

НЕКОТОРЫЕ СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ НЕОДНОРОДНО-СТАРЕЮЩИХ СРЕД

АЛЕКСАНДРОВ В. М., КОВАЛЕНКО Е. В., МАНЖИРОВ А. В.

В настоящей работе даются решения некоторых плоских (случай плоской деформации) смешанных задач теории ползучести неоднородно-стареющих сред. Процессы неоднородного старения связаны с технологией возведения и изготовления реальных конструкций. Такие процессы происходят при последовательном возведении объектов из стареющих материалов (бетон, древесина, полимеры, композиты) — случай естественного старения, а также при действии на эти объекты облучения, температуры и т. д. — искусственное старение.

Рассмотрены контактные задачи для многослойных неоднородно-стареющих вязкоупругих оснований в предположении, что верхний слой — тонкий¹ неоднородно-стареющий, а нижний, толщины H , — однородно-стареющий, жестко или шарнирно заземленный по основанию.

Смешанные задачи приведены к интегральному уравнению второго рода относительно контактных напряжений, содержащему операторы Фредгольма и Вольтерра. Получены разложения для основных характеристик явления. Изучены случаи искусственного и естественного старения многослойного пакета. Приведены числовые расчеты характерных величин

1. Рассмотрим контактные задачи о вдавливании без трения силой P , эксцентриситет приложения которой относительно центра линии контакта равен e , жесткого штампа в поверхность неоднородно-стареющего вязкоупругого тонкого слоя: 1) лежащего без трения на поверхности однородно-стареющего слоя толщины H ; 2) сцепленного с поверхностью неоднородно-стареющего вязкоупругого стержневого основания ($-l \leq x_1 \leq 0$), которое в свою очередь подстилается однородно-стареющим слоем толщины H (фиг. 1). При этом нижний слой (2) покоится на недеформируемом основании, а вне штампа поверхность верхнего слоя (1) не нагружена. Кроме того, в силу условия контакта при $x_2 = h$ под штампом

$$u_2^1 = -[\delta(t) + \alpha(t)x_1 - g(x_1)] \quad (|x_1| < a) \quad (1.1)$$

где $\delta(t) + \alpha(t)x_1$ — жесткое перемещение штампа под действием силы P и момента $M = Pe$, $g(x_1)$ — форма основания штампа.

Исследуем вспомогательные задачи о равновесии тонкого неоднородно-стареющего слоя ($|x_1| < \infty$, $0 \leq x_2 \leq h$) при краевых условиях

¹ Слой будем считать тонким, если длина участка его активного нагружения велика по сравнению с толщиной слоя.

$$1') \quad x_2 = h: \quad \sigma_{12}^1 = 0, \quad \sigma_{22}^1 = -q^*(x_1, t) \quad (1.2)$$

$$x_2 = 0: \quad \sigma_{12}^1 = 0, \quad u_2^1 = B\sigma_{22}^1$$

$$2') \quad x_2 = h: \quad \sigma_{12}^1 = 0, \quad \sigma_{22}^1 = -q^*(x_1, t) \quad (1.3)$$

$$x_2 = 0: \quad u_1^1 = 0, \quad u_2^1 = B\sigma_{22}^1$$

где B — некоторый линейный оператор, вид которого будет указан ниже.

Приближенные решения краевых задач (1.2), (1.3) запишутся в виде (их можно получить на основе [1, 2])

$$1') \quad \sigma_{11}^1 = 0, \quad \sigma_{12}^1 = 0, \quad \sigma_{22}^1 = -q^*(x_1, t) \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_{22}^1 = -\frac{1-\nu_1^2}{E_1} (I - L_1) q^*(x_1, t)$$

$$2') \quad \sigma_{11}^1 = -\nu_1(1-\nu_1)^{-1} q^*(x_1, t) \quad (1.5)$$

$$\sigma_{22}^1 = -q^*(x_1, t)$$

$$\sigma_{12}^1 = -\nu_1(1-\nu_1)^{-1} (h-x_2) [q^*(x_1, t)]_x$$

$$\varepsilon_{22}^1 = -\frac{1-\nu_1-2\nu_1^2}{(1-\nu_1)E_1} (I - L_1) q^*(x_1, t)$$

$$L_1 \varphi(x, t) =$$

$$= \int_0^t \varphi(x, \tau) K_1(t+x(x_2), \tau+x(x_2)) d\tau$$

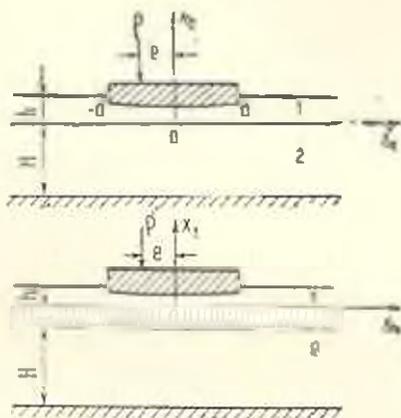
$$K_1(t, \tau) = E_1 \frac{\partial}{\partial \tau} C_1(t, \tau)$$

где I — тождественный оператор, E_1 — модуль упруго-мгновенной деформации, $K_1(t, \tau)$ — ядро ползучести, $C_1(t, \tau)$ — мера ползучести при простом растяжении, $x(x_2)$ — функция неоднородного старения, $\nu_1 = \text{const}$ — коэффициент Пуассона.

