ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVII, № 4, 1984 Механика

РАЗРЕШАЮЩАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ПОЛОГИХ ГИБКИХ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

БЕЗОЯН Э. К., ГРИГОРЯН Г. С.

Получена разрешающая система приближенных интегро-дифференциальных уравнений пологих тонких гибких оболочек в перемещениях и усилиях при нелинейной наследственной упругости (ползучести), описываемой вытекающими из [1, 2] соотношениями, принятыми в [5].

В [6] получены приближенные соотношения между компонентами деформаций и внутренними усилиями, а также уравнения равновесия пологих оболочек и пластин при нелинейной вязкоупругости (ползучести), на основе смешанного вариационного уравнения Рейсснера ([7], стр. 635) с использованием потенциальных функций [7, 9] и приближенных соотношений, принятых в [1, 2].

В [11] на основе [1] получена разрешающая система интегро-дифференциальных уравнений короткой пологой цилиндрической оболочки известной модели В. З. Власова, полагая, что здесь криволинейные стержни, воспринимающие изгибающие моменты в продольных сечениях оболочки, являются идеальными двутаврами.

§ 1. *Исходные соотношения*

А. Выпишем некоторые известные геометрические соотношения приближенной теории тонких гибких оболочек (при прогибах, соразмерных с толщиной).

Деформации удлинения и сдвига в слое оболочки на расстоянии z от срединной поверхности [3]

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^z_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - k_1 w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
\varepsilon^z_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} - k_2 w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad (1.1) \\
\varepsilon^z_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
\end{aligned}
$$

Деформации удлинения и сдвига срединной поверхности

$$
\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - k_1 w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2
$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \tag{1.2}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}$$

Деформации изгиба

$$\varepsilon_{xx.и} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -z\varkappa_{xx}$$

$$\varepsilon_{yy.и} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -z\varkappa_{yy} \tag{1.3}$$

$$\varepsilon_{xy.и} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -2z\varkappa_{xy}$$

Уравнение совместности деформаций срединной поверхности

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_x\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1.4}$$

Выражения (1.1) с учетом (1.2) и (1.3) принимают вид

$$\varepsilon_{ij}^z = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij.и} \qquad (i, j = x, y) \tag{1.5}$$

В (1.1)—(1.4) приняты обозначения: u, v, w — перемещения точки срединной поверхности по направлениям x, y, z; $k_x = 1/\rho_x$, $k_y = 1/\rho_y$ — значения кривизн срединной поверхности оболочки; ρ_x, ρ_y — радиусы кривизны линий соответственно вдоль x и y; x, y — криволинейные координатные линии, совпадающие с линиями кривизны срединной поверхности оболочки; z — прямая, направленная к центру кривизны вдоль нормали к срединной поверхности.

Б. Выпишем соотношения нелинейной теории наследственной упругости (ползучести) для момента времени $t > t_0$ с учетом старения для случая пространственного напряженного состояния, полагая коэффициент Пуассона $\nu = \mathrm{const}$ [1, 2, 5]

$$\varepsilon_{ij} = (2-\delta_{ij})\left\{\frac{(1+\nu)\,\sigma_{ij}(t) - \nu\delta_{ij}\,s(t)}{E(t)} - \right.$$

$$-\int_{t_0}^{t}[(1+\nu)\,\sigma_{ij}(\tau) - \nu\delta_{ij}s(\tau)]\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right]d\tau - \tag{1.6}$$

$$\left. -\int_{t_0}^{t}[(1+\nu)\,\sigma_{ij}(\tau) - \nu\delta_{ij}s(\tau)]\,F[\sigma_0(\tau)]\frac{\partial}{\partial\tau}C(t,\tau)\,d\tau\right\}$$

Здесь

$$\sigma_0=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2+(\sigma_{xx}-\sigma_{zz})^2+(\sigma_{yy}-\sigma_{zz})^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2)} \qquad (1.7)$$

$$F[\sigma_0(\tau)]=1+\beta\sigma_0^{m-1}(\tau), \qquad \beta=\frac{\beta_0}{R^{m-1}} \qquad (1.8)$$

$$s(t)=\sigma_{xx}(t)+\sigma_{yy}(t)+\sigma_{zz}(t)$$

$$\delta_{ij}=\begin{vmatrix} 0 & i\neq j \\ 1 & i=j \end{vmatrix} \text{ символ Кронекера}$$

