

## ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИ-НЕОДНОРОДНЫХ КОНИЧЕСКИХ ТРУБ

ГРИГОРЯН А. А., ЗАДОЯН М. А.

Вопросы плоской деформации и кручение пластически-неоднородных тел изучены достаточно подробно, между тем, осесимметричное и пространственное течения рассматривались лишь в немногочисленных работах [1]. Пространственная задача неоднородного пластического тела исследована в статье [2], где материал принимается идеально-пластическим, подчиняющимся условию пластичности Треска. В работах [3—6] изучены различные задачи о неоднородном упруго-пластическом полом шаре под воздействием внутреннего давления, когда характеристики материала меняются по радиальному направлению. В статье [7] рассмотрен трансверсально-изотропный шар, предел текучести которого также является функцией от радиуса. В работах [8—10] исследованы осесимметричные задачи для пластически-неоднородных цилиндрических труб и дисков.

Рассмотренные осесимметричные задачи относятся, главным образом, к шарам, цилиндрам и дискам. В настоящей работе рассматриваются осесимметричные задачи предельного состояния длинных конических труб из несжимаемых пластически-неоднородных материалов, подчиняющихся условию пластичности Губера—Мизеса.

§ 1. Основные уравнения. Общие соотношения теории течения идеального жестко-пластического неоднородного тела в случае осевой симметрии в сферических координатах в обычных обозначениях имеют следующий вид:

дифференциальные уравнения равновесия —

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (2\tau_{\theta\theta} - \tau_{\theta\theta} - \tau_r + \tau_{\theta\theta} \operatorname{ctg} \theta) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} [(\sigma_r - \tau_r) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{\theta\theta}] &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (2\tau_{\theta\theta} \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{\theta\theta}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

соотношения между компонентами скоростей деформации, напряжений и скоростей перемещений —

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \Lambda (\varepsilon_{rr} - \delta_{rr} \sigma), & \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{u}{r} + \frac{v}{r} \operatorname{ctg} \theta, & 2\gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ 2\gamma_{r\varphi} &= \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r}, & 2\gamma_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{w}{r} \operatorname{ctg} \theta\end{aligned}\quad (1.2)$$

условие пластичности Губера—Мизеса

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + 6(\tau_{r\theta}^2 + \tau_{r\varphi}^2 + \tau_{\theta\varphi}^2) = 6K^2(r, \theta) \quad (1.3)$$

Здесь  $K(r, \theta)$  — определенная из эксперимента функция, характеризующая неоднородность пластических свойств материала. Такие неоднородные свойства вызываются, например, нейтронным облучением, температурным градиентом и т. д. [1]. В дальнейшем принимаем

$$K(r, \theta) = r^k k(\theta) \quad (1.4)$$

где  $k(\theta)$  — известная функция, а  $v$  — постоянная, характеризующая материал.

Компоненты скоростей перемещений, удовлетворяющие условию несжимаемости

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi = 0$$

зададим в виде

$$\begin{aligned}u &= r^{\lambda+1} [f'(\theta) + f(\theta) \operatorname{ctg} \theta], & v &= -(\lambda+2) r^{\lambda+1} f(\theta) \\ w &= (\lambda+2) r^{\lambda+1} \psi(\theta) \sin \theta, & \lambda &= \text{const}\end{aligned}\quad (1.5)$$

где  $f(\theta)$  и  $\psi(\theta)$  — произвольные функции от  $\theta$ . Тогда компоненты напряжения можно представить в виде