Удовлетворяя с помощью (1.4), (1.5) четвертым краевым условиям (1.2) и (1.3), будем иметь при $x_2 = h$

$$1') \quad u_2^1 = -\frac{1-\nu_1^2}{E_1} h \left\{ q^*(x_1, t) - \int_0^t q^*(x_1, \tau) \frac{1}{h} \int_0^h K_1[t+x(x_2), \tau+x(x_2)] dx_2 d\tau \right\} - Bq^*(x_1, t) \quad (1.6)$$

$$2') \quad u_2^1 = -\frac{1-\nu_1-2\nu_1^2}{(1-\nu_1)E_1} h \left\{ q^*(x_1, t) - \int_0^t q^*(x_1, \tau) \frac{1}{h} \int_0^h K_1[t+x(x_2), \tau+x(x_2)] dx_2 d\tau \right\} - Bq^*(x_1, t) \quad (1.7)$$



Фиг. 1.

Для однородно-старяющегося слоя (2) в случае плоской деформации с помощью принципа соответствия в линейной теории ползучести стареющих сред [3] и результатов монографии [4] при 1') $x_2 = 0$ и 2') $x_2 = -l$ имеем

$$u_2^1 = \frac{1}{\pi\theta_2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{22}^1 \Big|_{x_2=0}^{x_2=-l} k\left(\frac{\xi-x_1}{H}\right) \left[1 - \int_{\tau_1}^t K_2(t-\tau_1, \tau-\tau_1) \right] d\tau d\xi \right\} \quad (1.8)$$

$$k(z) = \int_0^{\infty} N(\xi) \cos \xi z d\xi$$

$$1') \theta_2 = E_2 [2(1-\nu_2^*)]^{-1}, \quad 2') \theta_2 = 2E_2(1-\nu_2)[(1+\nu_2)(3-4\nu_2)]^{-1}$$

где τ_1 — момент изготовления элементов нижнего слоя.

Известно [4], что:

1. Функция $N(\xi)$ — непрерывна, вещественна и четна на действительной оси;

$$2. \quad N(\xi) > 0 \quad (|\xi| < \infty) \quad (1.9)$$

$$3. \quad N(\xi)\xi = A_1\xi + O(\xi^3) \quad (\xi \rightarrow 0), \quad N(\xi)\xi = 1 + O(\exp(-A_2\xi)) \quad (\xi \rightarrow \infty)$$

$$A_1, A_2 = \text{const}$$

Учитывая в задаче 2), что по толщине стержневого слоя ($u_x^1 = 0$) σ_{22}^1 не изменяется по x_2 , найдем при $x_2 = 0$

$$u_2^1 = \frac{1-\sigma-2\sigma^2}{1-\sigma} (I-L^c) l \frac{\sigma_{22}^1}{E^c} + \frac{1}{\pi\theta_2} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{22}^1 k\left(\frac{\xi-x_1}{H}\right) \left[1 - \int_{\tau_1}^t K_2(t-\tau_1, \tau-\tau_1) \right] d\tau d\xi \quad (1.10)$$

где величины и операторы имеют вид (1.5) с индексом, соответствующим стержневому основанию, а σ — коэффициент Пуассона этого основания.

Подставляя в соотношения (1.6), (1.7) при $|x_1| \leq a$ функции $q^*(x_1, t) = q(x_1, t)$, u_2^1 в форме (1.1) и полагая в них согласно (1.8), (1.10)

$$1') \quad B(\dots) = \frac{1}{\pi\theta_2} \int_{-\infty}^{\infty} (\dots) k\left(\frac{\xi-x_1}{H}\right) \left[1 - \int_{\tau_1}^t K_2(t-\tau_1, \tau-\tau_1) \right] d\tau d\xi$$

$$2') \quad B(\dots) = \frac{1-\sigma-2\sigma^2}{1-\sigma} (I-L^c)(\dots) l \frac{1}{E^c} +$$

$$+ \frac{1}{\pi\theta_2} \int_{-\infty}^{\infty} (\dots) k\left(\frac{\xi-x_1}{H}\right) \left[1 - \int_{\tau_1}^t K_2(t-\tau_1, \tau-\tau_1) \right] d\tau d\xi$$