$F[\sigma_0(\tau)]$ характеризует нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями материала. Различные ее виды (см. [10]); $E(\tau)$ — переменный модуль мгновенной деформации; $C(t, \tau)=\left(C_0+\frac{A_1}{\tau}\right)[1-\exp(-\gamma(t-\tau))]$ — мера ползучести материала; β, γ, A_1, C_0, m — постоянные; R — предел прочности материала; $\beta_0>0$ — достаточно малое число; t_0 — момент времени, соответствующий приложению нагрузки.

Применительно к оболочкам при $E(t)=E=\text{const}$ и при справедливости гипотезы Кирхгофа-Лява соотношения (1.6) принимают вид

$$\varepsilon_{ij}^z=(2-\delta_{ij})\left\{\frac{(1+\nu)\sigma_{ij}^z-\nu\delta_{ij}s^z}{E}-\int_{t_0}^{t}[(1+\nu)\sigma_{ij}^z-\nu\delta_{ij}s^z]F(\sigma_0^z)K(t, \tau)d\tau\right. \qquad (1.9)$$

где

$$K(t, \tau)=\frac{\partial}{\partial\tau}C(t, \tau), \quad \sigma_0^z=\sqrt{(\sigma_{xx}^z)^2-\sigma_{xx}^z\sigma_{yy}^z+(\sigma_{yy}^z)^2+3(\tau_{xy}^z)^2} \qquad (1.10)$$

Здесь и далее, если это не вызывается необходимостью, аргументы x, y, z, t опускаются.

§ 2. *Вывод разрешающей системы уравнений оболочки двоякой кривизны*

Внутренние усилия и моменты, отнесенные к единице длины дуги, имеют известный вид [3, 4]

$$N_{ij}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{ij}^z dz, \qquad M_{ij}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{ij}^z z dz \quad (i, j=x, y) \qquad (2.1)$$

Перепишем (1.9) в виде

$$\frac{\sigma_{ij}^z}{E}-\int_{t_0}^{t}\sigma_{ij}^z F(\sigma_0^z)K(t, \tau)d\tau=\frac{(1-\nu)\varepsilon_{ij}^z+\nu\delta_{ij}\varepsilon^z}{(2-\delta_{ij})(1-\nu^2)} \quad (i, j=x, y) \qquad (2.2)$$

Здесь

$$\varepsilon^z=\varepsilon_{xx}^z+\varepsilon_{yy}^z$$

Принимая в (1.8) $m = 3$, соотношения (2.2) можем формально представить в виде

$$\frac{\sigma^*_{ij}}{E} - \int_{t_0}^{t} [\sigma^*_{ij} + \beta\sigma^*_{ij}(\sigma^*_i)^2] K(t, \tau)\, d\tau = \frac{(1-\nu)\,\varepsilon^*_{ij} + \nu\delta_{ij}\varepsilon^*}{(2-\delta_{ij})(1-\nu^2)} \tag{2.3}$$

где

$$(\sigma^*_i)^2 = (\sigma^*_{xx})^2 - \sigma^*_{xx}\sigma^*_{yy} + (\sigma^*_{yy})^2 + 3(\sigma^*_{xy})^2$$

Представим полные напряжения в произвольной точке в виде [3, 4, 12]

$$\sigma^*_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{ij,u} \tag{2.4}$$

принятом в упругих задачах и при учете линейной ползучести.

Здесь первые слагаемые в правых частях — так называемые, мембранные напряжения, вторые являются напряжениями изгиба. В общем случае напряжение изгиба принимаем в виде

$$\sigma_{ij,u} = \sigma_{ij0}\left(\frac{2z}{h}\right)^{2n-1} \quad (i, j = x, y) \tag{2.5}$$

где n — целое число, h — высота оболочки, σ_{ij0} — максимальные напряжения изгиба (они зависят только от x, y и t).

