ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVII, № 4, 1984 Механика

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПЛОСКОЙ ТРЕЩИНЕ НОРМАЛЬНОГО РАЗРЫВА В МАТЕРИАЛЕ СО СТЕПЕННЫМ УПРОЧНЕНИЕМ

ШИФРИН Е. И.

Рассматривается задача о плоской трещине нормального разрыва в несжимаемой среде. Предполагается, что $s_{ij} = A\varepsilon_i^{\mu-1}\varepsilon_{ij}$, где s_{ij} — девиатор напряжений, ε_{ij} — тензор деформаций в случае нелинейной упругости или тензор скоростей деформаций в случае установившейся ползучести. ε_i — интенсивность деформаций при нелинейной упругости или интенсивность скоростей деформаций при установившейся ползучести. Целью работы является перенесение полученных ранее важных свойств решений задачи о плоской трещине в линейно упругой среде на случай среды с указанной выше нелинейной связью между напряжениями и деформациями. Доказаны изопериметрические неравенства для некоторых интегральных характеристик решения. С помощью полученных неравенств оцениваются величины, определяющие поля напряжений вдали от трещины. Знание напряженно-деформированного состояния вдали от трещины позволяет делать обоснованные заключения о возможности образования и месте расположения новых дефектов типа трещин. В частном случае линейно упругой среды эти неравенства переходят в оценки энергии и объема трещины, причем оценка энергии при неоднородной нагрузке является новой. Установлена связь между перемещениями в окрестности края трещины и напряжениями на ее продолжении. Благодаря этому, по раскрытию трещины можно найти локальное поле напряжений и установить зависимость между силовым критерием роста трещины и критерием, основанным на раскрытии у края трещины. Рассматривается вопрос о возможности обобщения формулы Ирвина на случай трещины в материале со степенным упрочнением. Показано, что обобщение формулы Ирвина имеет место для некоторой интегральной характеристики решения, которая при вариации области трещины получает приращение, выражающееся через квадрат коэффициента интенсивности напряжений и приращение площади, занимаемой трещиной. Даны оценки минимального вдоль контура трещины коэффициента интенсивности напряжений сверху и максимального снизу.

1. Используя принцип сложения обобщенных перемещений Н. Х. Арутюняна [1, 2] и решение для сосредоточенной силы, действующей на полупространство [3], задача может быть приближенно сведена к интегро-дифференциальному уравнению на поверхности трещины [4]. Это уравнение можно записать в виде псевдодифференциального уравнения (п.д.у.).

$$p_G \Lambda^\mu w = f(x), \quad f(x) \in H_{-\mu/2}(G), \quad w(x) \in \mathring{H}_{\mu/2}(G), \quad 0 < \mu < 1 \quad (1.1)$$

Λ^μ — псевдодифференциальный оператор с символом $|\xi|^\mu$, p_G — сужение на область G, G — ограниченная плоская область, занимаемая трещиной.

Все дальнейшие результаты будут справедливы также для $0 < \mu < 2$. Возможно интегро-дифференциальное представление уравнения (1.1) в виде [5, 6]

$$-C(\mu)\Delta_x \int\limits_{R^2} \frac{w(y)\,dy}{|x-y|^\mu} = f(x) \qquad (1.2)$$

$$C(\mu) = 2^{\mu-2}\Gamma(\mu/2)\pi^{-1}\Gamma^{-1}((2-\mu)/2)$$

$\Gamma(s)$ — гамма функция, $f(x) = \mathrm{const}\, p(x)$, $p(x)$ — раскрывающие трещину усилия, приложенные к поверхностям трещины, $w(x) = u^{\mu}(x)$, $u(x)$ — нормальное перемещение поверхности трещины для нелинейно упругой среды, $u(x)$ — нормальная компонента скорости поверхности трещины для среды, удовлетворяющей условиям установившейся ползучести.

Рассмотрим также уравнения более общего вида

$$p_G A_\alpha w = p_G \Lambda^\alpha w + \sum_{k=1}^{m} a_k p_G \Lambda^{\beta_k} w = f(x) \qquad (1.3)$$

$$f(x) \in H_{-\alpha/2}(G), \quad w(x) \in \mathring{H}_{\alpha/2}(G), \quad 0 < \alpha < 2, \quad 0 \leqslant \beta_k < \alpha$$

Уравнения (1.3) содержат, в частности, уравнения (1.1) при $\alpha = \mu < 1$, $a_k = 0$, уравнение задачи о трещине в линейно упругом теле ($\alpha = 1$, $a_k = 0$), уравнение задачи о трещине нормального разрыва при условии наличия линейно деформируемых связей между поверхностями трещины [7] ($m = 1$, $\beta_1 = 0$). Известно [5], что п.д.у. (1.3) однозначно разрешимо в указанных пространствах. В [6] были получены локальные оценки решений п.д.у. (1.3), здесь оцениваются некоторые интегральные характеристики решений.

