случае имеем

$$\sin \varphi = \frac{x}{R}, \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{R}, \quad \sin 2\varphi = 2 \frac{x}{R}$$

а для напряжений —

$$\tau_{xx} = -p + 2\rho\nu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{yy} = \rho\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \rho\nu_r \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2\rho\nu_r \omega \quad (1.18)$$

$$\tau_{yy} = -p + 2\rho\nu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \rho\nu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho\nu_r \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - 2\rho\nu_r \omega$$

Следовательно, напряжение силы вязкости на поверхности цилиндра будет представляться в виде

$$(\tau_{xx})_h = \rho\nu \left[4 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{x}{R} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(1 - \frac{2x^2}{R} \right) - \frac{\nu_r}{\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]_h$$

или приближенно

$$(\tau_{xx})_h = -\rho\nu \left(1 + \frac{\nu_r}{\nu} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_h \quad (1.19)$$

так как остальные члены будут пренебрежимо малы.

Вычисляя $(\tau_{xx})_h$ с помощью (1.8) и (1.13), найдем для проекции результирующей силы от касательных напряжений на ось ox следующее приближенное выражение:

$$F_x = l_0 \int_{-a}^b (\tau_{xx})_h dx = -3\rho\nu U l_0 \int_{-a}^b \left[\frac{a^2 - x^2}{\sqrt{R^2 - a^2} + \sqrt{R^2 - x^2}} \frac{1}{f_h(N, l, h)} + \frac{h}{3} \frac{kh \operatorname{sh} kh}{kh \operatorname{sh} kh + 2N^2(1 - \operatorname{ch} kh)} \right] \frac{dx}{h^2} \quad (1.20)$$

Найденные выше формулы (1.15), (1.16) и (1.20) содержат три заранее неизвестных параметра: a , b и h_0 . Для их определения воспользуемся [21]: а) вторым условием (1.7) для давления, б) условием равновесия силы веса цилиндра с результирующей силой от давления слоя и в) предположением, что вблизи точки A , где слой наименее деформирован, можно приближенно считать толщину слоя AD равной заданной толщине недеформированного слоя H . Эти условия могут быть представлены в виде*

$$p(b) = 0, \quad P_g = q, \quad H = h_0 + R - \sqrt{R^2 - a^2} \quad (1.21)$$

* При составлении второго условия проекцией силы трения на ось ox пренебрегается.

Составляя уравнение равновесия приложенных к цилиндру сил в проекции на ось ox , для силы тяги находим

$$Q \geq -(P_x + F_x) \quad (1.22)$$

Для оценки полученных результатов произведем приближенный подсчет, полагая отношение $\frac{x}{R}$ настолько малым, что в выражениях, входящих под знак интегралов, можно положить $\sqrt{R^2 - x^2} \approx R$ и, следовательно, $h = h_0 = H$.

Тогда из (1.14) найдем

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{6\rho\nu U}{2RH^2 f_H(N, l, H)} \int_{-a}^x (a^2 - x^2) dx = \\ &= \frac{\rho\nu U}{RH^2 f_H(N, l, H)} (2a^3 - 3a^2x - x^3) \end{aligned} \quad (1.23)$$

где

$$f_H(N, l, H) = 1 + \frac{12l^2}{H^2} - \frac{6Nl}{H} \frac{kH(1 + \operatorname{ch} kH) - 2N^2 \operatorname{sh} kH}{kH \operatorname{sh} kH + 2N^2(1 - \operatorname{ch} kH)}$$

Первое из условий (1.21) приводит к уравнению

$$b^3 - 3a^2b - 2a^3 = 0$$

единственным положительным корнем которого будет $b = 2a$.

Подставляя значения p и b в (1.15) и (1.20), получим

$$\begin{aligned} P_x &= -5,4 \frac{\rho\nu U l_0 a^3}{R^2 H^2 f_H(N, l, H)}, \quad P_y = 6,75 \frac{\rho\nu U l_0 a^4}{RH^2 f_H(N, l, H)} \\ F_x &= -3\rho\nu U l_0 \frac{a}{H} f_0(N, l, H) \end{aligned} \quad (1.24)$$

где

$$f_0(N, l, H) = \frac{kH \operatorname{sh} kH}{kH \operatorname{sh} kH - 2N^2(1 - \operatorname{ch} kH)}$$

При этом оказывается, что величина F_x здесь имеет такой же порядок a/H , как и P_x и, следовательно, не может быть в (1.22) отброшена.