Умножая обе части каждого из уравнений (2.3) на dz, (а также на zdz) и интегрируя по толщине оболочки, запишем

$$\begin{gathered}
\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma^*_{ij}}{E}\, dz - \int_{t_0}^{t} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma^*_{ij} + \beta\sigma^*_{ij}(\sigma^*_i)^2]\, dz \right\} K(t, \tau)\, d\tau = \\
= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(1-\nu)\,\varepsilon^*_{ij} + \nu\delta_{ij}\varepsilon^*}{(2-\delta_{ij})(1-\nu^2)}\, dz \\
\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma^*_{ij}}{E}\, z dz - \int_{t_0}^{t} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma^*_{ij} + \beta\sigma^*_{ij}(\sigma^*_i)^2]\, z dz \right\} K(t, \tau)\, d\tau = \\
= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(1-\nu)\,\varepsilon^*_{ij} + \nu\delta_{ij}\varepsilon^*}{(2-\delta_{ij})(1-\nu^2)}\, z dz
\end{gathered} \tag{2.6}$$

В (2.6) содержатся интегральные выражения

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma^*_{ij}(\sigma^*_i)^2\, dz = A; \qquad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^*_{ij}(\sigma^*_i)^2\, z dz = B \quad (i, j = x, y) \tag{2.7}$$

На основе (2.1), (2.4) и (2.5) интегральные выражения (2.7) приводятся к виду

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h^2} N_{ij} N_0^2 + \frac{4(2n+3)^2}{h^4(4n+3)} (N_{ij} M_0^2 + M_{ij} Z_0^2) = A \\
&\frac{1}{h^2} M_{ij} N_0^2 + \frac{2(2n+3)^3}{h^4(6n+5)} M_{ij} M_0^2 + \frac{1}{h^2} N_{ij} Z_0^2 = B
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
N_0 &= \sqrt{N_{xx}^2 - N_{xx}N_{yy} + N_{yy}^2 + 3N_{xy}^2} \\
M_0 &= \sqrt{M_{xx}^2 - M_{xx}M_{yy} + M_{yy}^2 + 3M_{xy}^2} \\
Z_0 &= \sqrt{N_{xx}(2M_{xx} - M_{yy}) + N_{yy}(2M_{yy} - M_{xx}) + 6N_{xy}M_{xy}}
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Подставив (2.8) в (2.6), вычислив интегралы, содержащиеся в правых частях и разрешив уравнение относительно ε_{ij} и $\varkappa_{ij}$, запишем

$$
\varepsilon_{ij} = \frac{2-\delta_{ij}}{h} \left\{ \frac{(1+\nu) N_{ij} - \nu\delta_{ij} N}{E} - \int_{t_0}^{t} [((1+\nu) N_{ij} - \nu\delta_{ij} N) R_0^2 + \right.
$$

$$
\left. + ((1+\nu) M_{ij} - \nu\delta_{ij} M) Z_1^2] K(t, \tau) d\tau \right\}
\tag{2.10}
$$

$$
\varkappa_{ij} = \frac{2-\delta_{ij}}{D_0} \left\{ [(1+\nu) M_{ij} - \nu\delta_{ij} M] - E \int_{t_0}^{t} [((1+\nu) M_{ij} - \nu\delta_{ij} M) R_1^2 + \right.
$$

$$
\left. + ((1+\nu) N_{ij} - \nu\delta_{ij} N) Z_2^2] K(t, \tau) d\tau \right\}
\tag{2.11}
$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
N = N_{xx} + N_{yy}, \quad M = M_{xx} + M_{yy} \\
R_0 = \sqrt{1 + \beta_1 N_0^2 + \beta_2 M_0^2}, \qquad R_1 = \sqrt{1 + \beta_1 N_0^2 + \beta_3 M_0^2} \\
Z_1 = \sqrt{\beta_2} Z_0, \quad Z_2 = \sqrt{\beta_1} Z_0
\end{gathered}
\tag{2.12}
$$