2. Введем обозначения. $\lambda_\alpha^1(G)$ — минимальное собственное число оператора $p_G A_\alpha$

$$\lambda_\alpha^1(G) = \inf_{v \in \mathring{H}_{\alpha/2}(G)} \frac{(A_\alpha v, v)}{\int\limits_G v^2 dx}; \quad W_f(G) = \int\limits_G f(x)\, w(x)\, dx; \quad V_f(G) = \int\limits_G w(x)\, dx$$

В частном случае $f(x) = 1$, $w(x) = w_1(x)$, $W_1(G) = V_1(G)$. Величина $V_f(G)$ определяет главный член поля напряжений вдали от трещины, а для линейно упругой среды, кроме того, равна половине объема трещины. Действительно, используя представление (1.2) и учитывая, что вне носителя функции $w(x)$ лапласиан можно внести под знак интеграла, получим

$$f(x) = -C(\mu)\,\mu^2 \int\limits_G \frac{w(y)\,dy}{|x-y|^{n-2}} \approx -\mu^2 C(\mu)\, R^{-(n+2)}\, V_f(G)$$

здесь R — расстояние от точки x до некоторой точки в области G. Отсюда следует, что в плоскости расположения трещины напряжение вдали от трещины пропорционально $V_f(G)\,R^{-(n+2)}$. Поскольку $p_0 A_*$ — положительно определенный оператор, порождающий в $\dot{H}_{*2}(G)$ эквивалентную норму, нетрудно убедиться, что

$$W_f^{-1}(G) = \inf_{v \in \dot{H}_{*2}(G)} \frac{(A_* v,\ v)}{\left(\int\limits_G f v\,dx\right)^2}$$

Действительно, $(f,\ v)^2 = (A_* w,\ v)^2 \leqslant (A_* w,\ w)(A_* v,\ v)$ или $(f,\ v)^2 \leqslant W_f(G)\,(A_* v,\ v)$, откуда и получим требуемое соотношение. Для получения оценок величин $\lambda_*^1(G)$, $V_f(G)$ важную роль играет

Теорема. 2. 1. При симметризации Штейнера области G относительно некоторой прямой величины $\lambda_*^1(G)$ и $V_f^{-1}(G)$ не возрастают.

Введем в рассмотрение пространство $H_\varepsilon^1(R^n)$ с нормой

$$\|\varphi\|_\varepsilon^2 = \int (\varepsilon|\varphi|^2 + |\operatorname{grad}\varphi|^2)\,dx$$

Очевидно, что эта норма эквивалентна норме пространства $H_1(R^n)$. В преобразовании Фурье введенная норма имеет вид

$$\|\varphi\|_\varepsilon^2 = (2\pi)^{-n} \int (\varepsilon + |\xi|^2)\,|\hat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi$$

Определим оператор T. $T: L_2(R^n) \to L_2(R^n)$, $T: H_\varepsilon^1(R^n) \to H_\varepsilon^1(R^n)$. Предположим сперва, что $\varphi(x)$ — вещественнозначная неотрицательная функция, стремящаяся к нулю на бесконечности. $\varphi(x)$ задает поверхность в R^3. Проведем симметризацию Штейнера этой поверхности относительно некоторой плоскости, перпендикулярной области определения $\varphi(x)$. Новой поверхности отвечает функция, которую мы обозначим через $T\varphi$. Как известно [8],

$$\int \varphi\,dx = \int T\varphi\,dx, \quad \int |\varphi|^2 dx = \int |T\varphi|^2 dx, \quad \int |\operatorname{grad} T\varphi|^2 dx \leqslant \int |\operatorname{grad}\varphi|^2 dx$$

Если $\varphi(x)$ — произвольная вещественнозначная функция, определим

$$T\varphi = T(|\varphi|)$$

Заметим, что оператор взятия модуля переводит $H_\gamma(R^n) \to H_\gamma(R^n)$ при $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$. В случае, когда $\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$ комплекснозначная функция, определим $T\varphi(x) = T\varphi_1(x) + iT\varphi_2(x)$.

Из определения и свойств оператора T получаем

$$\|T\varphi\|^2 = \|T\varphi_1\|^2 + \|T\varphi_2\|^2 = \|T(|\varphi_1|)\|^2 + \|T(|\varphi_2|)\|^2 = \||\varphi_1|\|^2 + \||\varphi_2|\|^2 = \|\varphi\|^2$$

Здесь $\|\cdot\|$ обозначает L_2-норму.

$$\|T\varphi\|_1^2 = \|T\varphi_1\|_1^2 + \|T\varphi_2\|_1^2 = \|T(|\varphi_1|)\|_1^2 + \|T(|\varphi_2|)\|_1^2 \leqslant$$
$$\leqslant \||\varphi_1|\|_1^2 + \||\varphi_2|\|_1^2 = \|\varphi\|_1^2.$$

Второе неравенство справедливо, так как

$$\int |\operatorname{grad} |\varphi_i||^2\, dx = \int |\operatorname{grad} \varphi_i|^2\, dx$$

Следовательно, $T: L_2(R^2) \to L_2(R^2)$, $T: H_1^1(R^2) \to H_1^1(R^2)$, причем $\|T\varphi\| = \|\varphi\|$, $\|T\varphi\|_1 \leqslant \|\varphi\|_1$.

