ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVII, № 4, 1984 Механика

КОМПЛЕКСНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТРЕЩИН ДЛЯ МНОГОСВЯЗНОЙ ПЛАСТИНКИ

КАЛОЕРОВ С. А.

Общий вид комплексных потенциалов теории трещин для многосвязных пластинок в работе [1] найден методом введения дополнительной области, получаемой из данной ее зеркальным отображением относительно линии расположения трещин. После решения краевой задачи для трещин комплексные потенциалы определяются из граничных условий на контурах области и некоторых условий голоморфности функций. В настоящей статье получено другое представление комплексных потенциалов, более наглядное и удобное для некоторых классов задач. Установлена эквивалентность указанных представлений. Исследовано напряженное состояние пластинки с круговым отверстием и трещиной.

§ 1. Пусть пластинка, занимающая бесконечную многосвязную область S и ограниченная контурами L_m $(m = \overline{1,M})$, вдоль некоторой прямой разрезана отрезками $a_n b_n$ $(n = \overline{1, N})$. Пластинка находится под действием внешних усилий, приложенных на контурах L_m и разрезах $a_n b_n$. Отнесем пластинку к прямоугольной системе координат, совместив ось $0x$ с линией разрезов. Совокупность всех разрезов обозначим через L. Для простоты будем предполагать, что главный вектор внешних усилий на каждом из разрезов равен нулю.

Определение напряженного состояния рассматриваемой пластинки сводится к нахождению комплексных потенциалов $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ из граничных условий на L и L_m.

Введем функцию [1, 3]

$$\Omega(z) = \Phi(z) + z\Phi'(z) + \Psi(z) \tag{1.1}$$

Комплексные потенциалы $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ имеют вид

$$\Phi(z) = \Gamma + A(z) + \Phi^*(z); \quad \Omega(z) = \Gamma + \Gamma' + C(z) + \Omega^*(z) \tag{1.2}$$

где

$$\Gamma = \frac{1}{4}(N_1 + N_2) + i\frac{2\mu e^\infty}{1+\varkappa}; \quad \Gamma' = -\frac{1}{2}(N_1 - N_2)\exp(-2i\alpha)$$

$$A(z) = -\sum_{m=1}^{M} \frac{P_m}{z - z_m} \tag{1.3}$$

$$C(z) = \sum_{m=1}^{M} \left[\frac{\varkappa \bar{P}_m}{z - z_m} + \frac{z_m P_m}{(z - z_m)^2} \right]$$

$$P_m = \frac{X_m + iY_m}{2\pi(1+\varkappa)}; \quad \varkappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$$

$\Phi^*(z)$, $\Omega^*(z)$ — функции, кусочно-голоморфные в многосвязной области S, включая точку $z = \infty$, и имеющие линию скачков L, причем вычеты этих функций в точках z_m равны нулю; X_m, Y_m — компоненты главного вектора внешних усилий, приложенных к контуру L_m; z_m — произвольные точки внутри контуров L_m; N_1, N_2 — значения главных напряжений на бесконечности; α — угол между осью, соответствующей N_1 и осью $0x$; ε^∞ — значение вращения на бесконечности; ν — коэффициент Пуассона; μ — модуль сдвига.

Функции (1.2) представим так:

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z); \quad \Omega(z) = \Omega_0(z) + \Omega_1(z) \tag{1.4}$$

Здесь

$$\Phi_0(z) = \Gamma + A(z) + \Phi^0(z); \quad \Omega_0(z) = \Gamma + \Gamma' + C(z) + \Omega^0(z) \tag{1.5}$$

$\Phi_1(z)$, $\Omega_1(z)$ — функции, голоморфные в области S, включая и разрезы, причем их вычеты в точках z_m равны нулю; $\Phi^0(z)$, $\Omega^0(z)$ — функции, кусочно-голоморфные в расширенной плоскости и имеющие линию скачков L, причем в окрестности точки $z = \infty$

$$\Phi^0(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right); \quad \Omega^0(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

Граничные условия на разрезах имеют вид

$$\sigma_y^\pm - i\tau_{xy}^\pm = f^\pm(t) \tag{1.6}$$

Для комплексных потенциалов $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ граничные условия представляются так [3]:

$$\begin{aligned} &[\Phi(t) - \overline{\Omega}(t)]^+ - [\Phi(t) - \overline{\Omega}(t)]^- = p(t) \\ &[\Phi(t) + \overline{\Omega}(t)]^+ + [\Phi(t) + \overline{\Omega}(t)]^- = g(t) \end{aligned} \tag{1.7}$$