где M_0, N_0, Z_0 выражаются по (2.9),

$$
\beta_1 = \frac{\beta}{h^2}; \quad \beta_2 = \frac{4(2n+3)^2}{4n+3} \frac{\beta}{h^4}; \quad \beta_3 = \frac{2(2n+3)^3}{6n+5} \frac{\beta}{h^4}; \quad D_0 = \frac{Eh^3}{12}
\tag{2.13}
$$

Из (1.4), учитывая (2.10) и пользуясь известной подстановкой

$$
N_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad N_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}
\tag{2.14}
$$

получим

$$
\frac{1}{Eh} \left\{ \nabla^4 \Phi - E \int_{t_0}^{t} [\nabla^4 \Phi + L_1(\Phi, M_{ij})] K(t, \tau) d\tau \right\} = -\frac{1}{2} L(w, w) - \nabla_k^2 w
\tag{2.15}
$$

Здесь

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \quad L(w, w) = 2\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]$$

$$\nabla_k^2 = k_x \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$L_1(\Phi, M_{ij}) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)(\beta_1 N_0^2 + \beta_2 M_0^2) + \beta_2 (M_{xx} - \nu M_{yy}) Z_0^2\right] +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)(\beta_1 N_0^2 + \beta_2 M_0^2) + \beta_2 (M_{yy} - \nu M_{xx}) Z_0^2\right] -$$

$$- 2(1+\nu)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y}(\beta_1 N_0^2 + \beta_2 M_0^2) + \beta_2 M_{xy} Z_0^2\right]$$

$$N_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)^2 - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y}\right)^2} \qquad (2.16)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}(2M_{xx} - M_{yy}) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(2M_{yy} - M_{xx}) - 6\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y} M_{xy}}$$

Выпишем известное уравнение, к которому сводится система уравнений равновесия элемента оболочки при поперечной нагрузке q, в так называемой упрощенной теории пологих гибких оболочек [3]

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = -L(w, \Phi) - \nabla_k^2\Phi - q \qquad (2.17)$$

где

$$L(w, \Phi) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad (2.18)$$

Уравнения (2.11) перепишем в виде

$$M_{xx} - E\int_{t_0}^{t}(M_{xx}R_1^2 + N_{xx}Z_1^2)\,K(t, \tau)\,d\tau = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_{yy} - E\int_{t_0}^{t}(M_{yy}R_1^2 + N_{yy}Z_1^2)\,K(t, \tau)\,d\tau = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad (2.19)$$

$$M_{xy} - E\int_{t_0}^{t}(M_{xy}R_1^2 + N_{xy}Z_1^2)\,K(t, \tau)\,d\tau = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Здесь приняты обозначения (2.9), (2.12), (2.13), (2.14), $D = D_e/(2-\nu^2)$.

Уравнения (2.19), учитывая (2.12), перепишем в виде

$$M_{xx}-E\int_{t_0}^{t}M_{xx}K(t,\tau)\,d\tau=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+$$

$$+E\int_{t_0}^{t}[M_{xx}(\beta_1 N_0^2+\beta_3 M_0^2)+\beta_1 N_{xx}Z_0^2]\,K(t,\tau)\,d\tau$$

$$M_{yy}-E\int_{t_0}^{t}M_{yy}K(t,\tau)\,d\tau=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+$$

$$+E\int_{t_0}^{t}[M_{yy}(\beta_1 N_0^2+\beta_3 M_0^2)+\beta_1 N_{yy}Z_0^2]\,K(t,\tau)\,d\tau \qquad (2.20)$$

$$M_{xy}-E\int_{t_0}^{t}M_{xy}K(t,\tau)\,d\tau=-D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+$$

$$+E\int_{t_0}^{t}[M_{xy}(\beta_1 N_0^2+\beta_3 M_0^2)+\beta_1 N_{xy}Z_0^2]\,K(t,\tau)\,d\tau$$

