

ОБ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ НАГРУЗКЕ И НАПРЯЖЕННО-
ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ТОКОНЕСУЩЕЙ
ТОРОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ

ОВАКИМЯН Р. И.

Как известно [1], установки системы «Токамак» предназначаются для управляемого термоядерного синтеза. Основой их конструкции является тороидальная камера с сильным магнитным полем, выполняющим роль своеобразной «магнитной ловушки» для плазменного пучка. На «Токамаках» первого поколения, в основном, проводились исследования физики плазмы, а также изучались вопросы стабилизации и удержания плазменного пучка от соприкосновения со стенками тора. Последняя проблема, в принципе, была решена с помощью наложения различных магнитных полей, наиболее значительным из которых оказалось тороидальное поле H_z , параллельное плазменному пучку в торе. Такого вида поле создается катушкой с током, навитой в меридиональном направлении на тороидальную оболочку. Для увеличения силы тока I в катушке, а следовательно, и создаваемой напряженности магнитного поля H_z в дальнейшем предполагается изготовление обмотки катушки из сверхпроводящего материала, как в «Токамаке-7» [2].

В настоящее время, когда начато строительство демонстрационной установки «Токамак», важное значение приобретает инженерная часть дела, включая прочностные расчеты тороидальной оболочки, находящейся под воздействием сверхвысоких температур излучения плазмы, а также электромагнитной нагрузки, возникающей в обмотке тора.

В данной работе делается попытка определения лишь электромагнитных усилий, являющихся следствием взаимодействия тока катушки с собственным магнитным полем, характера их распределения по круговому контуру сечения тороидальной оболочки. Помимо этого, в приближенном виде по безмоментной теории [3] рассчитывается напряженно-деформированное состояние оболочки под действием электромагнитных усилий.

1. Пусть катушка, через которую пропускается постоянный ток силы $J = \text{const}$, наматывается на тороидальную оболочку в меридиональном направлении. Катушка покрывается такой же формы тороидальной оболочкой вращения большого радиуса a и малого радиуса R . Через образуемый коаксиальный зазор для охлаждения обмотки катушки может пропускаться вода, а в случае применения сверхпроводников — криогенная жидкость.

Согласно [3] элемент срединной поверхности оболочки характеризуется единичными орт-векторами e_1, e_2, e_n , с радиусами кривизны тороидальной оболочки вращения (фиг. 1)

$$R_1 = \frac{a}{\sin \varphi} + R = a \frac{1 + \alpha \sin \varphi}{\sin \varphi}, \quad R_2 = R \quad (1.1)$$

где постоянная $\alpha = R/a$ характеризует геометрическую форму тора, причем $0 < \alpha < 1$. Ввиду замкнутости тороидальной оболочки по малому радиусу R и большому радиусу a , переменные φ и θ изменяются от 0 до 2π .

Определим электромагнитную нагрузку, действующую на элемент срединной поверхности тороидальной (наружной) оболочки.

Пусть полное число витков катушки, наматываемых на тор, равно N . Тогда, при равномерной намотке на единицу длины дуги окружности в широтном направлении θ приходится число витков

$$n = \frac{N}{2\pi a (1 + \alpha \sin \varphi)} \quad (1.2)$$

которое является функцией от $\sin \varphi$. В частном случае, когда провода плотно наматываются на тор так, что на внутренней окружности радиуса $a - R$ при толщине провода δ имеет место соотношение $N\delta = 2\pi(a - R)$, согласно (1.2) можно написать

$$n = \frac{1}{\delta} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha \sin \varphi} \quad (1.3)$$

Для сведения к минимуму выхода магнитного поля за пределы тора, а следовательно, и катушки последнюю необходимо наматывать на тор возможно малым шагом, придерживаясь меридионального направления. Разумеется, полного исключения широтного направления тока достичь невозможно. Даже в предельном случае цилиндрической оболочки ($\alpha = 0$) подобные токи возникают хотя бы из-за шага винта обмотки.