получим интегральные уравнения для определения неизвестных под штампом контактных давлений

$$1^{\circ) \quad \frac{h}{2\theta_1} \left\{ q(x_1, t) - \frac{1}{h} \int_{\tau_0}^t q(x_1, \tau) \int_0^h K_1[t + x(x_2), \tau + x(x_2)] dx_2 d\tau \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\pi\theta_2} \int_{-a}^a q(\xi, \tau) k\left(\frac{\xi - x_1}{H}\right) \left[1 - \int_{\tau_0}^t K_2(t - \tau_1, \tau - \tau_1) \right] d\tau d\xi = \quad (1.11)$$

$$= \delta(t) + \alpha(t) x_1 - g(x_1) \quad \left(|x_1| \leq a, \tau_0 \leq t \leq T < \infty, \theta_1 = \frac{E_1}{2(1 - \nu_1^2)} \right)$$

$$2^{\circ) \quad \frac{h}{2\theta_1} \left\{ q(x_1, t) - \frac{1}{h} \int_{\tau_0}^t q(x_1, \tau) \int_0^h K_1[t + x(x_2), \tau + x(x_2)] dx_2 d\tau \right\} +$$

$$+ \frac{l}{2\theta^e} \left\{ q(x_1, t) - \frac{1}{l} \int_{-l}^0 q(x_1, \tau) \int_{-l}^0 K^e[t + x^e(x_2), \tau + x^e(x_2)] dx_2 d\tau \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\pi\theta_2} \int_{-a}^a q(\xi, \tau) k\left(\frac{\xi - x_1}{H}\right) \left[1 - \int_{\tau_0}^t K_2(t - \tau_1, \tau - \tau_1) \right] d\tau d\xi = \quad (1.12)$$

$$= \delta(t) + \alpha(t) x_1 - g(x_1) \quad \left(|x_1| \leq a, \tau_0 \leq t \leq T < \infty, \right.$$

$$\left. \theta_1 = \frac{E_1(1 - \nu_1)}{2(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2)}, \theta^e = \frac{E^e(1 - \nu)}{2(1 - \nu - 2\nu^2)} \right)$$

К уравнениям (1.11), (1.12) необходимо еще добавить условия статики

$$P = \int_{-a}^a q(x_1, t) dx_1, \quad M = Pe = \int_{-a}^a x_1 q(x_1, t) dx_1, \quad (1.13)$$

выражающие условия равновесия штампа на основании.

Поскольку решения уравнений (1.11), (1.12) математически эквивалентны, то в дальнейшем приведем исследование только интегрального уравнения (1.11). Кроме того, будем рассматривать только четный вариант ($\alpha(t) \equiv 0$, $g(x_1)$ — четная функция поставленной задачи), имея в виду, что для нечетного случая все может быть проделано аналогично.

С учетом обозначений

$$\xi^* = \xi a^{-1}, \quad x^* = x_1 a^{-1}, \quad t^* = t \tau_0^{-1}, \quad T^* = T \tau_0^{-1}, \quad c = 0,5\pi h a^{-1} \theta_2 \theta_1^{-1}$$

$$x^*(x_2) = x(x_2) \tau_0^{-1}, \quad q^*(x^*, t^*) = \theta_2^{-1} q(x_1, t), \quad g^*(x^*) = a^{-1} g(x_1)$$

$$E_j C_j(t, \tau) = C_j^*(t^*, \tau^*), \quad K_j^*(t^*, \tau^*) = \frac{\partial}{\partial \tau^*} C_j^*(t^*, \tau^*) \quad (j = 1, 2)$$

$$\lambda = H a^{-1}, \quad \delta^*(t^*) = a^{-1} \delta(t), \quad P^* = (a \theta_2)^{-1} P, \quad \tau_1^* = \tau_1 \tau_0^{-1}$$

(звездочку далее опустим), получим

$$c \left[q(x, t) - \int_1^t q(x, \tau) \bar{K}_2(t, \tau) d\tau \right] + \int_{-1}^1 q(\xi, t) k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi - \\ - \int_1^t K_2(t-\tau_1, \tau-\tau_1) \int_{-1}^1 q(\xi, \tau) k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi d\tau = \pi [\delta(t) - g(x)] \quad (1.14) \\ (|x| \leq 1, 1 \leq t \leq T < \infty)$$

$$\bar{K}_2(t, \tau) = \frac{1}{h} \int_0^h K_1[t + x(x_0), \tau + x(x_0)] dx_0$$

$$P = \int_{-1}^1 q(x, t) dx \quad (1.15)$$

Заметим, что при $t = 1$ уравнение (1.14) и условие (1.15) принимают известный [5] вид

$$cq(x, 1) + \int_{-1}^1 q(\xi, 1) k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi [\delta(1) - g(x)] \quad (|x| \leq 1) \quad (1.16)$$

$$P = \int_{-1}^1 q(x, t) dx$$

В силу соотношений (1.9) и результатов работы [5] можно утверждать:

1. Оператор

$$Rq = \int_{-1}^1 q(\xi) k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi \quad (1.17)$$

является самосопряженным, вполне непрерывным и положительно определенным оператором, действующим из $L_2(-1, 1)$ в $L_2(-1, 1)$;

2. Характеристические числа β_i оператора (1.17) вещественны, положительны и $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_i < \dots$, $\beta_i \sim i(\ln i)^{-1}$;

3. Если функция $g(x) \in L_2(-1, 1)$, то решение интегрального уравнения (1.16) в пространстве $L_2(-1, 1)$ существует и единственно при любых значениях параметров $c, \lambda \in (0, \infty)$.