где

$$p(t) = f^+(t) - f^-(t); \quad g(t) = f^+(t) + f^-(t) \tag{1.8}$$

Подставляя функции (1.4) в граничные условия (1.7) и учитывая голоморфность функций $\Phi_1(z)$, $\Omega_1(z)$ на линии L, получаем

$$\begin{aligned} &[\Phi_0(t) - \overline{\Omega}_0(t)]^+ - [\Phi_0(t) - \overline{\Omega}_0(t)]^- = p(t) \\ &[\Phi_0(t) + \overline{\Omega}_0(t)]^+ + [\Phi_0(t) + \overline{\Omega}_0(t)]^- = \\ &= g(t) - 2\Phi_1(t) - 2\overline{\Omega}_1(t) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Решая краевые задачи (1.9), находим [1, 3]

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \frac{Q(z)}{X(z)} + \frac{D(z)}{X(z)} + \frac{P(z)}{X(z)} + \frac{A(z) - \overline{C}(z)}{2} + c_0 + f_0(z) \tag{1.10}$$

$$\Omega(z) = \Omega_1(z) + \frac{\overline{Q}(z)}{X(z)} + \frac{\overline{D}(z)}{X(z)} + \frac{\overline{P}(z)}{X(z)} - \frac{\overline{A}(z) - C(z)}{2} - \overline{c}_0 + f_1(z)$$

Здесь

$$D(z) = \sum_{m=1}^{M} \left[\frac{r_{1m}}{z - z_m} + \frac{r'_{1m}}{z - \overline{z}_m} + \frac{r'_{2m}}{(z - \overline{z}_m)^2} \right] \tag{1.11}$$

$$X(z) = \prod_{n=1}^{N} \sqrt{(z - a_n)(z - b_n)} \tag{1.12}$$

$$Q(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{X(t)[\Phi_1(t) + \overline{\Omega}_1(t)]\, dt}{t - z} \tag{1.13}$$

$$f_0(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{p(t)\, dt}{t - z} + \frac{1}{4\pi i X(z)} \int_L \frac{X(t) g(t) dt}{t - z} \tag{1.14}$$

$$f_1(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{\overline{p}(t)\, dt}{t - z} + \frac{1}{4\pi i X(z)} \int_L \frac{X(t) \overline{g}(t)\, dt}{t - z} \tag{1.15}$$

$$P(z) = d_0 z^N + d_1 z^{N-1} + \ldots + d_N - \tag{1.16}$$

произвольный полином степени N; c_0 — постоянная.

Сравнивая представления функций (1.4) и (1.10) в окрестности точек $z = z_m$, $z = \infty$, находим

$$2c_0 = \Gamma - \overline{\Gamma} - \overline{\Gamma}'; \quad 2d_0 = \Gamma + \overline{\Gamma} + \overline{\Gamma}'$$

$$d_1 = -\frac{(1 - \varkappa)(X + iY)}{2\pi(1 + \varkappa)} - d_0(a_1 + b_1 + \ldots + a_N + b_N)$$

$$2r_{1m} = -P_m X(z_m); \quad 2r'_{1m} = \varkappa P_m X(\overline{z}_m) + \overline{z}_m \overline{P}_m X'(\overline{z}_m) \tag{1.17}$$

$$2r'_{2m} = \overline{z}_m \overline{P}_m X(\overline{z}_m); \quad X + iY = \sum_{m=1}^{M} (X_m + iY_m)$$

Коэффициенты d_n $(n = \overline{2, N})$ определяются из условий однозначности перемещений при обходе по контурам, окружающим разрезы [1, 3].

Используя метод интегралов типа Коши [3], получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{X(t)[\Phi_1(t) + \overline{\Omega}_1(t)]\, dt}{t - z} = \frac{X(z)[\Phi_1(z) + \overline{\Omega}_1(z)]}{2} - \frac{G_1(z) + \overline{G}_2(z)}{2} \tag{1.18}$$

где $G_1(z)$, $G_2(z)$ — главные части соответственно разложений функций $X(z)\Phi_1(z)$, $X(z)\Omega_1(z)$ в полюсах $z = z_m$. Окончательно для функций (1.14) находим

$$\Phi(z) = \frac{\Phi_1(z) - \overline{\Omega}_1(z)}{2} + \frac{G_1(z) + G_2(z)}{2X(z)} + \frac{D(z)}{X(z)} +$$

$$+ \frac{P(z)}{X(z)} + \frac{A(z) - \overline{C}(z)}{2} + c_0 + f_0(z) \tag{1.19}$$

$$\Omega(z) = \frac{\Omega_1(z) - \overline{\Phi}_1(z)}{2} + \frac{\overline{G}_1(z) + G_2(z)}{2X(z)} + \frac{\overline{D}(z)}{X(z)} +$$

$$+ \frac{\overline{P}(z)}{X(z)} - \frac{\overline{A}(z) - C(z)}{2} - \overline{c}_0 + f_1(z)$$