Таким образом, при выполнении условий намотки катушки весь ток силой J приближенно считается меридиональным. Помимо этого, при малом сечении провода толщины δ по сравнению с сечением оболочки радиуса R этот ток, согласно [4], приближенно можно принять поверхностным, плотность которого с учетом (1.3) равна

$$i = n J e_\alpha = \frac{J}{\delta} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha \sin \varphi} e_\alpha \quad (1.4)$$

Интересная работа по определению магнитного поля токов, текущих по поверхности тороидальной оболочки, была выполнена Н. И. Дошиковым [5], где для случая меридиональных токов выведено соотношение

$$H = -H_\theta e_\theta = -i(a) \frac{a}{r} e_\theta \quad (1.5)$$

записанное здесь в системе единиц СИ. В выражении (1.5) r — расстояние от оси вращения до точек в области, охватываемой торондальной оболочкой вращения, $i(a)$ — поверхностная плотность тока при $r = a$.

Приняв для поверхности оболочки $r = r_2 = a(1 + \alpha \sin \varphi)$ и, согласно (1.4), поверхностную плотность тока $i(a) = J(1 - \alpha)^2$, получим из выражения (1.5) напряженность магнитного поля на поверхности тора

$$H_z = -\frac{J}{\delta} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha \sin \varphi} e_z \quad (1.6)$$

Силовые линии этого поля имеют лишь окружное (торондальное) направление.

Электромагнитная сила, действующая на токонесущую поверхность оболочки в магнитном поле, в случае поверхностных токов определяется соотношением

$$p = i \times B_z \quad (1.7)$$

где в системе СИ магнитная индукция на поверхности тора $B_z = \mu \mu_0 H_z$, μ — относительная магнитная проницаемость среды, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$ — магнитная проницаемость вакуума.

Подставляя в формулу (1.7) выражения плотности тока i (1.4) и магнитной напряженности H_z (1.6), получим электромагнитное давление на токонесущую поверхность торондальной оболочки

$$p = \mu \mu_0 \left(\frac{J}{\delta} \right)^2 \frac{(1 - \alpha)^2}{(1 + \alpha \sin \varphi)^2} e_z = p_0 \frac{(1 - \alpha)^2}{(1 + \alpha \sin \varphi)^2} e_z \quad (1.8)$$

действующее только в направлении нормали e_z к поверхности оболочки. Для сокращения записи принято обозначение постоянной величины $p_0 = \mu \mu_0 (J/\delta)^2$.

Из формулы (1.8) следует непрерывность распределения электромагнитного давления по всей поверхности оболочки, что является естественно приближением, так как в действующих системах «Токамак», конечно, имеются бестоковые участки. Однако, учитывая, что нашей основной задачей является исследование качественной картины вида нагрузки, а также возникающего напряженно-деформированного состояния торондальной оболочки, то электромагнитное давление (1.8) можно считать «размазанным» по поверхности оболочки, как это принято в большинстве подобных работ, например, в [5].

Максимальная величина давления $p_{\max} = p_0$, согласно (1.8), приходится на окружность внутреннего радиуса $a = R$, где $\sin \varphi = -1$ ($\varphi = -\pi/2$); минимальное давление $p_{\min} = p_0((1 - \alpha)(1 + \alpha))^2$ — на окружность радиуса $a = R$, где $\sin \varphi = 1$ ($\varphi = \pi/2$). В зависимости от величины коэффициента α давление в указанных местах может различаться в несколько раз; с уменьшением α это различие уменьшается и в пределе, когда $\alpha \rightarrow 0$ ($a \rightarrow \infty$), давление стремится к постоянной величине $p = p_0$.

Отметим симметричность нагружения (1.8) верхней и нижней частей кругового сечения контура радиуса R .