4. Перейдем теперь к построению решения уравнения (1.14) при условии (1.15). В соответствии с алгоритмом, изложенным в [6, 7], наряду с (1.14) рассмотрим эквивалентное ему интегральное уравнение

$$\begin{aligned}
& c \left| q(x, t) - q(x, 1) - \int_1^t q(x, \tau) \bar{K}_1(t, \tau) d\tau \right| + \\
& + \left| \int_{-1}^1 [q(\xi, t) - q(\xi, 1)] k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi - \int_1^t K_2(t - \tau_1, \tau - \tau_1) \times \right. \\
& \times \left. \int_{-1}^1 q(\xi, \tau) k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi d\tau \right| = \pi [\delta(t) - \delta(1)] (|x| \leq 1, 1 \leq t \leq T < \infty)
\end{aligned} \quad (2.1)$$

и будем искать его решение в форме

$$q(x, t) = q_0(x) + \sum_{i=1}^{\infty} z_i(t) q_i(x) \quad (2.2)$$

$$\delta(t) = \delta y(t) + \delta_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i y_i(t) \quad (2.3)$$

где δ, δ_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) — постоянные.

Подставляя (2.2), (2.3) в уравнение (2.1), получим

$$\begin{aligned}
& c q_0(x) \int_1^t \bar{K}_1(t, \tau) d\tau + \int_1^t K_2(t - \tau_1, \tau - \tau_1) \times \\
& \times \int_{-1}^1 q_0(\xi) k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi d\tau = \pi \delta [y(1) - y(t)]
\end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
& \int_1^t z_i(\tau) [K_2(t - \tau_1, \tau - \tau_1) + \alpha_i c \bar{K}_1(t, \tau)] d\tau = \\
& = (1 + \alpha_i c) [z_i(t) - z_i(1)]
\end{aligned} \quad (2.5)$$

$$y_i(t) - y_i(1) = z_i(t) - z_i(1) - \int_1^t z_i(\tau) K_2(t - \tau_1, \tau - \tau_1) d\tau \quad (2.6)$$

$$\alpha_i R q_i = q_i + \pi \alpha_i \delta_i \quad (2.7)$$

$$|x| \leq 1, 1 \leq t \leq T < \infty, i \geq 1$$

Напомним, что с учетом [3]

$$C_2(t, \tau) = \varphi_2(\tau) f(t - \tau)$$

$$\bar{C}_1(t, \tau) = \frac{1}{h} f(t - \tau) \int_0^h \varphi_1(\tau + x(x_2)) dx_2 = \bar{\varphi}_1(\tau) f(t - \tau)$$

откуда перепишем (2.4) в форме

$$\begin{aligned}
 c q_0(x) \bar{C}_1(t, 1) + C_0(t - \tau_1, 1 - \tau_1) \int_{-1}^1 q_0(\xi) k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \\
 = \pi \delta[y(t) - y(1)]
 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Полагая в (2.8)

$$y(t) = \bar{C}_1(t, 1), \quad y(1) = 0, \quad F = \varphi_1(1 - \tau_1) \varphi_1^{-1}(1) \quad (2.9)$$

найдем $q_0(x)$ из следующего интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$c q_0(x) + F \int_{-1}^1 q_0(\xi) k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi \delta(|x| \leq 1) \quad (2.10)$$

метод решения которого детально изложен в [5].

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма (2.7) и будем искать его решение в виде ряда Фурье по ортонормированной на отрезке $[-1, 1]$ системе полиномов Лежандра, составляющей базис [8] в $L_2(-1, 1)$

$$q_i(x) = \pi |2\tau_i \delta_i| \sum_{j=0}^{\infty} a_j^i P_{2j}^0(x), \quad P_j^0(x) = \sqrt{\frac{1-2j}{2}} P_j(x) \quad (2.11)$$

Разлагая ядро (2.10) в двойной ряд по указанной системе многочленов

$$k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} r_{mn}(t) P_{2m}^0(\xi) P_{2n}^0(x) \quad (2.12)$$

и подставляя (2.11), (2.12) в (2.7) с учетом ортогональности полиномов Лежандра, получим (δ_j — символ Кронекера)

$$\tau_i \sum_{j=0}^{\infty} r_{nj}(t) a_j^i = a_n^i + \delta_{2n}, \quad (i \geq 1, n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.13)$$

Согласно неравенству

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} r_{mn}^2(t) = A < \infty, \quad A = \text{const}$$

вытекающему из (1.9), (1.17), можно утверждать, что оператор, стоящий в левой части (2.13), действует из полного пространства квадратично суммируемых последовательностей l_2 в l_2 при любых значениях $\lambda \in (0, \infty)$ и является там вполне непрерывным; а тогда, если основной определитель системы (2.13) Δ отличен от нуля, то к ней применима теорема Гильберта [8] о ее разрешимости.