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_\theta + 2r' \frac{k(\theta)}{\Omega(\theta)} [(2\lambda+1)f' + (\lambda-1)f \operatorname{ctg} \theta] \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\theta + 2(\lambda+2) r' \frac{k(\theta)}{\Omega(\theta)} [f' - f \operatorname{ctg} \theta] \\ r_{r\theta} &= r' \frac{k(\theta)}{\Omega(\theta)} [f'' + (f \operatorname{ctg} \theta)' + (\lambda+2)(1-\lambda)f] \\ \tau_{\theta\varphi} &= (\lambda+2) r' \frac{k(\theta)}{\Omega(\theta)} \psi' \sin \theta, & \tau_{r\varphi} &= (\lambda+2)(\lambda-1) r' \frac{k(\theta)}{\Omega(\theta)} \psi \sin \theta\end{aligned}\quad (1.6)$$

$$\Omega(\theta) = \sqrt{Q}$$

$$\begin{aligned}Q &= 4\lambda^2 (f' + f \operatorname{ctg} \theta)^2 + 4\lambda (f' + f \operatorname{ctg} \theta) [f \operatorname{ctg} \theta - (\lambda+1)f']^2 + \\ &+ 4[f \operatorname{ctg} \theta - (\lambda+1)f']^2 + [f'' + (f \operatorname{ctg} \theta)' + (\lambda+2)(1-\lambda)f]^2 + \\ &+ (\lambda+2)^2 \sin^2 \theta [\psi'^2 + (\lambda-1)^2 \psi^2]\end{aligned}$$

Подставляя (1.6) в дифференциальные уравнения равновесия (1.1), приходим к выражению для  $\sigma_\theta$ \*

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = H + M \varphi(r) - (\nu + 3) r' \int_a^{\theta} \frac{k}{\Omega} [f'' + (f \operatorname{ctg} \theta)' + (2 + \lambda)(1 - \lambda)f] d\theta + \\ + 2(\lambda + 2) r' \int_a^{\theta} \frac{k}{\Omega} (f' - f \operatorname{ctg} \theta) \operatorname{ctg} \theta d\theta \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$\varphi(r) = \begin{cases} \ln r & \text{при } \nu = 0 \\ \frac{1}{\nu} r^\nu & \text{при } \nu \neq 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

и к системе двух обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\sin \theta} \left\{ \frac{k}{\Omega} [f'' + (f \operatorname{ctg} \theta)' + (2 + \lambda)(1 - \lambda)f] \sin \theta \right\}' \right) + \\ + 6\lambda \left[ \frac{k}{\Omega} \frac{(f \sin \theta)'}{\sin \theta} \right] + \sin \theta \left\{ \frac{k}{\Omega} [(2\lambda + 1)f' + (\lambda - 1)f \operatorname{ctg} \theta] \right\}' + \\ + 2(\lambda + 2) \nu \frac{k}{\Omega} (f' - f \operatorname{ctg} \theta) \operatorname{ctg} \theta - \\ - \nu(\nu + 3) \frac{k}{\Omega} [f'' + (f \operatorname{ctg} \theta)' + (2 + \lambda)(1 - \lambda)f] = 0 \quad (1.9) \\ \left( \frac{k \psi' \sin^3 \theta}{\Omega} \right)' + (\nu + 3)(\lambda - 1) \frac{k \psi \sin^3 \theta}{\Omega} = 0 \end{aligned}$$

Условия на конических поверхностях  $\theta = \alpha$  и  $\theta = \beta$  определяют граничные условия для системы уравнений (1.9). В случае, когда материал неоднороден только по толщине трубы, то есть  $\nu = 0$ , будем иметь следующие выражения для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_0 + \frac{2k}{\Omega} [(2\lambda + 1)f' + (\lambda - 1)f \operatorname{ctg} \theta] \\ \sigma_\theta = \sigma_0 + 2(\lambda + 2) \frac{k}{\Omega} (f' - f \operatorname{ctg} \theta) \\ \sigma_z = H + M \ln r - 3 \int_a^{\theta} \frac{k}{\Omega} [f'' + (f \operatorname{ctg} \theta)' + (2 + \lambda)(1 - \lambda)f] d\theta + \\ + 2(\lambda + 2) \int_a^{\theta} \frac{k}{\Omega} (f' - f \operatorname{ctg} \theta) \operatorname{ctg} \theta d\theta \end{aligned} \quad (1.10)$$