2. Количество работ в области торондальных оболочек сравнительно невелико [6], что объясняется математическими трудностями, возникающими при решении соответствующих дифференциальных уравнений даже в простейших случаях нагружения. Во многих случаях эти трудности преодолеваются лишь с помощью ЭВМ. Однако, как показано в [3], для оценки напряженно-деформированного состояния оболочек, не в ущерб физической сущности задачи, можно использовать упрощенные уравнения так называемой безмоментной теории оболочек.

Согласно этой теории, широко применяемой в практических расчетах, в элементе торондальной оболочки вращения, нагруженной симметричной силой p (1.8), не зависящей от угла θ , касательные усилия $S = 0$, вследствие чего отсутствует относительный сдвиг кромок элемента ($\omega = 0$). Поэтому дифференциальные уравнения равновесия в усилиях упрощаются и принимают следующий вид [3] при наличии, как в нашем случае, лишь нормальной нагрузки p , (1.8):

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{dA_1 T_1}{dz} - T_1 \frac{dA_1}{dz} \right) = 0$$

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = p.$$
(2.1)

В системе уравнений (2.1) A_1, A_2 — параметры Ляме, причем для торондальной оболочки вращения по (1.1) $A_1 = R_1 \sin \varphi = a(1 + \alpha \sin \varphi)$, $A_2 = R_2 = R$; T_1, T_2 — нормальные усилия в элементе оболочки вдоль e_1 и e_2 , соответственно, $p_0 = p \frac{(1 - \alpha)^2}{(1 + \alpha \sin \varphi)^2}$.

Из системы (2.1) получим линейное дифференциальное уравнение относительно усилия T_2 :

$$\frac{dT_2}{dz} + T_2 \frac{1 + 2\alpha \sin \varphi}{1 + \alpha \sin \varphi} \operatorname{ctg} \varphi = p_0 R \frac{(1 - \alpha)^2}{(1 + \alpha \sin \varphi)^2} \operatorname{ctg} \varphi$$
(2.2)

решение которого в общем случае будет

$$T_2 = p_0 R \frac{(1 - \alpha)^2}{1 + \alpha \sin \varphi} \frac{\ln(1 + \alpha \sin \varphi) + C}{\alpha \sin \varphi}$$

где C — произвольная постоянная. Для ее определения используем условие конечных значений T_2 по всему круговому сечению тора радиуса R . При $\sin \varphi \rightarrow 0$ первое слагаемое в числителе выражения T_2 является конечной величиной, так как $\lim_{\sin \varphi \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \alpha \sin \varphi)}{\alpha \sin \varphi} = \ln \alpha = 1$;

второе же слагаемое стремится к бесконечности, ввиду чего следует принять $C = 0$. Таким образом, окончательно имеем

$$T_2 = p_0 R (1 - \alpha)^2 \frac{\ln(1 + \alpha \sin \varphi)}{\alpha \sin \varphi (1 + \alpha \sin \varphi)}$$
(2.3)

Используя (2.3) во втором уравнении системы (2.1), получим

$$T_1 = -p_0 R \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha \sin \varphi} \left[\frac{\ln(1 + \alpha \sin \varphi)}{\alpha \sin \varphi} - \frac{1}{1 + \alpha \sin \varphi} \right] \quad (2.4)$$

которое также является конечной величиной и при $\sin \varphi \rightarrow 0$, в чем легко убедиться, раскрыв соответствующую неопределенность, в результате чего придем к выражению $T_1|_{\sin \varphi \rightarrow 0} = -p_0 R (1-\alpha)^2 / 2$. Здесь следует отметить, что усилие T_1 является сжимающим по всему контуру сечения тора, что оказалось возможным при внутреннем давлении типа (1.8).