Очевидным преобразованием приведем уравнения (2.20) к одному уравнению

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2}-E\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2}\right)K(t,\tau)\,d\tau=$$

$$=-D\nabla^4 w+E\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[M_{xx}(\beta_1 N_0^2+\beta_3 M_0^2)+\beta_1\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}Z_0^2\right]+\right.$$

$$+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[M_{xy}(\beta_1 N_0^2+\beta_3 M_0^2)-\beta_1\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}Z_0^2\right]+ \qquad (2.21)$$

$$\left.+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[M_{yy}(\beta_1 N_0^2+\beta_3 M_0^2)+\beta_1\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}Z_0^2\right]\right\}K(t,\tau)\,d\tau$$

Полученное уравнение, имея в виду (2.17), перепишем в виде

$$L(w,\Phi)+\nabla_k^2\Phi+q-E\int_{t_0}^{t}[L(w,\Phi)+\nabla_k^2\Phi+q]\,K(t,\tau)\,d\tau=$$

$$=D\nabla^4 w-E\int_{t_0}^{t}L_2(w,M_{ij})\,K(t,\tau)\,d\tau \qquad (2.22)$$

где

$$L_2(\Phi, M_{ij}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[M_{xx}(\beta_1 N_0^2 + \beta_3 M_0^2) + \beta_1 \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} Z_0^2\right] +$$
$$+ 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[M_{xy}(\beta_1 N_0^2 + \beta_3 M_0^2) - \beta_1 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y} Z_0^2\right] + \tag{2.23}$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[M_{yy}(\beta_1 N_0^2 + \beta_3 M_0^2) + \beta_1 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} Z_0^2\right]$$

Здесь N_0, Z_0 выражаются по (2.16), а M_0 — по (2.9).

Уравнение (2.15) перепишем в виде

$$\nabla^4\Phi - E\int_{t_0}^{t} \nabla^4\Phi K(t, \tau)\, d\tau = -Eh\left[\frac{1}{2} L(w, w) + \nabla_k^2 w\right] +$$
$$+ E\int_{t_0}^{t} L_1(\Phi, M_{ij}) K(t, \tau)\, d\tau \tag{2.24}$$

Уравнения (2.22) и (2.24) представляют смешанную систему разрешающих уравнений рассматриваемой задачи (в перемещениях и усилиях). Выпишем эту систему в виде

$$(1 - EK)\nabla^4\Phi = -Eh\left[\frac{1}{2} L(w, w) + \nabla_k^2 w\right] + \Psi_1$$
$$(1 - EK)\left[L(w, \Phi) + \nabla_k^2\Phi + q\right] = D\nabla^4 w + \Psi_2 \tag{2.25}$$

Здесь

$$\Psi_1 = E\int_{t_0}^{t} L_1(\Phi, M_{ij}) K(t, \tau)\, d\tau, \quad \Psi_2 = -E\int_{t_0}^{t} L_2(\Phi, M_{ij}) K(t, \tau)\, d\tau$$

$(1 - EK)$ — линейный оператор ползучести.

Система уравнений (2.25) имеет структуру, аналогичную полученной в [13] применительно к соответствующей задаче пластического течения. Это, как указано в [13], удобно для ее решения методом последовательных приближений. В первом приближении может быть принято наличие линейной наследственной упругости, что будет соответствовать некоторой ограниченной величине нагрузки $q \leqslant q_0$. При этом в уравнениях (2.25) нелинейные функции Ψ_1 и Ψ_2 будут отсутствовать. Ход вычисления последующих приближений здесь может быть аналогичным разработанному в [13].

В частном случае круговой цилиндрической оболочки радиуса R уравнения (2.25) принимают вид

$$(1 - EK)\nabla^4\Phi = -Eh\left[\frac{1}{2} L(w, w) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] + \Psi_1$$
$$(1 - EK)\left[L(w, \Phi) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + q\right] = D\nabla^4 w + \Psi_2$$

Для пластины из уравнений (2.25) получим

$$(1 - EK)\nabla^4\Phi = -\frac{Eh}{2}L(w,\ w) + \Psi_1$$

$$(1 - EK)[L(w,\ \Phi) + q] = D\nabla^4 w + \Psi_2$$

Уравнения (2.25) при линейной ползучести ($\beta = 0$ в (1.8)) после некоторых преобразований принимают вид [12]

$$\bar{D}\nabla^4 w = L(w,\ \Phi) + \nabla_k^2\Phi + q$$

$$\frac{1}{\bar{E}h}\nabla^4\Phi = -\frac{1}{2}L(w,\ w) - \nabla_k^2 w$$

где $\bar{E} = E(1 - R^*)$; $\bar{D} = D(1 - R^*)$, R^* — резольвента линейной ползучести.