Легко показать, что в силу $P = \text{const}$

$$a_0^i = 0 \quad (i \geq 1), \quad P = \int_{-1}^1 q_0(x) dx \quad (2.14)$$

Это условие служит для определения неизвестных величин a_i . Действительно, из системы (2.13) имеем $a_0 = \Delta_1 \Delta^{-1}$, где Δ_1 — вспомогательный определитель, получающийся из основного заменой в нем первого столбца элементами $\{1, 0, 0, \dots, 0, \dots\}$. Определитель Δ_1 — симметричный, поэтому корни его $a = a_i$ ($i \geq 1$) вещественны. Подставляя a_i в систему (2.13), найдем a'_j ($j = 1, 2, \dots$) и, таким образом, построим последовательность функций $\{q_i(x) = (\sqrt{2} a_i \delta_i)^{-1}\}$.

Удовлетворим теперь выбором счетного множества постоянных δ_i и $z_i(1)$ ($i \geq 1$) интегральному уравнению (2.18). Предполагая, что $g(x) \in L_2(-1, 1)$, представим ее в виде

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n P_n^*(x), \quad (g_n) \in l_2 \quad (2.15)$$

Подставляя (2.12), (2.15) в (1.16), получим

$$cX_j + \sum_{n=0}^{\infty} r_{jn} X_n = \pi [\sqrt{2} \delta(1) \delta_{0j} - g_j] \quad (j = 0, 1, \dots) \quad (2.16)$$

$$X_j = \int_{-1}^1 q(x, 1) P_{2j}^*(x) dx \quad (2.17)$$

Решив бесконечную алгебраическую систему (2.16), из соотношения (2.17) с учетом формулы

$$q(x, 1) = q_0(x) + \pi \sqrt{2} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \delta_i z_i(1) \sum_{j=0}^{\infty} a'_j P_{2j}^*(x)$$

будем иметь

$$Dz(1) = b, \quad b \in l_2^n \quad (2.18)$$

$$D = \pi \sqrt{2} [a_i \delta_i a'_j], \quad b = \left\{ X_j - \int_{-1}^1 q_0(x) P_{2j}^*(x) dx \right\}, \quad z(1) = \{z_i(1)\}$$

$$(i = 1, 2, \dots; j = 0, 1, 2, \dots)$$

Остановимся подробнее на решении системы (2.18). Во-первых, принимая во внимание результаты работы [9], можно утверждать, что $\beta_{2i} < \alpha_i < \beta_{2i+2}$ ($i \geq 1$). Во-вторых, полагая $\delta_i = \alpha_i^{-3/2}$ (будет обосновано ниже), в силу (2.13)

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} [a_i \delta_i a'_j]^2 < \infty$$

то есть оператор D является вполне непрерывным из l_2 в l_2 .

Элемент $z(1) \in M$ (множество равномерно ограниченных и равномерно непрерывных в l , последовательностей) назовем квазирешением [10—12] уравнения (2.18) на M , если

$$\inf \{ \|Dz(1) - b\|_l : z(1) \in M \}$$

Наряду с (2.18) введем урезанную систему

$$D^* z^*(1) = b^* \quad (2.19)$$

$$D^* = \pi \{ 2^{-1} [z, \delta, a; j], \quad b^* = \left\{ X_j - \int_{-1}^1 q_0(x) P_{2j}^*(x) dx \right\}, \quad z^*(1) = [z, (1)]$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

Доказано [11, 12], что если оператор D^{-1} (не обязательно ограниченный) существует, то квазирешение уравнения (2.18) на компакте M также существует, единственно и непрерывно зависит от правой части b . Кроме того,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z(1) - z^*(1)\|_l = 0$$

а $z^*(1)$ в (2.19) может быть найдено, например, методом работы [10].

Заметим, что в системе (2.16) $\delta(1)$ можно считать независимым от δ , ($i \geq 1$), ибо

$$\delta(1) = \delta_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i y_i(1)$$

и определяется в ходе решения задачи через значение вдавливающей силы P . Связь между величинами P и δ находится из соотношений (2.10), (2.14).

Зная $z_i(1)$, можем найти $z_i(t)$ из интегрального уравнения Вольтерра второго рода (2.5). В случае, когда $f(t-\tau) = 1 - \exp(-\tau(t-\tau))$, $z_i(t)$ запишем в форме

$$z_i(t) = z_i(1) \left[1 + \int_0^t R_i(t, \tau) d\tau \right] \quad (2.20)$$

где $R_i(t, \tau)$ — резольвента ядра Н. Х. Арутюняна

$$H_i(t, \tau) = \frac{1}{1 + c\alpha_j} \frac{\delta}{d\tau} \{ [\varphi_2(\tau - \tau_1) + c\alpha_j \bar{\varphi}_k(\tau)] (1 - \exp(-\tau(t - \tau))) \}$$

вид которой приведен в [3].