В существующих установках „Токамак“ коэффициент $\alpha < 0,4$. Это обстоятельство позволяет упростить формулы усилий T_1 (2.3), T_1 (2.4) в рамках принятой в теории оболочек погрешности $\sim 5\%$. Поэтому, ограничившись в указанных формулах лишь двумя членами разложения в ряд функции $\ln(1 + \alpha \sin \varphi) = -\alpha \sin \varphi - \frac{\alpha^2 \sin^2 \varphi}{2} + \frac{\alpha^3 \sin^3 \varphi}{3} - \dots$, получим упрощенные выражения усилий

$$T_1 = p_0 R \frac{(1-\alpha)^2}{2} \frac{2 + \alpha \sin \varphi}{1 + \alpha \sin \varphi}, \quad T_2 = -p_0 R \frac{(1-\alpha)^2}{2} \frac{1 - \alpha \sin \varphi}{1 + \alpha \sin \varphi} \quad (2.5)$$

удобные для инженерных расчетов.

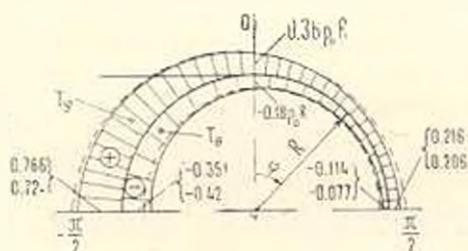
На фиг. 2 приведены значения усилий T_1 , T_2 , вычисленные при коэффициенте $\alpha = 0,4$ по формулам (2.3), (2.4) (показано пунктирной линией) и приближенным формулам (2.5). Ввиду симметричности нагружения показана лишь верхняя часть тора, то есть область

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

Для сравнения с (2.5) выведем формулы усилий

$$T_1 = \frac{p_0 R}{2} \frac{2 + \alpha \sin \varphi}{1 + \alpha \sin \varphi} \quad (2.6)$$

$$T_2 = \frac{p_0 R}{2} = \text{const}$$



Фиг. 2.

полученные В. И. Феодосьевым [7] по безмоментной теории в случае нагружения тороидальной оболочки постоянным внутренним давлением $p_0 = p_0 = \text{const}$. Из формул (2.5), независимо от величины α , следует, что усилие T_1 всегда является растягивающим, а T_2 — сжимающим, в то время как в случае постоянной нагрузки (2.6) оба усилия — растягивающие, что оказалось в полном соответствии с видом начальной нагрузки p_0 .

Действительно, если написать нагрузку $p_1 = p_0 \frac{(1-\alpha_1)^2}{(1 + \alpha_1 \sin \varphi)^2}$, где вместо коэффициента α в (1.8) принята другая постоянная α_1 , и ре-

шить с такой правой частью дифференциальное уравнение (2.2), то получим окружное усилие

$$T_{\varphi} = p_0 R \frac{(1 - \alpha_1)^2}{1 + \alpha \sin \varphi} \left[\frac{1 - \alpha/\alpha_1}{1 + \alpha_1 \sin \varphi} + \alpha \frac{\ln(1 + \alpha_1 \sin \varphi)}{\alpha_1^2 \sin \varphi} \right] \quad (2.7)$$

принимая конечные значения по всему контуру сечения тора. При $\alpha_1 = \alpha$ значение T_{φ} совпадает с (2.3). В приближенном виде

$$T_{\varphi} = p_0 R \frac{(1 - \alpha_1)^2}{2} \frac{2 + \alpha \sin \varphi - \alpha \alpha_1 \sin^2 \varphi}{(1 + \alpha \sin \varphi)(1 + \alpha_1 \sin \varphi)} \quad (2.8)$$

что также совпадает с T_{φ} по (2.5) при $\alpha_1 = \alpha$. Подставив (2.8) во второе уравнение системы (2.1), получим

$$T_1 = p_0 R \frac{(1 - \alpha_1)^2}{2} \frac{1 - 2\alpha_1\alpha + \alpha^2 \sin^2 \varphi}{(1 + \alpha_1 \sin \varphi)^2} \quad (2.9)$$

идентичное с T_1 по (2.5) при $\alpha_1 = \alpha$.

При $\alpha_1 = 0$, что соответствует постоянному внутреннему давлению $p_0 = p_1 = \text{const.}$ из (2.8), (2.9) получим формулы В. И. Феодосьева (2.6).

