

## ЭВОЛЮЦИЯ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ВОЛН В РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ

БАГДОЕВ А. Г., ОГАНЯН Г. Г.

Рассматриваются задачи распространения волн огибающих квази-монохроматических волн малой, но конечной амплитуды в химически активной газожидкостной смеси. Без учета пузырьков уравнения коротких волн получены и исследованы в [1, 2], причем в [2] число химических реакций больше единицы, а для рассматриваемой среды те же уравнения в трехмерной постановке получены в [3, 4]. Общий метод получения уравнений, описывающих распространение модулированных волн (волн огибающих) в нелинейных недиссипативных средах, предложен в [5—8], а с учетом диссипации — в [3, 9].

В настоящей работе приведены двумерные уравнения коротких волн, из которых методом медленно изменяющихся амплитуды и фазы выведены уравнения модуляций с учетом эффектов диссипации. Проведены исследования на устойчивость волн к малым возмущениям. Показано, что в недиссипативном приближении распространение волн как в продольном (вдоль оси  $x$ ), так и в поперечном (вдоль оси  $y$ ) направлениях всегда устойчиво. Учет эффектов диссипации усиливает устойчивость в случае поперечных возмущений (в задаче самофокусировки узкого пучка) и может привести к потере устойчивости при продольных возмущениях (в задаче само-модуляции волны).

1. Уравнения модуляций в диссипативной среде. Рассматривается течение химически активных вязких жидкостей с равномерно распределенными газовыми пузырьками малых размеров. Изучение ведется на основе односкоростной модели, в которой скорости движения жидкой и газовой фаз одинаковы. Изменение состава газожидкостной смеси определяется протеканием одной химической реакции в жидкой фазе и характеризуется посредством параметра  $\varphi$ , называемом полнотой химической реакции. Предполагается, что расстояние между пузырьками много больше радиуса  $R$  пузырька и потому взаимодействием между ними пренебрегается. Тогда уравнение пульсации одиночного пузырька описывается уравнением Херринга-Флинна, учитывающим сжимаемость жидкой фазы. Систему исходных уравнений возьмем в виде [10—12]

$$\frac{d\varphi}{dt} + \operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla P + \frac{\gamma}{3} \nabla (\operatorname{div} \vec{V}) + \gamma_2 \vec{V}$$

$$\rho \left( T \frac{dS}{dt} + Q \frac{dq}{dt} \right) = \gamma \vec{V}, \quad Q = \sum_{k=1}^n (\nu_k - \nu_k^*) \mu_k \quad (1.1)$$

$$P_2 - P = \rho_1 R \left( 1 - \frac{2}{c_{10}} \frac{dR}{dt} \right) \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \gamma_1 \left( 1 - \frac{4}{3c_{10}} \frac{dR}{dt} \right) \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 +$$

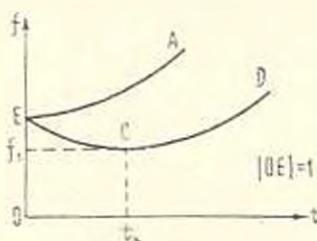
$$+ \frac{4\gamma_1}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{R}{c_{10}} \left( 1 - \frac{1}{c_{10}} \frac{dR}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( P_1 - \frac{4\gamma_1}{R} \frac{dR}{dt} \right)$$

$$\frac{P_2}{\rho_1 (1 - \beta)} = \text{const.} \quad \rho = \rho_1 (1 - \beta), \quad P_0 R^3 = \text{const}$$

Здесь индекс 1 отнесен к параметрам течения жидкой фазы, индекс 2 — газовой фазы, параметры всей смеси индексов не имеют,  $\vec{V} = \{u, v\}$  — вектор скорости частиц смеси,  $\beta$  — объем газа в единице объема смеси,  $c_{10}$  — невозмущенная скорость звука в жидкой фазе,  $Q$  — средство химической реакции,  $\nu_k, \nu_k^*$  — стехиометрические коэффициенты в уравнении реакции,  $\mu_k$  — химический или термодинамический потенциал,  $\sigma$  — тензор вязких напряжений, остальные обозначения общепринятые.

Вблизи состояния полного термодинамического равновесия ( $Q=0$ ) связь между  $Q$  и  $q$  возьмем в виде [1, 11]

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{\tau} Hq + \dots \quad H > 0 \quad (1.2)$$



Фиг. 1.

где  $\tau$  — время протекания химической реакции. Для замыкания системы (1.1)—(1.2) обратимся к соотношению Гиббса, записанному для удельной внутренней энергии [11]. Первые частные производные от энергии по независимым термодинамическим переменным представляют собой уравнения состояния среды и являются тремя недостающими соотношениями для замыкания системы.

В связи с учетом протекания химической реакции различаются квазизамороженный и квазиравновесный процессы распространения возмущений с соответствующими скоростями звука  $c_1$  и  $c_2$ . Для квазиравновесного процесса в системе координат  $(x, y)$ , связанной с волной, аналогично [1—4], путем упрощения исходной системы (1.1)—(1.2) можно получить уравнение, описывающее нестационарное волновое движение в двумерной постановке [4]

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x_1} - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) = -\frac{c_0}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.3)$$

Здесь  $x_1 = x - c_0 t$  и  $y$  — координаты по нормали и касательной к волне ( $|u| \sim \epsilon$ ,  $|x_1| \sim \epsilon^{2/3}$ ,  $|y| \sim \epsilon^{1/3}$ ),  $c_{s0} = c_0$ , индекс 0 отнесен к состоянию покоя,  $\tau_s = H_0^{-1} (\partial q / \partial Q_s)_{ss}$  — время протекания химической реакции при постоянном объеме и энтропии,  $|\nu| \sim \epsilon^{3/2}$ ,  $|\gamma| \sim \epsilon^2$ ,  $|\tau| \sim \epsilon^{3/2}$ ,  $\epsilon$  — безразмерный малый параметр.