Согласно [9] рассмотрим пространство $(L_2, H_1^1)_{\theta,2;2}$, построенное с помощью K_2-функтора. Напомним его определение.

$$K_2(t, \varphi) = \inf_{\varphi=\varphi_0+\varphi_1} (\|\varphi_0\|^2 + t^2\|\varphi_1\|_1^2)^{1/2}$$

$$\Phi_{\theta,2}(g(t)) = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} g(t))^2\, dt/t\right)^{1/2} \quad 0<\theta<1$$

$$\varphi(x) \in (L_2, H_1^1)_{\theta,2;2} \quad \text{если} \quad \|\varphi\|_{\theta,2;2} = \Phi_{\theta,2}(K_2(t,\varphi)) < \infty$$

В [9] показано, что $(L_2, H_1^1)_{\theta,2;2}$ — точное интерполяционное пространство типа θ, причем, учитывая, что

$$\|\varphi\|^2 = (2\pi)^{-2} \int |\tilde{\varphi}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\|\varphi\|_{\theta,2;2} = C\left(\int (\varepsilon + |\xi|^2)^\theta |\tilde{\varphi}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}, \quad C = \text{const}$$

Лемма 2.1. Пусть $\varphi(x) \in (L_2 H_1^1)_{\theta,2;2}$, тогда $T\varphi \in (L_2, H_1^1)_{\theta,2;2}$, причем

$$\int |\xi|^{2\theta} |\widetilde{T\varphi}(\xi)|^2 d\xi \leqslant \int |\xi|^{2\theta} |\tilde{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \tag{2.1}$$

Доказательство. Нам достаточно показать, что $\|T\varphi\|_{\theta,2;2} \leqslant \|\varphi\|_{\theta,2;2}$, так как тогда

$$\int (\varepsilon + |\xi|^2)^\theta |\widetilde{T\varphi}(\xi)|^2 d\xi \leqslant \int (\varepsilon + |\xi|^2)^\theta |\tilde{\varphi}(\xi)|^2 d\xi$$

Устремляя ε к нулю, получим требуемое неравенство. Поскольку $\|T\varphi\|_1 \leqslant \|\varphi\|_1$, то для доказательства неравенства $\|T\varphi\|_{\theta,2;2} \leqslant \|\varphi\|_{\theta,2;2}$, согласно [10], необходимо доказать

$$\|T\varphi_1 - T\varphi_2\| \leqslant \|\varphi_1 - \varphi_2\|, \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \tag{2.2}$$

Очевидно в (2.2) можно полагать, что φ_1, φ_2 вещественнозначные функции. Более того, достаточно рассмотреть случай $\varphi_1 \geqslant 0$, $\varphi_2 \geqslant 0$. Действительно, если для неотрицательных функций неравенство (2.2) доказано, то для произвольных φ_1, φ_2 получим

$$\| T\varphi_1 - T\varphi_2 \| = \| T(|\varphi_1|) - T(|\varphi_2|) \| \leqslant \| |\varphi_1| - |\varphi_2| \| \leqslant \| \varphi_1 - \varphi_2 \|$$

Так как неравенство (2.2) достаточно доказать для плотного множества функций, можно считать, что φ_i — неотрицательные ступенчатые функции, имеющие компактный носитель

$$\int (T\varphi_1 - T\varphi_2)^2 \, dx = \int (T\varphi_1)^2 \, dx + \int (T\varphi_2)^2 \, dx - 2 \int T\varphi_1 T\varphi_2 dx$$

$$\int (\varphi_1 - \varphi_2)^2 \, dx = \int \varphi_1^2 dx + \int \varphi_2^2 dx - 2 \int \varphi_1 \varphi_2 dx$$

Так как $\int (T\varphi_i)^2 \, dx = \int \varphi_i^2 dx$, $i = 1, 2$, то осталось доказать, что $\int \varphi_1 \varphi_2 dx \leqslant \int T\varphi_1 T\varphi_2 dx$. Это неравенство справедливо, если вдоль любой линии l, перпендикулярной плоскости, относительно которой производится симметризация

$$\int \varphi_1 \varphi_2 dl \leqslant \int T\varphi_1 T\varphi_2 dl$$

$$\int \varphi_1 \varphi_2 dl = \lim_{\Delta l \to 0} \left(\sum_{i=1}^{k} \varphi_{1i} \varphi_{2i} \right) \Delta l$$

$$\int T\varphi_1 T\varphi_2 dl = \lim_{\Delta l \to 0} \left(\sum_{i=1}^{k} T\varphi_{1i} T\varphi_{2i} \right) \Delta l$$

В первом равенстве считается, что на прямой l взят большой конечный интервал, вне которого $\varphi_i = 0$ и разбит на равные отрезки длины Δl, аналогичная операция проведена и со вторым интегралом.