Таким образом, приведенные формулы усилий (2.5) и (2.6) лишней раз подтверждают роль начального вида нагрузки в тороидальной оболочке вращения.

3. Перейдем к определению деформаций. Здесь следует сказать, что приемы приближенного решения, куда входит и безмоментная теория, для определения перемещений в тороидальной оболочке неприменимы, по крайней мере, в окрестности точек $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ [3], где происходит изменение знака радиуса кривизны R_1 (1). В этих точках, в частности, нормальное перемещение $w \rightarrow \infty$, что лишено физического смысла.

Поэтому ограничимся рассмотрением лишь линейных деформаций, принимающих конечное значение соответственно усилиям T_{φ} , T_1 (ввиду симметричности нагрузки p (1.8) относительно оси вращения тора деформация сдвига $\omega = 0$). Выпишем эти соотношения для нашего случая нагружения [3]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi} &= \frac{\alpha \cos \varphi}{1 + \alpha \sin \varphi} \frac{v}{R} + \frac{\alpha \sin \varphi}{1 + \alpha \sin \varphi} \frac{w}{R} = \frac{1 - \nu^2}{Eh} (T_{\varphi} - \nu T_1) \\ \varepsilon_{\varphi} &= \frac{dv}{R d\varphi} + \frac{w}{R} = \frac{1 - \nu^2}{Eh} (T_{\varphi} - \nu T_1) \end{aligned} \quad (3.1)$$

где ε_{φ} — деформация вдоль e_{φ} , v и w — деформация и перемещение вдоль e_z , h — толщина стенки тороидальной оболочки вращения, изготовленной из изотропного материала с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν .

После подстановки упрощенных выражений усилий T_{φ} , T_1 (2.5) в соотношение (3.1), получим линейные деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi} &= p_0 R \frac{(1-\nu^2)(1-a)^2}{2Eh} \frac{2+\nu-(1+\nu)a \sin \varphi}{1+a \sin \varphi} \\ \varepsilon_{\theta} &= -p_0 R \frac{(1-\nu^2)(1-a)^2}{2Eh} \frac{1+2\nu-(1+\nu)a \sin \varphi}{1+a \sin \varphi} \end{aligned} \quad (3.2)$$

где числители и знаменатель выражений (3.2) всегда являются положительными величинами. Отсюда следует, что при нагрузке типа p (1.8), имеющей электромагнитное происхождение, в любой точке кругового сечения тора, в той или иной мере, всегда возникает удлинение ε_{θ} в окружном (меридиональном) направлении и сжатие ε_{φ} в тороидальном направлении.

Максимальные деформации получаются в точке $\varphi = -\pi/2$ ($\sin \varphi = -1$), наиболее близкой к оси вращения тора, где $\varepsilon_{\theta} = p_0 R \frac{(1-\nu^2)(1-a)}{2Eh} \times [2-\nu+(1+\nu)a]$, а $\varepsilon_{\varphi} = -p_0 R \frac{(1-\nu^2)(1-a)}{2Eh} [1+2\nu+(1+\nu)a]$; наименьшие деформации будут в наиболее удаленной от оси точке $\varphi = \pi/2$ ($\sin \varphi = 1$).

4. В заключение определим значения усилий (напряжений), возникающих под действием пондеромоторных сил в установках со сверхпроводящей обмоткой «Токамак-7».