Неизвестные функции $\Phi_1(z)$, $\Omega_1(z)$ определяются из граничных условий на контурах L_n. Так, если на контуре L_n заданы напряжения σ_r, $\tau_{r\theta}$, то

$$\Phi(t) + \overline{\Phi}(t) - \exp(2i\theta)\,[(\overline{t} - t)\,\Phi'(t) - \Phi(t) + \Omega(t)] = \sigma_r + i\tau_{r\theta} \tag{1.20}$$

Функции (1.19) с точностью до обозначений совпадают с общими выражениями для $\Phi(z)$, $\Omega(z)$, полученными в работе [1] методом введения дополнительных областей. Заметим, что $\overline{G}_1(z)\,X^{-1}(z) - \overline{\Phi}_1(z)$, $\overline{G}_1(z)\,X^{-1}(z) - \overline{\Omega}_1(z)$ в области S не имеют особенностей.

В случае, когда область S является конечной с внешним контуром L_0, решение задачи строится аналогичным образом. При этом функции $\Phi_1(z)$, $\Omega_1(z)$ будут содержать также дополнительные слагаемые $\Phi_2(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $\Omega_2(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, которые представляют собой функции, голоморфные внутри L_0. Поэтому к главным частям $G_1(z)$ и $G_2(z)$ добавляются соответствующие главные части $G_{10}(z)$, $G_{20}(z)$ функций $X(z)\,\Phi_1(z)$, $X(z)\,\Omega_1(z)$ в точке $z = \infty$. Для конечной области $P(z) = 0$, $c_0 = 0$.

§ 2. Функции, голоморфные вне криволинейного контура L_m ($m = \overline{1, M}$) представим в виде разложений по полиномам Фабера $P_{mk}(z)$ для бесконечной области с границей L_m. Полиномы $P_{mk}(z)$ представляются [5] многочленами порядка k по отрицательным степеням $z - z_m$, где z_m — произвольная точка внутри L_m. Учитывая это, для функций $\Phi_1(z)$, $\Omega_1(z)$ получим

$$\Phi_1(z) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{\infty} 2a_{mk}(z - z_m)^{-k}; \quad \Omega_1(z) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{mk}(z - z_m)^{-k} \tag{2.1}$$

В окрестности точки $z = z_m$

$$X(z) = \sum_{p=0}^{\infty} A_{mp}(z - z_m)^p; \quad \Phi_1(z)\,X(z) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} 2a_{mk} A_{mp}(z - z_m)^{p-k} + O(1) =$$

$$
= \sum_{r=1}^{\infty} (z - z_m)^{-r} \sum_{k=r}^{\infty} 2A_{mk-r} a_{mk} + O(1) \tag{2.2}
$$

$$
\Omega_1(z)\, X(z) = \sum_{r=1}^{\infty} (z - z_m)^{-r} \sum_{k=r}^{\infty} 2A_{mk-r} b_{mk} + O(1)
$$

где $O(1)$ — ограниченная величина; δ_i^j — символ Кронекера. Из формул (1.18) и (2.2) следует, что

$$
\begin{aligned}
G_1(z) &= \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{\infty} (z - z_m)^{-k} \sum_{p=k}^{\infty} 2A_{mp-k} a_{mp} \\
G_2(z) &= \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{\infty} (z - z_m)^{-k} \sum_{p=k}^{\infty} 2A_{mp-k} b_{mp}
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

Подставляя выражения (2.3) в формулы (1.19), получим

$$
\begin{aligned}
\Phi(z) = {} & \frac{D(z)}{X(z)} + \frac{P(z)}{X(z)} + \frac{A(z) - \overline{C}(z)}{2} + c_0 + f_0(z) + \\
& + \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(z - z_m)^k} \left[a_{mk} + X^{-1}(z) \sum_{p=k}^{\infty} A_{mp-k} a_{mp} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{(z - \bar{z}_m)^k} \left[-\bar{b}_{mk} + X^{-1}(z) \sum_{p=k}^{\infty} A_{mp-k} \bar{b}_{mp} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega(z) = {} & \frac{\overline{D}(z)}{X(z)} + \frac{\overline{P}(z)}{X(z)} - \frac{\overline{A}(z) - C(z)}{2} - \bar{c}_0 + f_1(z) + \\
& + \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(z - z_m)^k} \left[b_{mk} + X^{-1}(z) \sum_{p=k}^{\infty} A_{mp-k} b_{mp} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{(z - \bar{z}_m)^k} \left[-\bar{a}_{mk} + X^{-1}(z) \sum_{p=k}^{\infty} A_{mp-k} \bar{a}_{mp} \right] \right\}
\end{aligned}
$$