Наконец, используя соотношение (2.6), построим последовательность функций $\{y_i(t)\}$

$$y_i(t) = z_i(t) + z_i(1) C_2(t - \tau_1, 1 - \tau_1) + \int_0^t z_i(\tau) C_2(t - \tau_1, \tau - \tau_1) d\tau, \quad y_i(1) = z_i(1) \quad (2.21)$$

а вместе с тем и решение поставленной задачи $q(x, t)$ и $\delta(t)$.

Для окончательного обоснования построенного решения следует доказать сходимость рядов (2.2), (2.3), а также линейную независимость системы функций $\{y_i(t)\}$. Последнее условие должно проверяться непосредственно, используя формулы (2.20), (2.21). Отметим только, что в рассматриваемом нами случае оно выполняется.

Теорема. Ряд (3.2) сходится в $L_2(-1, 1)$ равномерно по t на сегменте $[1, T]$ и определяет обобщенное решение уравнения (2.1).

Действительно, оценим остаток ряда

$$S = \left| \sum_{n=j}^{\infty} z_n(t) q_n(x) \right|_{L_2(-1, 1)} \leq \sum_{m, n=j}^{\infty} z_n(t) z_m(t) (q_m, q_n)_{L_2(-1, 1)}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} (q_i, q_j)_{L_2(-1, 1)} &= \frac{2\pi^2}{V \alpha_i \alpha_j} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^i a_n^j \leq \\ &\leq \frac{2\pi^2}{V \alpha_i \alpha_j} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (a_n^i)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^j)^2 \right]^{1/2} \leq \frac{2\pi^2}{V \alpha_i \alpha_j} A_j \\ A_j &= \text{const}; \quad i, j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

то

$$S \leq 2\pi^2 A_j \sum_{n=j}^{\infty} |\alpha_n^{-1/2} z_n(t)| \sum_{m=j}^{\infty} |\alpha_m^{-1/2} z_m(t)| < \varepsilon \quad (j \rightarrow \infty) \quad (2.22)$$

где ε — сколь угодно малое число. Здесь использовано замечание о поведении z_i при $i \rightarrow \infty$ и факт ограниченности $z_i(t) [z_i(1)]^{-1}$.

Если выполнено неравенство (2.22), то ряд (2.2) сходится в $L_2(-1, 1)$ равномерно по $t \in [1, T]$ и согласно [13] определяет обобщенное решение уравнения (2.1).

Равномерная сходимость ряда (2.3) следует из поведения δ_i при $i \rightarrow \infty$ и формул (2.6) и (2.20).

3. Пусть теперь

$$\varphi_1[\tau + x(x_2)] = C_0 + C_1 \exp(-\beta[\tau + x(x_2)])$$

тогда

$$\bar{\varphi}_1(\tau) = C_0 + C_1 u \exp(-\beta\tau), \quad u = \frac{1}{h} \int_0^h \exp(-\beta v(x_2)) dx_2$$

Допустим $x(x_2) \geq 0$, то есть возраст верхнего слоя растет по высоте, что происходит, если слой подвержен влиянию внешних воздействий: облучение, температура и т. д. В этом случае $0 < \mu < 1$. Если $x(x_2) \leq 0$, то есть возраст слоя уменьшается по высоте, что соответствует процессу возведения верхнего слоя на нижнем, то $1 \leq \mu < \exp(\beta)$. Таким образом, изменяя параметр μ в указанных пре-

делах, можно построить решение поставленной задачи для любых функций $x(x_2)$.

В качестве иллюстрации предложенного алгоритма приведем решение поставленной задачи в случае: $g(x) \equiv 0$ — штамп имеет плоское основание; $e = x(t) = 0$; $P = 1$; $l = 6$; $c = 0,5$; $C_0 = 0,5522$; $C_1 = 4$; $\varphi_1(\tau) = \varphi_2(\tau)$; $\tau_1 = 0$;

$$N(\xi) = \frac{\text{ch } 2\xi - 1}{\xi (\text{sh } 2\xi + 2\xi)} \quad (3.1)$$

Задание $N(\xi)$ в виде (3.1) соответствует случаю, когда нижний слой лежит без трения на жестком основании.