Согласно физико-техническим характеристикам «Т-7», неполный перечень которых приведен в [2], большой радиус тора $a = 1,22$ м, средний радиус обмотки, который в нашем случае принимается за малый радиус оболочки, $R = 0,5$ м, так что коэффициент $\alpha = 0,5/1,22 = 0,41$. В «Т-7» силе тока $I = 4,8$ кА соответствует максимальная индукция магнитного поля на обмотке $B_z = 4$ тл, что, по-видимому, имеет место в наиболее напряженной точке тора $\varphi = -\pi/2$. Используя эти данные в соотношениях (1.6), (1.8) при $\mu = 1$, получим максимальное электромагнитное давление в точке $\varphi = -\pi/2$ $p_{\max} = p_0 = 124,2 \cdot 10^5$ Н/м² (123 атм) и минимальное — в точке $\varphi = \pi/2$ $p_{\min} = 21,2 \cdot 10^5$ Н/м² (21 атм), что почти в 6 раз меньше p_{\max} . По этим данным можно судить о значительности величин электромагнитного давления, их большого перепада по длине полуокружности тора, что требует особого внимания при прочностных расчетах некоторых конструктивных узлов тороидальной камеры в системах «Токамак».

По закону распределения внешней нагрузки p (1.8) фактически изменяются внутренние усилия T_{θ} , T_{φ} . В рассматриваемом случае наибольшие усилия, согласно (2.5), будут в точке $\varphi = -\pi/2$, где $T_{\theta} = 44,1 \cdot 10^3$ Н/м, а $T_{\varphi} = -25,8 \cdot 10^3$ Н/м. В этом наиболее напряженном месте тороидальной оболочки, даже приняв (из-за отсутствия достоверных данных) относительно большую толщину стенки $h = 1$ см ($h/R = 1/50$), получим меридиональное напряжение $\sigma_{\theta} = T_{\theta}/h$, равным $\sigma_{\theta \max} = 44,1 \cdot 10^7$ Н/м² или 4500 кг/см², и окружное напряжение $\sigma_{\varphi \max} = -25,8 \cdot 10^7$ Н/м² (или -2630 кг/см²). Учитывая, что предел прочности

закаленной стали марки 30 или 45 $\sigma_{pr} \approx 11000 \text{ кг/см}^2$, можно сделать заключение об огромных величинах механических напряжений, возникающих в отдельных узлах „Токамак“.

Автор благодарен М. В. Белубекяну, Л. А. Агаловяну и Л. А. Морсиану за полезное обсуждение некоторых вопросов в данной работе.

ՀՈՍԱՆՔԱՏԱՐ ՏՈՐՈՒԴԱԼ ԹԱՂԱՆԹԻ ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ
ՐԻՌԻ ԵՎ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԳԵՆՈՐՄԱՅԻՌՆԻ ՎԻՃԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Ռ Ն ՆՈՎԱԿԻՄՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Տորոիդալ թաղանթի համար որոշվում են էլեկտրամագնիսական ճիգերը, որոնք հանդիսանում են կոճով անցնող հոսանքի և սեփական մագնիսական դաշտի փոխազդեցության արդյունք:

Թաղանթների անժոճենտ տեսության հիման վրա ուսումնասիրվում է նոսանքաւար ստորիդալ թաղանթի լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակը: Վերջինս հանդիսանում է «Տոկամակ» սարքվածքի հիմնական հանգույցը:

Բերված են արաչացող ճիգերի թվային արժեքները:

ABOUT AN ELECTROMAGNETIC LOAD AND THE STRESS-
STRAIN STATE OF A CURRENT-CARRYING TOROIDAL SHELL

R. N. OVAKIMIAN

S u m m a r y

The external electromagnetic load is determined. On the basis of membrane theory the expressions of strengths and deformations in current-carrying toroidal shell are obtained, which are applied in the "Tokamac" system.

ЛИТЕРАТУРА

1. Атомная наука и техника в СССР. М.: Атомиздат, 1977.
2. Иванов Д. П. «Т-7» — первый токамак со сверхпроводящими обмотками. Природа, 1978, 12.
3. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромиздат, 1962.
4. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М.: Гостехиздат, 1957.
5. Дайников Н. И. Определение магнитного поля токов, текущих по поверхности тороидальной оболочки. ЖТФ, 1964, т. 34, вып. 10.
6. Булакоков В. Н. Статика тороидальных оболочек. Киев.: Изд. АН УССР, 1962.
7. Феодосьева В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1973.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
25 VI. 1982