Следовательно, нужно доказать, что

$$\sum_{i=1}^{k} \varphi_{1i} \varphi_{2i} \leqslant \sum_{i=1}^{k} T\varphi_{1i} T\varphi_{2i} \tag{2.3}$$

Поскольку $\forall c > 0$ меры множеств $\varphi \geqslant c$, $T\varphi \geqslant c$ равны, можно считать, что в (2.3) φ_{1i}, $T\varphi_{1i}$; φ_{2i}, $T\varphi_{2i}$ те же числа, только по-разному скомпанованные в пары.

В правой части неравенства (2.3), если $T\varphi_{1i} \leqslant T\varphi_{1j}$, то $T\varphi_{2i} \leqslant T\varphi_{2j}$, но именно на такой компановке достигается максимум. Действительно, пусть в сумме $\sum_i a_i b_i$, $a_i > 0$, $b_i > 0$, $a_1 < a_2$, $b_1 > b_2$, тогда $a_1 b_1 + a_2 b_2 < a_1 b_2 + a_2 b_1$ и, следовательно, перекомпановкой сумму можно увеличить. Таким образом, неравенства (2.3), (2.2), а с ними и лемма 2.1 доказаны. Из леммы следует, что $(A, T\varphi, T\varphi) \leqslant (A\varphi, \varphi)$.

Пусть $w_\lambda(x)$ — собственная функция, отвечающая минимальному собственному числу $\lambda_a^1(G)$, $w_1(x)$ — решение уравнения (1.3) при $f(x)=1$. $w_\lambda(x)$, $w_1(x)\in H_{a/2}(G)$, следовательно, $Tw_\lambda(x)$, $Tw_1(x)\in H_{a/2}(G')$.

Здесь область G' получена из G с помощью симметризации Штейнера.

$$\lambda_a^1(G)=\frac{(A_a w_\lambda,\ w_\lambda)}{\|w_\lambda\|^2}\geqslant\frac{(A_a Tw_\lambda,\ Tw_\lambda)}{\|Tw_\lambda\|^2}\geqslant\inf_{v\in H_{a/2}(G')}\frac{(A_a v,\ v)}{\|v\|^2}=\lambda_a^1(G')$$

$$V_1^{-1}(G)=\frac{(A_a w_1,\ w_1)}{\left(\int w_1 dx\right)^2}\geqslant\frac{(A_a Tw_1,\ Tw_1)}{\left(\int Tw_1 dx\right)^2}\geqslant\inf_{v\in H_{a/2}(G')}\frac{(A_a v,\ v)}{\left(\int v\,dx\right)^2}=V_1^{-1}(G')$$

Теорема 2.1 доказана.

Следствие 2.1. Поскольку с помощью последовательности симметризаций любую область можно перевести в круг той же площади [8], справедливы изопериметрические неравенства

$$\lambda_a^1(G)\geqslant\lambda_a^1(K),\quad V_1(G)\leqslant V_1(K)$$

$$K\text{ — круг, meas}\,(G)=\text{meas}\,(K)$$

Таким образом, среди всех трещин, занимающих области заданной площади, максимальное возмущение в дальнее поле напряжений при однородной нагрузке вносит круговая трещина.

Замечание 2.1. Пусть $w(x)$ — решение уравнения (1.3) при $f(x)\in L_2(G)$, $f(x)\geqslant 0$. Продолжим $f(x)$ нулем вне G и оставим для этой функции то же обозначение.

$$W_f^{-1}(G)=\frac{(A_a w,\ w)}{\left(\int fw\,dx\right)^2}\geqslant\frac{(A_a Tw,\ Tw)}{\left(\int Tf\,Tw\,dx\right)^2}\geqslant\inf_{v\in H_{a/2}(G')}\frac{(A_a v,\ v)}{\left(\int (Tf)v\,dx\right)^2}=W_{Tf}^{-1}(G')$$

Следствие 2.2. $\qquad W_f(G)\leqslant W_{f^*}(K)$

где $f^*(x)$ — функция, определенная в круге K, $f^*(x)=f^*(r)$, $f^*(r)$ не возрастает с ростом r. $\forall\, a, b$

$$\text{meas}\,\{x:\ a<f(x)<b\}=\text{meas}\,\{y:\ a<f^*(y)<b\}$$

Поскольку для линейно упругой среды величина $W_f(G)$ отличается от энергии лишь множителем, следствие 2.2 дает новую изопериметрическую оценку энергии в случае неоднородной нагрузки.