Нередко тонкие оболочки из неметаллических материалов, претерпевающих ползучесть при обычных температурах, снабжаются наружными мембранными упругими усиливающими слоями. Учет их наличия не связан с принципиальными трудностями, но сделал бы выкладки более громоздкими.

Выводы. Для пологих тонких гибких оболочек двоякой кривизны получена разрешающая система из двух уравнений относительно прогибов и внутренних усилий в условиях нелинейной наследственной упругости, описываемой теорией Маслова—Арутюняна. При цилиндрических оболочках и пластинах уравнения получают, соответственно, более простой вид.

ՅԱՌՐԱՆԻՍՏ ՃԿՈՒՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԵՎ ՍԱԼԵՐԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՂ ՀԱՄԱԿԱՐԳ

Է. Կ. ՌԵՋՈՅԱՆ, Գ. Ս. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Ամփոփում

Մասլով-Հարությունյանի տեսության հիման վրա ոչ գծային ժառանգական առաձգականության (սողքի) պայմաններում ստացված է երկու մոտավոր հավասարումներից բաղկացած լուծող համակարգ ներքին ուժային գործոնների և ճկվածքների միջև երկակի կորության ցածրանիստ, բարակ, ճկուն թաղանթների համար։ Գլանային թաղանթների և սալերի դեպքում հավասարումները համապատասխանաբար ավելի պարզ տեսք են ստանում։

A RESOLVING SYSTEM OF EQUATIONS OF FLEXIBLE, SHALLOW SHELLS AND PLATES IN THE CASE OF NONLINEAR CREEP

E. K. BESOYAN, G. S. GRIGORIAN

S u m m a r y

A resolving nonlinear system of two approximate integro-differential equations for thin gently sloping flexible shells and plates in the displacements and tensions in the case of nonlinear hereditary elasticity (creep) is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л.: Гостехиздат, 1952.
2. *Розовский М. И.* О нелинейных уравнениях ползучести и релаксации материалов при сложном напряженном состоянии.— Ж. техн. физ., 1955, т. 25, вып. 13.
3. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
4. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1951.
5. *Манукян М. М.* Кручение тел с учетом ползучести. Ереван, ЕГУ, 1973.
6. *Задоян М. А.* Смешанное вариационное уравнение для пластин и оболочек из нелинейного наследственно-стареющего материала.— Изв. АН СССР, МТТ, 1980, № 3.
7. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
8. *Задоян М. А.* О вариационных уравнениях теории ползучести.— Докл. АН АрмССР, 1958, т. 26, № 5.
9. *Задоян М. А.* Смешанное вариационное уравнение нелинейно-ползучего тела и задача выпучивания призматического стержня. Изв. АН АрмССР, Механика, 1968, т. 21, № 2.
10. *Прокопович И. Е., Зедгенидзе В. А.* Прикладная теория ползучести. М.: Стройиздат, 1980.
11. *Сорока Н. Н.* Исследование устойчивости нелинейно-деформирующихся систем в условиях нелинейной ползучести. Автореферат диссертации на соиск. уч. ст. к. т. н., Одесса: 1981.
12. *Григорян Г. С.* К расчету прочности, жесткости и устойчивости гибких оболочек и стержней в условиях ползучести. Ползучесть строительных материалов и конструкций. Сб. тр. под ред. А. Р. Ржаницына. М.: Стройиздат, 1964.
13. *Цурков И. С.* К расчету балок, пластин и пологих оболочек на основе теории пластического течения. В кн.: Исследования по теории сооружений. Вып. XXII. М.: 1975.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила в редакцию
29. III. 1983