Неизвестные коэффициенты a_{mk}, b_{mk} определяются из граничных условий на контурах L_m.

§ 3. Пусть бесконечная пластинка с трещиной длиной $2l$ и круговым отверстием растягивается усилиями интенсивности p, приложенными на бесконечности перпендикулярно линии трещины (фиг. 1). Центр отверстия находится в точке $z = z_1$. В этом случае

$$
P_m = 0; \quad A(z) = C(z) = D(z) = f_0(z) = 0
$$

$$
\Gamma = \overline{\Gamma} = \frac{p}{4}; \quad \Gamma' = \overline{\Gamma}' = -\frac{p}{2}; \quad c_0 = -\frac{\Gamma'}{2}, \quad d_0 = \frac{2\Gamma + \Gamma'}{2}; \quad d_1 = 0
$$

$$
X(z) = \sqrt{z^2 - l^2}; \quad P(z) = d_0 z
$$

$$\Phi_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(z-z_0)^k}; \quad \Omega_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z-z_0)^k} \tag{3.1}$$

Функции (2.4) примут вид

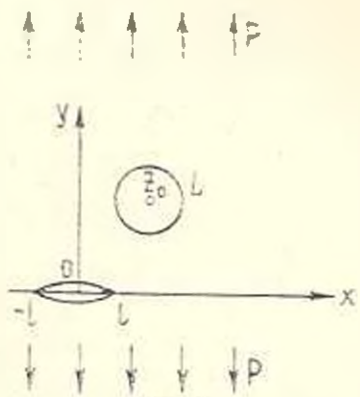
$$\Phi(z) = \frac{d_0 z}{X(z)} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a_k}{(z-z_0)^k} - \frac{\overline{b}_k}{(z-\overline{z}_0)^k} \right] +$$

$$+ \frac{1}{X(z)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=k}^{\infty} \left[\frac{A_{p-k} a_p}{(z-z_0)^k} + \frac{\overline{A}_{p-k} \overline{b}_p}{(z-\overline{z}_0)^k} \right] \tag{3.2}$$

$$\Omega(z) = \frac{d_0 z}{X(z)} - c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{b_k}{(z-z_0)^k} - \frac{\overline{a}_k}{(z-\overline{z}_0)^k} \right] +$$

$$+ \frac{1}{X(z)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=k}^{\infty} \left[\frac{A_{p-k} b_p}{(z-z_0)^k} + \frac{\overline{A}_{p-k} \overline{a}_p}{(z-\overline{z}_0)^k} \right]$$

Применяя метод рядов, из граничного условия (1.20) получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных a_n, b_k.



Фиг. 1.

Приведенное решение упрощается при $z_0 = \overline{z}_0 = h$. Если в последнем случае обозначить

$$\alpha_k = a_k - b_k; \quad \beta_k = \sum_{n=k}^{\infty} A_{n-k} (a_n + b_n)$$

то

$$\Phi(z) = \frac{d_0 z}{X(z)} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(z-h)^k} + \frac{1}{X(z)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{(z-h)^k}$$

$$\Omega(z) = \frac{d_0 z}{X(z)} - c_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(z-h)^k} + \frac{1}{X(z)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{(z-h)^k} \tag{3.3}$$

Формулы (3.2) и (3.3) по существу совпадают с окончательными выражениями для функций $\Phi(z)$, $\Omega(z)$, полученными методом последовательных приближений [2].