Оценка $W_f(G)$ позволяет также оценивать $V_f(G)$.

$$V_f(G)=\int w\,dx=(A_a w_1,\ w)=(A_a w,\ w_1)\leqslant$$

$$\leqslant(A_a w,\ w)^{1/2}(A_a w_1,\ w_1)^{1/2}=[W_f(G)]^{1/2}[V_1(G)]^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant[W_{f^*}(K)]^{1/2}[V_1(K)]^{1/2}$$

Оценка $\lambda_a^1(G)$ помогает оценивать $W_f(G)$.

$$W_f(G) = (A_e w, w) \geqslant \lambda_\mu^1(G)\|w\|^2 \geqslant \lambda_\mu^1(K)\|w\|^2$$

$W_f(G) \leqslant \|f\|\|w\|$. Следовательно, $\|w\| \leqslant \|f\|/\lambda_\mu^1(K)$, $W_f(G) \leqslant \|f\|^2/\lambda_\mu^1(K)$

Изопериметрические неравенства, полученные в этом пункте, обобщают на п.д.у. (1.3) известные свойства оператора Лапласа [8]. В частных случаях иным способом эти неравенства были доказаны в [11] для линейно упругого тела и в [7] для линейно упругого тела при линейно деформируемых связях между поверхностями трещины. Заметим, что все установленные неравенства без труда переносятся на n-мерные пространства ($n \geqslant 2$).

Полученное следствие 2.2 является новым не только для рассматриваемого класса уравнений, но также для уравнения Лапласа и уравнения задачи о трещине в линейно упругом пространстве.

3. В этом пункте устанавливается связь между раскрытием трещины и локальным полем напряжений в окрестности края трещины. В [5] установлено, что решение уравнения (1.1) в случае гладкой функции $f(x)$ имеет у границы области G асимптотику $w(x) \approx N(x')r^{\mu/2}$, $x' \in \partial G$; ∂G — граница G, точка x лежит на нормали к ∂G в точке x', r — расстояние между x и x'. Покажем, что $\Lambda^\mu w = f(x)$ имеет вблизи ∂G вне области G асимптотику $f(x) \approx K(x')r^{-\mu/2}$, причем установим связь между $K(x')$ и $N(x')$. Пусть функция $\chi(x) \in C_0^\infty(R^2)$, $\chi(x) = 1$ в окрестности точки x', $O(x')$. $\Lambda^\mu w = \Lambda^\mu \chi w + \Lambda^\mu(1-\chi)w$. Поскольку $1-\chi \equiv 0$ в $O(x')$, $\Lambda^\mu(1-\chi)w$ не имеет особенностей в $O(x')$ и потому коэффициенты при особенности у $\Lambda^\mu w$ и $\Lambda^\mu \chi w$ совпадают. Так как окрестность, вне которой $\chi w = 0$ выбирается малой, можно считать, что пересечение ∂G с $O(x')$ является отрезком прямой. Таким образом, $G \cap O(x') = \Omega_+$ полукруг. Будем считать, что точка x' совпадает с центром этого круга и система координат выбрана так, что x' совпадает с началом координат, ∂G идет по оси x_1. $\Lambda^\mu \chi w$ вычислим, воспользовавшись представлением (1.2). Нас интересует значение $\Lambda^\mu \chi w$ в точке $(0, -r)$, где $r > 0$, r близко к нулю. Так как точка $(0, -r)$ не принадлежит носителю функции χw, внесем в (1.2) лапласиан под знак интеграла и получим

$$\Lambda^\mu \chi w(0, -r) = -\frac{\mu^2 2^{\mu-2}\Gamma(\mu/2)}{\pi\Gamma((2-\mu)/2)}\int_{\Omega_+}\frac{\chi(y)\,w(y)\,dy}{\left(\sqrt{y_1^2+(r+y_2)^2}\right)^{\mu+2}}$$

В силу сделанных ранее предположений в Ω_+ $w(y) \approx N y_2^{\mu/2}$. Следовательно,

$$\Lambda^\mu \chi w(0, -r) \approx -\frac{\mu^2 2^{\mu-2}\Gamma(\mu/2)}{\pi\Gamma((2-\mu)/2)}\int_{\Omega_+}\frac{\chi(y)\,N y_2^{\mu/2}\,dy}{(y_1^2+(r+y_2)^2)^{(\mu+2)/2}} \qquad (3.1)$$

В (3.1) сделаем в интеграле замену переменных $y_i = rz_i$

$$\Lambda^\mu \chi w(0, -r) \approx -\frac{\mu^2 2^{\mu-2}\Gamma(\mu/2)Nr^{-\mu/2}}{\pi\Gamma((2-\mu)/2)} \int\limits_{\Omega_r} \frac{\chi(rz)\, z_2^{\mu/2} dz}{(z_1^2 + (1+z_2)^2)^{(\mu+2)/2}}$$