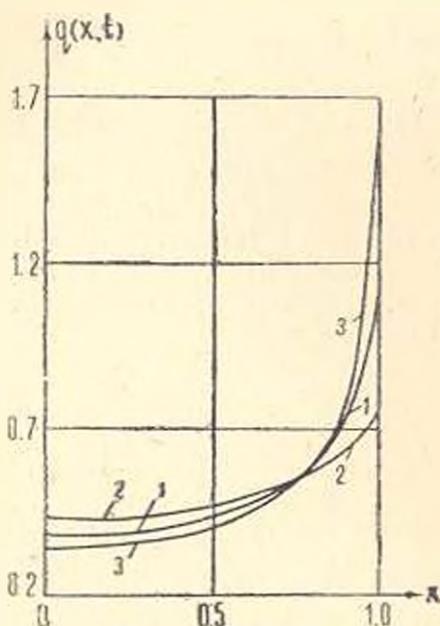
1) Случай естественного старения: $1 \leq \mu \leq \exp(\beta)$;

$$\beta = 2,325; \gamma = 4,5; \tau_0 = 75 \text{ сут}$$

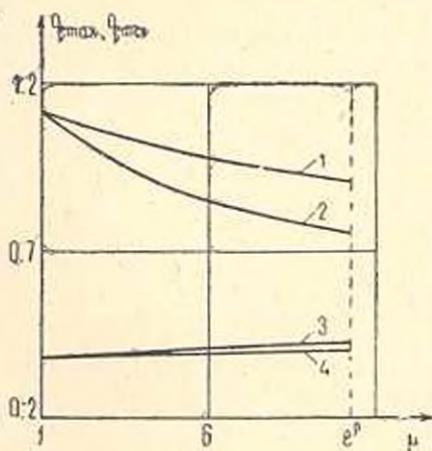
2) Случай искусственного старения: $0 < \mu < 1$;

$$\beta = 0,31; \gamma = 0,6; \tau_0 = 10 \text{ сут}$$

На фиг. 2 приведены графики распределения контактных давлений в зависимости от x , t и параметра неоднородного старения μ : $t = 1$ (кривая 1) — для любых значений μ (упругое решение); $t = 2$, $\mu = 10$ (кривая 2) — естественное старение; $t = 11$, $\mu = 0,1$ (кривая 3) — искусственное старение.



Фиг. 2.



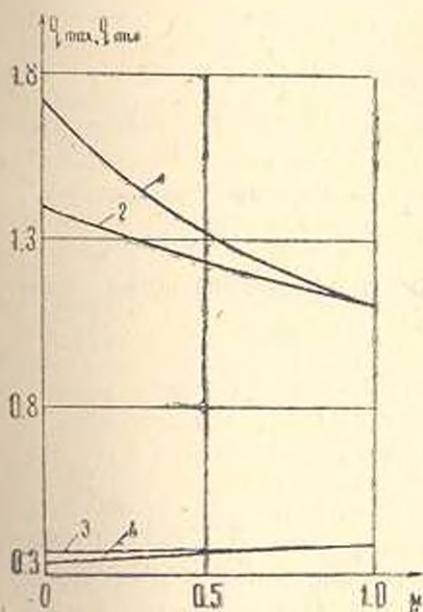
Фиг. 3.

На фиг. 3 изображены зависимости между $q_{\max}(t, \mu) = q(1, t, \mu)$, $q_{\min}(t, \mu) = q(0, t, \mu)$ и μ при различных фиксированных значениях t для случая 1) ($q_{\max}(1,05, \mu) - (1)$, $q_{\max}(2, \mu) - (2)$, $q_{\min}(2, \mu) - (3)$,

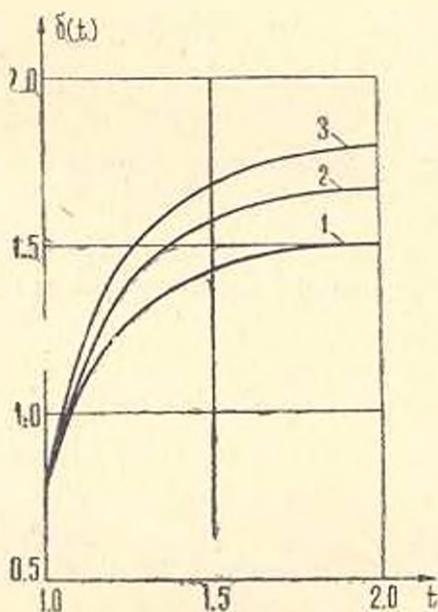
$q_{\min}(1,05, \mu) - (4)$). Можно заметить, что с ростом параметра μ максимальные контактные давления уменьшаются, а минимальные увеличиваются.

Для варианта искусственного старения — фиг. 4 ($q_{\max}(11, \mu) - (1)$, $q_{\max}(1,5, \mu) - (2)$, $q_{\min}(1,5, \mu) - (3)$, $q_{\min}(11, \mu) - (4)$) с уменьшением параметра неоднородного старения μ от 1 до 0 максимальные нормальные контактные напряжения будут расти, а минимальные уменьшаться.

Зависимости $\delta(t)$ при фиксированных значениях μ для двух исследуемых случаев приведены на: 1) фиг. 5 ($\mu = 1 - (1)$, $\mu = 6 - (2)$, $\mu = 10 - (3)$); 2) фиг. 6 ($\mu = 1 - (1)$, $\mu = 0,5 - (2)$, $\mu = 0,05 - (3)$). Видно, что с ростом времени t функция $\delta(t)$ возрастает и стремится к предельному значению, которое тем больше, чем больше параметр μ .