Сила трения будет создавать момент, равный $-RF_x$ и вызывающий качение цилиндра. Для определения величины a имеем

$$q = 6,75 \frac{\rho\nu U l_0 a^4}{RH^2 f_H(N, l, H)} \quad (1.25)$$

Сравнивая (1.25) с соответствующей формулой для q в случае качения цилиндра [17], видим, что при скольжении со скоростью $U = \Omega R$ ши-

рина слоя под цилиндром в $\sqrt[4]{2}$, то есть приблизительно в 1,2 раза больше, чем при качении.

Наконец, подставляя в (1.22) величины F_x и P_x из (1.24) и a из (1.25), получим

$$Q \geq \left[1,86 \frac{R}{H} \left(\frac{\rho \nu U l_0 H}{R \varrho} \right)^{3,4} f_{0L} f_L^{1,4} + 0,496 \frac{H}{R} \left(\frac{R a f_L}{\rho \nu U l_0 H} \right)^{1,4} \right] \varrho \quad (1.26)$$

или

$$Q \geq - [F_{x(кл)} f_{0L} f_L^{1,4} + P_{x(кл)} f_L^{1,4}]$$

где

$$f_{0L} = \frac{NL \operatorname{sh} NL}{NL \operatorname{sh} NL + 2N^2(1 - \operatorname{ch} NL)} \quad L = \frac{H}{l}$$

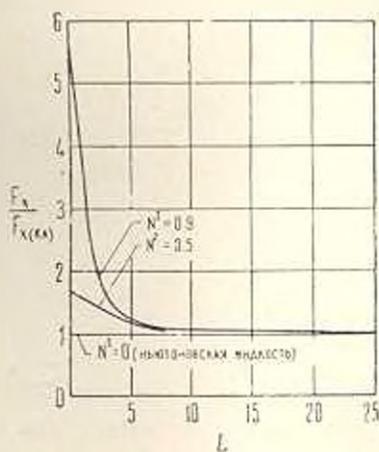
$$f_L = 1 + \frac{12}{L^2} - \frac{6N}{L} \frac{NL(1 + \operatorname{ch} NL) - 2N^2 \operatorname{sh} NL}{NL \operatorname{sh} NL + 2N^2(1 - \operatorname{ch} NL)}$$

Здесь $F_{x(кл)}$ и $P_{x(кл)}$ — значения соответствующих величин в случае классической ньютоновской жидкости.

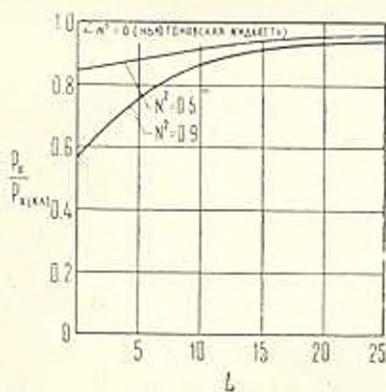
Сравнение (1.26) с соответствующей формулой для Q в случае качения цилиндра [17] показывает, что в данном случае, если положить $U = \Omega R$, потребная сила тяги будет значительно больше, чем при качении.

Заметим, что в выражении (1.26) величина, стоящая в квадратных скобках, может рассматриваться как коэффициент трения скольжения.

Выражение (1.26) для силы тяги сводится к выведенному Таргом [18] при $N \rightarrow 0$ или $L \rightarrow \infty$.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Фиг. 2 отражает изменение проекции на ось ox результирующей безразмерной силы от касательных напряжений $F_x / F_{x(кл)} = f_{0L} f_L^{1,4}$ в зависимости от параметра L для различных значений N . График показывает, что

снижение L соответствует возрастанию безразмерной силы $F'_x/F_{x(н.к.)}$ при всех значениях N , кроме $N = 0$, относящегося к классическому случаю ньютоновской жидкости, где она не зависит от изменений L .

На фиг. 3 показаны графики зависимости проекции на ось ox равнодействующей безразмерной силы давления $P_x/P_{x(н.к.)} = \int_L^{L_0}$ от L для различных значений N . График показывает, что снижение L соответствует снижению безразмерной силы $P_x/P_{x(н.к.)}$ при всех значениях N , кроме $N = 0$, относящегося к классическому случаю ньютоновской жидкости, когда она не зависит от изменений L .

Заметим, что снижение L соответствует уменьшению толщины вязкого слоя. Итак, чем меньше толщина вязкого слоя, тем более явно выражено влияние подструктуры, вызывающее существенное возрастание аффективной вязкости в тонких слоях.