При $r \to 0$, $\chi(rz) \to 1$, Ω_r стремится к полуплоскости R^2_+. В силу этого получим

$$\Lambda^\mu w(0, -r) \approx \Lambda^\mu \chi w(0, -r) \approx$$

$$\approx -\frac{\mu^2 2^{\mu-2}\Gamma(\mu/2)Nr^{-\mu/2}}{\pi\Gamma((2-\mu)/2)} \int\limits_0^\infty dz_2 \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{z_2^{\mu/2} dz_1}{(z_1^2 + (1+z_2)^2)^{(\mu+2)/2}} \tag{3.2}$$

Вычислив в (3.2) интегралы, окончательно имеем

$$\Lambda^\mu w(0, -r) \approx -\frac{\mu^2 2^{\mu-2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((1+\mu)/2)\Gamma^2(\mu/2)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma((2-\mu)/2)} Nr^{-\mu/2} \tag{3.3}$$

Из (3.3) следует соотношение

$$K(x') = -\frac{\mu^2 2^{\mu-2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((1+\mu)/2)\Gamma^2(\mu/2)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma((2-\mu)/2)} N(x') \tag{3.4}$$

В случае линейно упругого тела ($\mu = 1$) имеем $K(x') = -N(x')/2$, что совпадает с известным соотношением.

Далее мы используем (3.4) для получения аналога формулы Ирвина.

Рассматривается приращение величины $W_f(G)$ при вариации области. Пусть $G_1 \supset G$ и отличается от G тем, что в окрестности точки x' добавлен малый кусок, граница которого описывается уравнением $x_2 = h(x_1)$. Рассмотрим разницу $W_f(G_1) - W_f(G) = \delta W_f$.

Пусть $w(x)$, $w^1(x)$ — решения уравнения (1.1) в областях G, G_1, соответственно, $w(x) \in H_{\mu/2}(G)$, $w^1(x) \in H_{\mu/2}(G_1)$.

$$w^1(x) = w(x) + \psi(x); \quad \psi(x) \in H_{\mu/2}(G_1)$$

$$\delta W_f = (\Lambda^\mu w^1, w^1) - (\Lambda^\mu w, w) = (\Lambda^\mu(w+\psi), w+\psi) - (\Lambda^\mu w, w) =$$

$$= (\Lambda^\mu w, \psi) + (\Lambda^\mu \psi, w) + (\Lambda^\mu \psi, \psi)$$

$\Lambda^\mu \psi = 0$ на G, $w \in H_{\mu/2}(G)$, следовательно, $(\Lambda^\mu \psi, w) = 0$, $(\Lambda^\mu w, \psi) = (\Lambda^\mu \psi, w) = 0$. Окончательно получим $\delta W_f = (\Lambda^\mu \psi, \psi)$. Так как $\Lambda^\mu \psi = 0$ на G

$$(\Lambda^\mu \psi, \psi) = \int\limits_{G_1 \setminus G} F^{-1}(\Lambda^\mu \psi)\, \psi dx$$

Здесь F^{-1} обозначает обратное преобразование Фурье. Поскольку $\Lambda^\mu w^1 - f$ не имеет особенностей в $G_1 \setminus G$, то $\Lambda^\mu \psi = \Lambda^\mu w^1 - \Lambda^\mu w$ имеет в $G_1 \setminus G$ ту же особенность, что и $-\Lambda^\mu w$. Поэтому в $G_1 \setminus G$ $\Lambda^\mu \psi \approx$ $\approx K(x') r^{-\mu/2}$. Считая, как и прежде, отрезок границы, над которым добавлена площадь, прямолинейным, приближенно получим

$$(\Lambda^\mu \psi, \psi) \approx \int dx_1 \int\limits_0^{h(x_1)} KNx^{-\mu/2} (h(x_1) - x_2)^{\mu/2} \, dx_2 =$$

$$= \frac{\mu^2 2^{\mu-2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((1+\mu)/2)\,\Gamma^2(\mu/2)}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma((2-\mu)/2)} N^2 \int dx_1 \int\limits_0^{h(x_1)} x_2^{-\mu/2} (h(x_1) - x_2)^{\mu/2} dx_2$$

Сделав в интеграле замену $x_2 = h(x_1) t$ и проинтегрировав, вычислим приращение

$$\delta W_f \approx \frac{\mu^2 2^{\mu-2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((1+\mu)/2)\,\Gamma^2(\mu/2)\,\Gamma((2+\mu)/2)}{\Gamma(\mu+1)} N^2 \delta S =$$

$$= \frac{\mu^2 2^{\mu-3}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((1+\mu)/2)\,\Gamma^2(\mu/2)}{\Gamma(\mu)} N^2 \delta S = H(\mu) N^2 \delta S \qquad (3.5)$$

Здесь δS — величина приращения площади. Формула (3.5) аналогична формуле Ирвина для линейно упругой среды и при $\mu = 1$ в нее переходит. Действительно, $\delta W_f \approx \pi N^2 \delta S/4$, что совпадает с формулой Ирвина ([12], стр. 612). При $\mu \to 2$ (оператор стремится к оператору Лапласа) из (3.5) следует $\delta W_f \approx N^2 \delta S$, что совпадает с ранеее полученным результатом [13].