Фиг. 4.



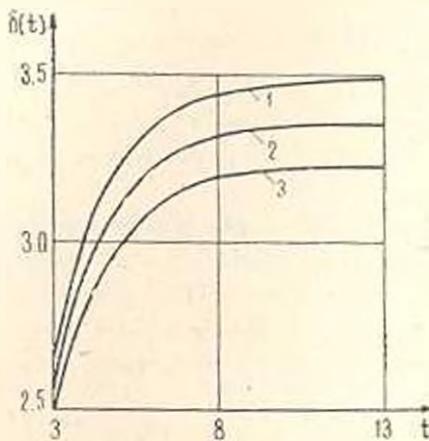
Фиг. 5.

Замечание. Исследуем предельные случаи изменения параметра неоднородного старения μ . Пусть $\mu = 1$. Тогда, если слой изготовлен из одного материала и $\tau_1 = 0$, а сила, действующая на штамп с плоским основанием от времени не зависит, получим, что распределение давлений под штампом будет таким же, как в аналогичной упругой задаче, то есть ползучесть в этом случае не оказывает влияния на распределение контактных напряжений.

Пусть $\mu = 0$. Тогда верхний слой будет работать по типу основания, модель которого подчиняется закону линейной наследственности Вольтерра [14].

Кроме того, как нетрудно заметить, изменяя другие физико-механические параметры основания, из решения (2.2), (2.3) поставленной задачи

можно получить решения аналогичных задач теории упругости и линейной наследственной ползучести.



Фиг. 6.

Вариант $\mu = \exp(\beta)$ соответствует случаю кусочно-однородного старения рассматриваемого основания.

Авторы благодарны Н. Х. Арутюняну за внимание к работе.

ԱՆՀԱՄԱՐԱՆԻ ԹԵՐԱՑՈՂ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՍՈՂՔԻ ՏՆՍՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇ ԿԱՌԷ ԿՆՒՐՆԵՐ

Վ. Մ. ԱԼԵՔԱՆԴՐՈՎ, Ե. Վ. ԿՈՎԱԼԵՆՈ, Ա. Վ. ՄԱՆՃԵՐՈՎ

Ա մ փ ո փ ո մ

Տրված են անհամասեռ ձերացող սողքի տեսության որոշ հարթ խնդիրների լուծումները: Դիտարկված են անհամասեռ ձերացող առաձգամածուցիկ բազմաշերտ հիմքի համար կոնտակտային խնդիրներ այն ենթադրությամբ, որ վերին շերտի հաստությունը բավականաչափ փոքր է կոնտակտի մասի երկարությունից: Խառը խնդիրները բերված են կոնտակտային լարումների նկատմամբ Ֆրեդհոլմի և Վոլտերայի օպերատորներ պարունակող երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման: Ստացված են երևույթի հիմնական բաղադրիչների համար վերլուծություններ, որոնք ճիշտ են ժամանակի փոփոխության ամբողջ միջակայքում: Ուսումնասիրված են բազմաշերտ փաթեթի արհեստական և բնական ձերացման դեպքեր: Բերված են բնութագրիչ մեծությունների վրային հաշվարկները:

SOME MIXED PROBLEMS OF THE INHOMOGENEOUSLY-AGING MEDIA CREEP THEORY

V. M. ALEXANDROV, E. V. KOVALENKO, A. V. MANZHIROV

Summary

Some plane problems of the inhomogeneously-aging media creep theory are solved. Contact problems for multilayer inhomogeneously-aging viscoelastic bases are considered. An integral equation of special type containing Fredholm's and Volterra's operators is investigated. Various cases of aging of bases are studied. Numerical results on a concrete basis are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-старееющих тел.— Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 3.
2. Сумбатьян М. А. Плоская задача для тонкого слоя в условиях установившейся нелинейной ползучести.— Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1980, т. 33, № 1.
3. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.—А.: Гостехиздат, 1952.
4. Воронич И. И., Александров В. М., Бабьшко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974.
5. Коваленко Е. В. Об эффективном методе решения контактных задач для линейно-деформируемого основания с тонким усиливающим покрытием.— Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1979, т. 32, № 2.
6. Александров В. М., Коваленко Е. В. Об одном классе интегральных уравнений смешанных задач механики сплошных сред.— Докл. АН СССР, 1980, т. 252, № 2.
7. Коваленко Е. В. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений теории упругости и математической физики.— Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1981, т. 34, № 5.
8. Канторович Л. В., Акилон Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
9. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.
10. Домбровская И. Н., Иванов В. К. К теории некоторых линейных уравнений в абстрактных пространствах.— Сиб. матем. журн., 1965, т. 6, № 3.
11. Тилова А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
12. Иванов В. К., Васин В. В., Ткачаев В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
13. Владимирова В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
14. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.

Институт проблем механики
АН СССР

Поступила в редакцию
15.11.1982