Подставляя функции (3.3) в граничное условие (1.20) и применяя метод рядов, получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$
\begin{gathered}
\sum_{p=1}^{\infty}\left[B_p-(1-\delta_p^1)B_{p-2}\right]b_p=-c_0-G_0\\
(1+\delta_k^1)a_k+\sum_{i=k}^{\infty}(1-\delta_k^1)B_{i-k}b_i+\sum_{p=1}^{\infty}\left[(1-k)B_{p-k}+\right.\\
\left.+(1-\delta_k^1-\delta_k^2)(k-2)B_{p-k-2}\right]b_p=-2\delta_k^2c_0-(1-k)G_k-\\
-(1-\delta_k^1-\delta_k^2)(k-2)G_{k-2}\\
(1+k)a_k-ka_{k-2}-\sum_{i=k}^{\infty}(1+k)B_{i-k}b_i-\\
-\sum_{i=k+2}^{\infty}(k+2)B_{i-k-2}b_i+\sum_{p=1}^{\infty}B_{k-p}b_p=-G_k\\
a_1=0;\quad \sum_{i=1}^{\infty}B_{i-1}b_i=0
\end{gathered}
\tag{3.4}
$$

где

$$
B_i=\frac{(-1)^i}{2^{2i}\sqrt{h^2-l^2}}\sum_{p=0}^{i}\frac{(2i-2p)!\,(2p)!}{((i-p)!)^2(p!)^2(h+l)^{i-p}(h-l)^p}
$$

$$
G_i=d_0\left[hB_i-(1-\delta_i^0)B_{i-1}\right]
$$

Последние два уравнения системы (3.4) получены из условия равенства нулю вычетов функций (3.3) в точке $z=h$.

После решения системы (3.4) коэффициенты a_k, b_k, а следовательно, и функции (3.3), будут известными, что позволит вычислить напряжения, а также коэффициент интенсивности напряжений:

$$
k_1^{\pm}=2d_0\sqrt{l}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{l}}\,\frac{a_k}{(\pm l-h)^k}
$$

Здесь верхний знак относится к правому концу трещин, нижний — к левому концу.

На ЭВМ были проведены численные исследования распределения напряжений и изменения коэффициента интенсивности напряжений.

В табл. 1, 2 для случая $l=1$ с точностью до множителя p приведены значения напряжений σ_θ/p около контура отверстия и коэффициента интенсивности напряжений. Эти результаты хорошо согласуются с известными [1, 4].

Таблица 1

$h-l-1$	θ, град.										
	0	30	60	90	120	150	160	170	174	176	180
0,5	3,22	2,18	0,06	−1,06	0	2,77	3,51	3,54	3,37	3,29	3,22
0,1	3,43	2,37	0,17	−1,19	−0,49	2,34	4,22	7,24	7,94	7,07	3,43
0,05	3,49	2,43	0,21	−0,93	−0,64	1,85	3,70	7,50	10,69	10,25	3,92

Таблица 2

$h-l-1$	1	0,5	0,25	0,1	0,05
k_1^+/p	1,157	1,355	1,656	2,176	2,660
k_1^-/p	1,065	1,112	1,165	1,229	1,269

Как показывают численные исследования, взаимное влияние отверстия и трещины на напряженное состояние около друг друга существенно, если длина перемычки меньше половины радиуса отверстия или длины трещины. При дальнейшем сближении отверстия с трещиной происходит резкое увеличение значения напряжений около отверстия и трещины и в зоне между ними.

ԲԱԶՄԱԿԱՊ ՍԱԼԻ ՀԱՄԱՐ ՃԱՔԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴՐԻ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՊՈՏԵՆՑԻԱԼՆԵՐ

Ս. Ա. ԿԱԼՈԵՐՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Խոռոչներով և ներքին ճաքերով բազմակապ սալի համար կոմպլեքս պոտենցիալները արտահայտված են բազմակապ տիրույթում հոլոմորֆ ֆունկցիաների միջոցով։ Այդ ֆունկցիաները որոշվում են խոռոչների եզրագծերի վրա տրված եզրային պայմաններից։

THE COMPLEX POTENTIALS OF A PLANE PROBLEM THEORY OF THE CRACK FOR THE MULTIPLE CONNECTED PLATE

S. A. KALOYEROV

S u m m a r y

The complex potentials for a multiple connected plate with holes and inside cracks are expressed through functions holomorphic in a multiple connected region. These functions are defined on the boundary conditions on the contours of holes.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калогров С. А.* Задача теории упругости для многосвязных пластин с отверстиями и внутренними трещинами. Теоретическая и прикладная механика. Киев—Донецк: Вища школа, Головное изд-во, 1982, вып. 13.
2. *Калоеров С. А., Павленко В. И.* Напряженное состояние пластинки с круговым отверстием и трещиной. Теоретическая и прикладная механика. Киев—Донецк: Вища школа. Головное изд-во. 1981, вып. 12.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
4. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещины в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976.
5. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.—Л.: Наука, 1964.

Донецкий государственный университет

Поступила в редакцию 22.III.1982