\* Здесь и в дальнейшем заглавные буквы латинского алфавита означают произвольные постоянные.

$$\tau_{\theta} = \frac{k}{2} [f'' + (f \operatorname{ctg} \theta)' + (2 + \lambda)(1 - \lambda)f]$$

$$\tau_{\theta\varphi} = (\lambda + 2) \frac{k}{2} \psi' \sin \theta, \quad \tau_{\varphi} = (\lambda + 2)(1 - \lambda) \frac{k}{2} \psi \sin \theta$$

и систему уравнений —

$$\left\{ \frac{k}{2} [f'' + (f \operatorname{ctg} \theta)' + (2 + \lambda)(1 - \lambda)f] \sin \theta \right\}' +$$

$$+ 6\lambda \frac{k}{2} (f \sin \theta)' + M \sin \theta = 0 \quad (1.11)$$

$$\left( \frac{k}{2} \psi' \sin^2 \theta \right)' + 3(\lambda - 1) \frac{k \psi \sin^2 \theta}{2} = 0$$

Рассмотрим некоторые предельные состояния поперечно-неоднородных конических труб.

§ 2. *Предельное состояние пластически-неоднородной по толщине конической трубы под воздействием внутренних и внешних кольцевых касательных сил (фиг. 1).* Принимаем, что на внутренней и внешней конических поверхностях действуют, соответственно, касательные нагрузки

$$\tau_{\theta\varphi} = q_1 \text{ при } \theta = \alpha$$

$$\tau_{\theta\varphi} = q_2 \text{ при } \theta = \beta \quad (2.1)$$

Если принять в соотношениях (1.10–1.11)  $f = 0$ ,  $H = M = 0$ , первое уравнение (1.10) превратится в тождество, а из второго следует уравнение

$$\left| \frac{k \psi' \sin^2 \theta}{V \psi'^2 + (\lambda - 1)^2 \psi^2} \right|' +$$

$$+ 3(\lambda - 1) \frac{k \psi \sin^2 \theta}{V \psi'^2 + (\lambda - 1)^2 \psi^2} = 0 \quad (2.2)$$

на основании которого определяются отличные от нуля компоненты напряжения  $\tau_{\theta\varphi}$  и  $\tau_{\varphi}$ .

Вводя обозначения

$$\tau_{\theta\varphi} = k(\theta) \tau(\theta), \quad \tau(\theta) = \frac{\psi'}{V \psi'^2 + (\lambda - 1)^2 \psi^2} \quad (2.3)$$

из (2.2) приходим к уравнению

$$\tau' + \lambda \tau + 3\lambda \sqrt{1 - \tau^2} = 0 \quad (2.4)$$

где

$$\lambda = \frac{k'(\theta)}{k(\theta)} + 2 \operatorname{ctg} \theta, \quad \mu = \operatorname{sign}(q_1 - q_2) \quad (2.5)$$

Рассмотрим случай неоднородности, когда

$$k(\theta) = k_1 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \theta} \exp(\gamma(\theta - \alpha)) \quad (2.6)$$

Тогда из (2.4) следует

$$\int_{\tau}^{q_1/k_1} \frac{dx}{\gamma x + 3\mu \sqrt{1-x^2}} = \theta - \alpha \quad (2.7)$$

После интегрирования получаем неявное соотношение для  $\tau$

$$\arcsin \frac{q_1}{k_1} - \arcsin \tau + \frac{\mu\gamma}{3} \ln \frac{\gamma \frac{q_1}{k_1} + 3\mu \sqrt{1 - \frac{q_1^2}{k_1^2}}}{\gamma \tau + 3\mu \sqrt{1 - \tau^2}} = \mu \frac{9 + \gamma^2}{3} (\theta - \alpha) \quad (2.8)$$