ԾԱՆԻՐ ԴԱՆՆԻ ՄԱՔՈՒՐ ՍԱՀՐԸ ՄԱՆՈՒՑԻԻ ԿԱՌՈՒՅՎԱԾՔԱՅԻՆ ՆՅՈՒԹԻ ՇԵՐՏՈՎ ԵԱՍԿԱՆ ԸՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱՅՈՎ

Լ. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո Վ

Քննարկված է ծանր գյանի մաքուր սահրը մաձուցիկ կառուցվածքային նյութով ծածկված հարթության վրայով: Խնդրի լուծման համար կիրառված է ոչ սիմետրիկ (կառուցվածքային) հեղինակների տեսությունը: Ստացված է անալիտիկ արտահայտություն գլանին սահեցնելու քարշիչ ուժի համար, իսկ միկրոստրուկտուրային ազդեցությունները պատկերված են գծագրերի վրա:

THE PURE SLIDING OF HEAVY CYLINDER ALONG THE PLANE COVERED WITH A LAYER OF VISCOUS STRUCTURAL SUBSTANCE

L. G. PETROSSIAN

S u m m a r y

The pure sliding of heavy cylinder along the plane covered with a layer of viscous structural substance is considered. To obtain the solution the theory of asymmetrical (structural) fluids is applied. The analytic expression for the tractional force necessary for cylinder sliding is obtained and the influence of the microstructure is illustrated by the graph.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kingsbury A.* A New Oil Testing Machine and Its Results.—*Trans. ASME*, 1903, vol. 24, p. 143.
2. *Hardy W., Nollage M.* Studies in Adhesion — *J. Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 1926, vol. 112, p. 64.
3. *Heaneker J. C.* The Depth of a Surface Zone of a Liquid Reviews.—*Modern Physics*, 1949, vol. 21, p. 322.
4. *Дерягин Б. В., Еришова И. Г., Железный Б. В., Чурсаев Н. В.* Исследование теплового расширения структурной модификации воды в кварцевых капиллярах.—*ДАН СССР*, 1966, т. 170, № 4, с. 876.
5. *Дерягин Б. В., Зорин Э. М.* Оптическое исследование адсорбции и поверхностей конденсации паров вблизи насыщения.—*ДАН СССР*, 1954, т. 98, с. 93.
6. *Дерягин Б. В., Карасев В. В., Захарова Н. Н., Лазарев В. П.* Механизм граничной смазки и свойства граничного смазочного слоя.—*ЖТФ*, 1957, т. 27, № 5, с. 1076.
7. *Дерягин Б. В., Карасев В. В., Зорин Э. М.* Об особом агрегатном состоянии жидкостей в слоях, пограничных с поверхностью. *Сб. Строение и физические свойства вещества в жидком состоянии*. К.: Изд. Киевского у-та, 1954, с. 141.
8. *Фелкин Н. Н.* О температурном расширении воды в микрокапиллярах.—*ДАН СССР*, 1961, т. 138, № 6, с. 1389.
9. *Карасев В. В., Дерягин Б. В., Ефимова Е. Н.* Тепловое расширение воды в тонкопористых телах.—*Коллоидн. ж.*, 1962, т. 24, № 4, с. 471.
10. *Needs S. J.* Boundary Film Investigations. — *Trans. ASME*, 1940, vol. 62, p. 331
11. *Пракаш, Синха.* Теория сдвигания пленок микрополярных жидкостей.—*Тр. американского общества инженеров-механиков. Проблемы трения и смазки*, 1976, т. 98, серия F, № 1, с. 147.
12. *Grad H.* Statistical Mechanics, Thermodynamics and Fluid Dynamics Systems with an Arbitrary Number of Integrals. *Commun. Pure, App. Math.*, 1952, vol. 5, No. 4, p. 455.
13. *Аэро Э. А., Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В.* Асимметрическая гидромеханика.—*ПММ*, 1965, т. 29, вып. 2, с. 297.
14. *Нгуен Ван Дьеп, Листров А. Т.* О неизоотермической модели асимметричных жидкостей.—*Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа*, 1967, № 5, с. 132.
15. *Петросян А. Г.* Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжений. 1. Основные уравнения.—*Уч. записки ЕГУ*, 1976, № 3, с. 56.
16. *Петросян А. Г.* Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжений. 2. Феноменологические уравнения. Перекрестные эффекты.—*Уч. записки ЕГУ*, 1977, № 2, с. 74.
17. *Петросян А. Г.* Качение тяжелого цилиндра по плоскости, покрытой слоем вязкого структурного вещества.—*Изв. АН Арм.ССР, Механика*, 1981, т. 34, № 4, с. 52.
18. *Тарг С. М.* Основные задачи ламинарных течений. М.—Л.: Гостехтеориздат, 1951.
19. *Петросян А. Г.* Элементарная гидродинамическая аналогия прокатки (моментная теория).—*Проблемы машиностроения*, 1981, вып. 13, с. 38.
20. *Петросян А. Г.* Моментная гидродинамическая теория прокатки.—*ИМ*, 1982, т. 18, № 4, с. 116.
21. *Слезкин Н. А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ, 1955.

Поступила в редакцию