Отметим, что формулы (3.4), (3.5) без изменения переносятся на случаи n-мерного пространства ($n \geq 2$).

4. В этом пункте с помощью (3.5) получим оценки N_{max} снизу и N_{min} сверху через интегральные характеристики решения аналогично тому, как это было сделано в [13, 14] для трещины в линейно упругой среде. N_{min}, N_{max} — минимальное и максимальное значения N вдоль контура ∂G. Предположим, что область G звездна относительно некоторой точки O, которую мы примем за начало координат. Тогда ∂G описывается функцией $r(\varphi)$. Допустим функция $f(x)$ определена в окрестности G и принадлежит классу C^1. Рассмотрим область G_ε такую, что ∂G_ε описывается функцией $(1+\varepsilon) r(\varphi)$. Пусть $w(x)$, $w_\varepsilon(y)$ — решения п.д.у. (1.1) в областях G, G_ε соответственно. Вычислим δW_f двумя способами

$$\delta W_f = \int\limits_{G_\varepsilon} f(y)\, w_\varepsilon(y)\, dy - \int\limits_G f(x)\, w(x)\, dx \qquad (4.1)$$

Из формулы (3.5) следует

$$\delta W_f = H(\mu) \int_{\partial G} N^2(x')\, dn dl \tag{4.2}$$

Из (4.2) получаем

$$H(\mu) N^2_{\min} \delta S \leqslant \delta W_f \leqslant H(\mu) N^2_{\max} \delta S \tag{4.3}$$

Вычислим δW_f, исходя из (4.1). $y \in G_\varepsilon$, сделаем замену переменных $y = (1+\varepsilon)x$, $x \in G$. Обозначим $w_\varepsilon((1+\varepsilon)x) = v_\varepsilon(x)$. Следовательно, $\tilde{w}_\varepsilon(\xi) = (1+\varepsilon)^2 \tilde{v}_\varepsilon((1+\varepsilon)\xi)$. Перепишем уравнение для $w_\varepsilon(y)$

$$(2\pi)^{-2} \int |\xi|^\mu \exp(-iy\xi)\, \tilde{w}_\varepsilon(\xi)\, d\xi =$$

$$= (1+\varepsilon)^2 (2\pi)^{-2} \int |\xi|^\mu \exp(-ix(1+\varepsilon)\xi)\, \tilde{v}_\varepsilon((1+\varepsilon)\xi)\, d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-2} \int |\eta|^\mu \exp(-ix\eta)\, \tilde{v}_\varepsilon(\eta)\, d\eta\, (1+\varepsilon)^{-\mu} = f(y) = f((1+\varepsilon)x)$$

Следовательно, $v_\varepsilon(x)$ удовлетворяет уравнению

$$p_G \Lambda^\mu v_\varepsilon(x) = (1+\varepsilon)^\mu f((1+\varepsilon)x) \tag{4.4}$$

Оставляя в (4.4) члены первого порядка малости по ε, получим

$$p_G \Lambda^\mu v_\varepsilon(x) = (1+\mu\varepsilon)\left(f(x) + \varepsilon x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = f(x) + \varepsilon(\mu f(x) + F(x)) \tag{4.5}$$

где $F(x) = \sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$. На основании (4.1) запишем

$$\delta W_f = \int_G f((1+\varepsilon)x)\, v_\varepsilon(x)(1+\varepsilon)^2\, dx - \int_G f(x)\, w(x)\, dx =$$

$$= \int_G [(f(x) + \varepsilon F(x))(1+2\varepsilon) v_\varepsilon(x) - f(x) w(x)]\, dx \tag{4.6}$$

Согласно (4.5) $v_\varepsilon(x) = w(x) + \varepsilon g(x)$, где

$$p_G \Lambda^\mu g(x) = \mu f(x) + F(x) \tag{4.7}$$

Таким образом, с точностью до малых первого порядка по ε из (4.6) получим

$$\delta W_f = \varepsilon \int_G [(F(x) + 2f(x))\, w(x) + f(x)\, g(x)]\, dx \tag{4.8}$$

Так как оператор Λ^μ симметричен и в силу (4.7)

$$\int_G f(x)\, g(x)\, dx = (\Lambda^* w, g) = (w, \Lambda^* g) = \int_G (\mu f(x) + F(x))\, w(x)\, dx$$

Окончательно имеем

$$\delta W_f = \varepsilon \int_G [(2+\mu) f(x) + 2F(x)]\, w(x)\, dx \qquad (4.9)$$