В предельном состоянии трубы отсюда следует зависимость между  $q_1$  и  $q_2$ .

$$\arcsin \frac{q_1}{k_1} - \arcsin \frac{q_2}{k_2} + \frac{\mu\gamma}{3} \ln \frac{\gamma \frac{q_1}{k_1} + 3\mu \sqrt{1 - \frac{q_1^2}{k_1^2}}}{\gamma \frac{q_2}{k_2} + 3\mu \sqrt{1 - \frac{q_2^2}{k_2^2}}} = \mu \frac{9 + \gamma^2}{3} (\beta - \alpha) \quad (2.9)$$

где

$$k_2 = k_1 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} \exp(\gamma(\beta - \alpha))$$

Для более простого случая неоднородности, когда  $\gamma = 0$ , из (2.8) имеем

$$\arcsin \frac{q_1}{k_1} - \arcsin \tau = 3\mu(\theta - \alpha) \quad (2.10)$$

В предельном состоянии имеем соотношение

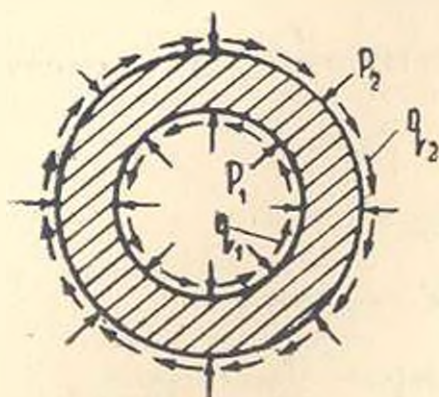
$$\arcsin \frac{q_1}{k_1} - \arcsin \frac{q_2}{k_2} = 3\mu(\beta - \alpha) \quad (2.11)$$

Для определения единственной отличной от нуля скорости перемещения  $\psi$  по формуле (1.6) функцию  $\psi$  находим из (2.3)

$$\psi = D \exp \left\{ (\lambda - 1) \int_{\alpha}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \tau^2}} \right\} \quad (2.12)$$

В общем случае для  $k(\theta)$  уравнение (2.4) следует интегрировать численным способом.

§ 3. Предельное состояние пластически-неоднородной конической трубы под совместным воздействием внешних нормальных и кольцевых касательных сил (фиг. 2). Положим, что пластически-неоднородная по толщине коническая труба под воздействием внешних сил



Фиг. 2.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -P_1, \quad \tau_{\theta r} = q_1 \text{ при } \theta = \alpha \\ \sigma_r &= -P_2, \quad \tau_{\theta r} = q_2 \text{ при } \theta = \beta \end{aligned} \quad (3.1)$$

находится в предельном напряженном состоянии.

Принимая в (1.10)–(1.11)  $f = E/\sin \theta$ ,  $i = 1$ ,  $M = 0$ , удовлетворим первому уравнению (1.11), а из второго, опуская индексы при  $\tau_{\theta r}$ , получаем

$$\tau = q_1 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \theta} = \frac{k \psi' \sin^2 \theta}{\sqrt{4E^2 \cos^2 \theta + \psi'^2 \sin^4 \theta}} \quad (3.2)$$

Отсюда, определяя

$$\psi' = \frac{2E \cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} \quad (3.3)$$

и подставляя в формулы нормальных напряжений (1.10), с учетом граничных условий (3.1) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_\theta - \mu \sqrt{k^2 - \tau^2}, \quad \tau = \tau_1 - 2\mu \int \sqrt{k^2 - \tau^2} \\ \sigma_\theta &= -P_1 + 2\mu \int_a^\theta \sqrt{k^2 - \tau^2} \operatorname{ctg} \theta d\theta, \quad \mu = \operatorname{sign}(P_1 - P_2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Условия на внешней поверхности трубы  $\theta = \beta$  дают соотношения между внешними силами в предельном состоянии конической трубы

$$\begin{aligned} P_1 - P_2 &= 2\mu \int_a^\beta \sqrt{k^2 - \tau^2} \operatorname{ctg} \theta d\theta \\ q_1 \sin^2 \alpha &= q_2 \sin^2 \beta \end{aligned} \quad (3.5)$$

В частном случае, когда  $q_1 = q_2 = 0$ , из (3.4) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_\theta - \mu k, \quad \sigma_\theta = \sigma_1 - 2\mu k \\ \sigma_\theta &= -P_1 + 2\mu \int_a^\theta k \operatorname{ctg} \theta d\theta \end{aligned} \quad (3.6)$$

Предельное состояние в этом случае определяется соотношением

$$P_1 - P_2 = 2\mu \int_0^{\theta} k \operatorname{ctg} \theta d\theta \quad (3.7)$$

Для однородного материала из (3.6)–(3.7) при  $k = \operatorname{const}$  получаются соответствующие формулы Д. Д. Ивлева [11].

Интегрируя (3.3), находим

$$\phi = 2E \int_0^{\theta} \frac{\tau}{k^2 - \tau^2} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} d\theta + N \quad (3.8)$$

Для скоростей перемещений получаем

$$u = 0, \quad v = -\frac{3Er}{\sin \theta}, \quad w = 6Er \sin \theta \left| \int \frac{\tau \cos \theta d\theta}{V k^2 - \tau^2 \sin^3 \theta} + G \right| \quad (3.9)$$

Переходя к пределу  $\theta \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow \infty$  при постоянном  $\rho = r \sin \theta$ , из формул (3.4) и (3.5) получим соответствующие формулы для неоднородной по толщине цилиндрической трубы, находящейся под воздействием внешних сил

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -P_1, \quad \tau_{r\theta} = q_1 \text{ при } \rho = a \\ \sigma_r &= -P_2, \quad \tau_{r\theta} = q_2 \text{ при } \rho = b \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь  $a$  и  $b$ , соответственно,— внутренний и внешний радиусы цилиндрической трубы

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \sigma_r - \mu \sqrt{k^2(\rho) - \tau^2(\rho)}, \quad \sigma_\theta = \sigma_r - 2\mu \sqrt{k^2(\rho) - \tau^2(\rho)} \\ \sigma_r &= -P_1 + 2\mu \int_a^{\rho} \sqrt{k^2(\rho) - \tau^2(\rho)} \frac{d\rho}{\rho}, \quad \tau_{r\theta} = \tau = q_1 \frac{a^2}{\rho^2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Предельное напряженное состояние определяется соотношениями

$$P_1 - P_2 = 2\mu \int_a^b \sqrt{k^2(\rho) - \tau^2(\rho)} \frac{d\rho}{\rho}, \quad q_1 a^2 = q_2 b^2 \quad (3.12)$$

Формулы (3.11) при  $k(\rho) = \operatorname{const}$  переходят в формулы А. Надаи [12] для напряженного состояния около круговой полости в бесконечной плоскости.

§ 4. Предельное состояние пластически-неоднородной по толщине конической трубы при совместном воздействии внешних нормальных и продольных касательных сил (фиг. 3). Пусть коническая труба под воздействием внешних сил

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -P_1, \tau_{r\theta} = q_1 \text{ при } \theta = \alpha \\ \sigma_2 &= -P_2, \tau_{r\theta} = q_2 \text{ при } \theta = \beta\end{aligned}\quad (4.1)$$