Поскольку $\delta S = 2\varepsilon S$ (S — площадь области G), неравенство (4.3) принимает вид

$$H(\mu) N_{\min}^2 2S \leq \int_G [(2+\mu) f(x) + 2F(x)]\, w(x)\, dx \leqslant H(\mu) N_{\max}^2 2S$$

$$N_{\min}^2 \leq \frac{1}{2SH(\mu)} \int_G [(2+\mu) f(x) + 2F(x)]\, w(x)\, dx \leqslant N_{\max}^2 \qquad (4.10)$$

Если $f(x)$ — однородная функция порядка δ, то $F(x) = \delta f(x)$ и (4.10) принимает вид

$$N_{\min}^2 \leq \frac{(2 + 2\delta + \mu)\, W_f(G)}{2SH(\mu)} \leqslant N_{\max}^2 \qquad (4.11)$$

При $\mu = 1$ неравенства (4.10), (4.11) совпадают с полученными в [13, 14] неравенствами для линейно упругой среды.

ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ԱՄՐԱՊՆԴՈՒՄՈՎ ՆՅՈՒԹՈՒՄ ՆՈՐՄԱԼ ԽԶՄԱՆ ՀԱՐԹ ՃԱՔԻ ՄԱՍԻՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐ

Ե. Ի. ՇԻՖՐԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է անսեղմելի նյութում նորմալ խզման հարթ ճաքի մասին խնդիրը։ Ենթադրվում է, որ լարումների դեվյատորի և ոչ գծային առաձգականության դեպքում դեֆորմացիաների ինտենսիվության միջև գոյություն ունի աստիճանային կապ։ Օգտագործվում են Ն. Խ. Հարությունյանի ընդհանրացված տեղափոխությունների գումարման սկզբունքի օգնությամբ ստացված մոտավոր հավասարումներ։ Ճաքի եզրի շրջակայքի տեղափոխությունների և նրա շարունակության վրա լարումների միջև հաստատված է գտնված կապակցությունների կիրառման որպես օրինակ, լուծված է պատահական ջերմային ազդեցությունների դեպքում անհամասեռ ծերացող ձողում լարումների բաշխման խնդիրը։

PROBLEM SOLUTION EVALUATIONS RELATED TO NORMAL RUPTURE FLAT CRACK IN THE MATERIAL WITH POWER-TYPE TOUGHENING

E. I. SHIFRIN

S u m m a r y

The problem of normal rupture flat crack in incompressible solid medium has been considered. It has been supposed, that $\sigma_{ij} = A\varepsilon_i^{n-1}\varepsilon_{ij}$, where σ_{ij}-deviator of stresses, ε_{ij}-deformation tensor in case of non-linear elasticity or tensor of deformation rates in case of a steady creep, ε_i — deformation intensity in case of non-linear elasticity or deformation rate intensity in case of a steady creep. The approximate equations obtained by using Arutyunian's principle of summing up generalized shifts have been employed. Isoperimetric inequalities for some integral characteristics of solution transformed in case of linear-elastic medium into inequalities for energy and volume of crack have been proved. The relation between shifts within crack edge and stresses on its prolongation has been established. The generalisation of Irwin's formula has been obtained. Evaluations of a minimum stress concentration factor along crack outline on top and a maximum one on bottom have been given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала.— Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат. н., 1959, т. 12, № 2.
2. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести.— ПММ, 1959, т. 23, 5.
3. *Кузнецов А. И.* Вдавливание жестких штампов в полупространство при степенном упрочнении и при нелинейной ползучести материала.— ПММ, 1962, т. 26, 3.
4. *Мхитарян С. М.* К напряженному состоянию деформирующегося по степенному закону бесконечного пространства с разрезом в виде полосы или полуплоскости.— Докл. АН Арм.ССР, 1982, LXXIV, 1.
5. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 232 с.
6. *Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И.* Теоремы сравнения для некоторого класса псевдодифференциальных уравнений и их приложения.— ДАН СССР, 1982, т. 262, 5.
7. *Шифрин Е. И.* Плоская трещина нормального отрыва при наличии линейных связей между ее поверхностями.— Изв. АН СССР, МТТ, 1982, 3.
8. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
9. *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980. 264 с.
10. *Peetre J.* Interpolation of Lipshitz operators and metric spaces. Mathematica (Cluj), 1970, 12, 3.
11. *Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И.* Изопериметрические неравенства и оценки некоторых интегральных характеристик решения пространственной задачи теории упругости для тела с плоскими трещинами нормального разрыва.— Изв. АН СССР, МТТ, 1980, 2.

12. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
13. *Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И.* Пространственная задача о трещине в упругой среде. (Оценки решения; исследование свойств системы интегро-дифференциальных уравнений). Препринт. М.: Институт проблем механики АН СССР. 1981. № 187.
14. *Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И.* Некоторые энергетические методы построения оценок в пространственных задачах теории упругости о плоских трещинах произвольного разрыва.— Изв. АН СССР, МТТ, 1981, 4.

Поступила в редакцию
24. 11. 1982

ВНИИЖЕЛЕЗОБЕТОН