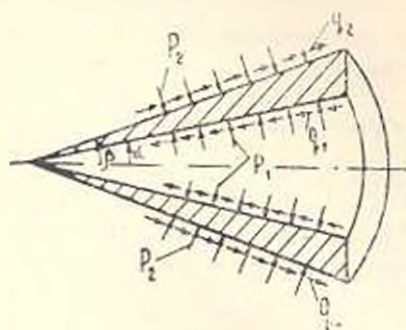
находится в предельном состоянии. В этом случае, принимая в (1.10) — (1.11)  $\psi = 0$ ,  $\lambda = M = 0$  и опуская индексы при  $\tau_{r\theta}$ , получаем

$$\tau = q_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \theta}, \quad \Omega = \frac{2\mu(f - f \operatorname{ctg} \theta)k}{1 + k^2 - \tau^2}, \quad \mu = \operatorname{sign}(P_1 - P_2) \quad (4.2)$$

Подставляя эти выражения в формулы (1.10) и учитывая условия на поверхности  $\theta = \alpha$ , будем иметь

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_1 + \mu \sqrt{k^2 - \tau^2}, \quad \sigma_\theta = \sigma_1 + 2\mu \sqrt{k^2 - \tau^2} \\ \sigma_1 &= -P_1 - 3q_1 \sin \alpha \ln \frac{\operatorname{tg} \theta/2}{\operatorname{tg} \alpha/2} - 2\mu \int \sqrt{k^2 - \tau^2} \operatorname{ctg} \theta d\theta\end{aligned}\quad (4.3)$$

Используя условия на внешней поверхности трубы, находим



Фиг. 3.

$$\begin{aligned}P_1 - P_2 &= 2\mu \int \sqrt{k^2 - \tau^2} \operatorname{ctg} \theta d\theta - \\ &- 3q_1 \sin \alpha \ln \frac{\operatorname{tg} \beta/2}{\operatorname{tg} \alpha/2} \\ q_1 \sin \alpha &= q_2 \sin \beta\end{aligned}\quad (4.4)$$

Соотношения (4.4) определяют предельное состояние конической трубы.

Сопоставляя выражения  $\tau_{r\theta}$  из (1.10) и (4.2), приходим к дифференциальному уравнению

$$f'' + \left( \operatorname{ctg} \theta - \frac{2\mu\tau}{\sqrt{k^2 - \tau^2}} \right) f' + \left( 2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{2\mu\tau}{\sqrt{k^2 - \tau^2}} \operatorname{ctg} \theta \right) f = 0$$

решение которого будет

$$f = A \sin \theta + B \sin \theta \int \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^3 \theta} \exp \left( 2\mu \int \frac{\tau d\theta}{\sqrt{k^2 - \tau^2}} \right) d\theta$$

Исходя из выражений (4.2) — (4.4), можно получить соответствующие формулы для цилиндрической трубы, находящейся под внешними воздействиями:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -P_1, \tau_{rz} = q_1 \text{ при } r = a \\ \sigma_r &= -P_2, \tau_{rz} = q_2 \text{ при } r = b\end{aligned}$$

Так, переходя к цилиндрическим координатам, фиксируя  $\rho = r \sin \theta$ , при  $H \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow \infty$  из (4.2) — (4.4) получим

$$z_p = -P_1 + 2\mu \int_a^b \sqrt{k^2 - z^2} \frac{dz}{\rho}, \quad z_{ps} = z - q_1 \frac{a}{\rho}$$

$$z_b = z_p + 2\mu \sqrt{k^2 - z^2}$$

$$P_1 - P_2 = 2\mu \int_a^b \sqrt{k^2 - z^2} \frac{dz}{\rho}, \quad q_1 a = q_2 b$$

Эти формулы в цилиндрических координатах определяют предельное состояние неоднородной по толщине цилиндрической трубы при совместном воздействии внешних нормальных и продольных касательных сил.

## ՊԼԱՍՏԻԿՈՐԵՆ ԱՆՀԱՐԱՍՈՒԻ ԿՈՆԱԿԱՆ ԽՈՂՈՎԱԿՆԵՐԻ ՈԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԸ

Ա. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Մ. Ա. ՉԱԴՈՅԱՆ

### Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հետազոտվում է պլաստիկորեն անհամասեռ կոշտ պլաստիկ կոնական խողովակների սահմանային վիճակը արտաքին տարբեր բեռների դեպքում՝ հողովակի նյութը անսեղմելի է և բավարարում է Հյուբեր-Միզեսի պայմանով պլաստիկության հասունության տեսության հավասարումներին:

Լարումները և սեղափոխությունների արագությունները արտահայտելով (1.6) տեսքով՝ բավարարվում են պլաստիկության և անսեղմելիության պայմանները՝  $f(\xi)$  և  $\varphi(\xi)$  ֆունկցիաների նկատմամբ ստացվել են ու-զծային ֆունկցիոնալ հավասարումների սխեմա:

Դիսկուսված են երեք խնդիրներ.

1. Կոնական խողովակի սահմանային վիճակը արտաքին և ներքին օղակային լարումների ազդեցության տակ: 2. Կոնական խողովակի սահմանային վիճակը արտաքին և ներքին օղակային շոշափող և նորմալ բեռների ազդեցության տակ: 3. Կոնական խողովակի սահմանային վիճակը արտաքին և ներքին ընդլայնական շոշափող և նորմալ բեռների ներքո:

Ստացված են բեռների միջև կապեր, որոնց դեպքում կոնական խողովակը գտնվում է սահմանային վիճակում:

## THE LIMIT STATE OF PLASTIC INHOMOGENEOUS CONIC TUBES

A. A. GRIGORIAN, M. A. ZADOYAN

### S u m m a r y

The limit state of plastic inhomogeneous conic tubes is investigated. The material of the tube is incompressible and satisfies the

equations of the theory of plastic yielding with the Huber-Mises condition.

Strain and displacement velocities expressed through two unknown functions satisfy the plastic and incompressible conditions. From equilibrium equations for the unknown functions the system of non-linear differential equations is obtained.

The problems of limit state of plastic inhomogeneous, in thickness, conic tubes under: 1) internal and external ring-shaped shearing forces, 2) external normal and shearing ring-shaped forces, 3) external normal and longitudinal shearing forces are observed.

The relations between loads are obtained under which the conic tube is in a limited state.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Олышак В., Рыжковский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел (пер. с англ.). М.: Изд-во Мир, 1964.
2. Иалеа Д. Д. Some remarks on the theory of non-homogeneous plastic media (Space problem). — Arch. Mech. Stos. 1961, 13, No. 2.
3. Olzak W., Urbanowski W. Non-homogeneous thick-walled elastic-plastic spherical shell subjected to internal and external pressures. — Rozpr. inż. 1956, 4, No. 1.
4. Rogozinski M. Some problems of thermoplasticity of a spherical shell. — Proc. IUTAM, symposium: Сб. статей. Warsaw: 1958.
5. Илюшин А. А., Огибалов П. М. О прочности оболочки толстостенного цилиндра и полого шара, подвергнутых облучению. Инж. ж., 1960, 28.
6. Дорофеева В. М., Курианова М. В. Напряжения в многослойном неоднородном упруго-пластическом шаре. — Прикладные проблемы прочности и пластичности: Горький: 1978, № 8.
7. Seth B. R. Non-homogeneous yield condition. — Proc. IUTAM, symposium: Сб. статей. Warsaw: 1958.
8. Горлом В. А. Несущая способность неоднородной оболочки. — Работы по механике сплошных сред: Сб. статей. Тула: 1975.
9. Gurushankar G. V. A note on the yielding of an accelerating non-homogeneous disc of varying thickness and density with radial loading. — J. Strain. Anal., 1978, 13, No. 1.
10. Сенишов С. И. Точные пространственные решения уравнений, описывающих пластическое течение анизотропных и неоднородных сред. «Динамика сплошной среды». Новосибирск: № 43, 1979.
11. Иалеа Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Изд-во Наука, 1966.
12. Nadai A. Zeits f. Phys. 1924, v. 30.

Институт механики  
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию  
18. VI. 1982