$$\alpha = \frac{1}{1-\beta_0} \left( 1 - \frac{\beta_0 \rho_0 c_0^2}{P_0} \right)^2 + \beta_0 \left( \frac{\rho_0 c_0^2}{P_0} \right)^2, \quad \alpha_1 = \frac{1}{c_{10}} \frac{\partial}{\partial t_1} (\rho_1 c_1)_0$$

$$\gamma = \frac{\beta_0 \rho_0^2 c_0^2 R_0^2}{6(1-\beta_0)P_0^2}, \quad \frac{1}{c_0^2} = \frac{(1-\beta_0)^2}{c_{10}^2} + \frac{\beta_0 \rho_0}{P_0}$$

$$\nu = \frac{2}{3} \frac{\gamma}{\rho_0} \left( 1 + \frac{\beta_0 \rho_0^2 c_0^4}{P_0^2} \right) + \frac{\beta_0 \rho_0 R_0 c_0^4}{2P_0 c_{10}} + \tau_s \frac{c_{1/0}^2 - c_{1s0}^2}{2(1-\beta_0)^2} \left( 1 - \frac{\beta_0 \rho_0 c_0^2}{P_0} \right)^2$$

Видно, что дисперсия среды обусловлена лишь наличием пузырьков, которые приводят также к увеличению коэффициентов диссипации и нелинейности. Учет химической реакции приводит к увеличению коэффициента диссипации.

При данных порядках характеристик течения рассматриваемая область расширяется в сравнении с обычной областью коротких волн [1, 4], при этом для сохранения монохроматичности распространения волны дисперсионный эффект должен преобладать над нелинейными, хотя влияние последнего существенно. При указанных предположениях уравнение (1.5) равносильно системе (1.1) и может быть использовано для вывода уравнения, описывающего модуляционный процесс — распространение волн огибающих. По существу аналогичный подход использован в [7] при получении нелинейного дисперсионного соотношения для кондальных волн малой амплитуды из уравнения (1.3).

Ниже выведем уравнения, описывающие медленные изменения амплитуды и фазы монохроматической волны малой амплитуды. Положим [13]

$$u = U_0(\epsilon t, \epsilon x_1, \epsilon y) + U_1 \exp(-\nu k^2 t + i\theta) + U_1^* \exp(-\nu k^2 t - i\theta) + U_2 \exp(-2\nu k^2 t + 2i\theta) + U_2^* \exp(-2\nu k^2 t - 2i\theta), \quad \theta = kx_1 - \omega t \quad (1.4)$$

где  $U_0$  — действительная функция, описывающая среднее течение [5],  $U_1^*$ ,  $U_2^*$  — комплексно сопряженные с  $U_1$ ,  $U_2$  функции, дифференцирование которых по координатам уменьшает порядок их величин,  $k$ ,  $\omega$  и  $\theta$  — соответственно волновое число, частота и фаза невозмущенной волны. Подставляя (1.4) в (1.3), приравнявая коэффициенты при одинаковых по  $\theta$  степенях экспоненты и удерживая главные члены, получим

$$U_1(\omega + \gamma k^2) + i \frac{\partial U_1}{\partial t} + i \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \left( -\frac{\omega}{k} - 2i\nu k - 4\gamma k^2 \right) + \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{\partial U_1}{\partial t} - (3i\nu k + 6\gamma k^2) \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right] +$$

$$+ \frac{c_0}{2k} \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} - \alpha k U_0 U_1 - \alpha k \exp(-2\gamma k^2 t) U_1^* U_2 = 0 \quad (1.5)$$

$$2U_2(\omega + i\gamma k^2 + 4\gamma k^3) - \alpha k U_1^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial U_0}{\partial t} + \alpha \exp(-2\gamma k^2 t) \frac{\partial}{\partial x_1} |U_1|^2 \right) + \frac{c_0}{2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} = 0$$

Интересен отмеченный в [9] факт, что при  $\gamma = 0$ , то есть для исходного уравнения Бюргера, также получаются уравнения модуляций для затухающих квазимонохроматических волн. Согласно [13], приравняв нулю наибольший по порядку член в (1.5), в подвижных координатах получим нелинейное дисперсионное соотношение  $\omega = -\gamma k^2$ , подстановка которого в (1.5) приведет систему к виду

$$i \left( \frac{\partial U_1}{\partial t} - 3\gamma k^2 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) - 2\gamma k \frac{\partial U_1}{\partial x_1} - (i\gamma + 3\gamma k) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + \frac{c_0}{2k} \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} - \frac{\alpha^2}{6\gamma k} |U_1|^2 U_1 \exp(-2\gamma k^2 t) + i \frac{\alpha^2 \gamma}{18\gamma^2 k^2} |U_1|^2 U_1 \exp(-2\gamma k^2 t) - \alpha k U_0 U_1 = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial U_0}{\partial t} + \alpha \exp(-2\gamma k^2 t) \frac{\partial}{\partial x_1} |U_1|^2 \right) + \frac{c_0}{2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} = 0$$

В рассматриваемой среде необходимо выяснить имеет ли место сильная или слабая дисперсия, для которой в последнем случае образуются разрывы и понятие квазимонохроматичности распространения модулированной волны теряет смысл. В неподвижной системе координат длина образования разрыва монохроматических волн есть величина порядка  $c_0^2 (2a_0\omega)^{-1}$ , а длина когерентности [14] —  $c_0 [\omega(2k) - 2\omega(k)]$  и тогда условие отсутствия разрывов есть  $2a_0 < 6\gamma k^2$ , которое в силу принятых порядков всегда выполняется. Здесь  $a_0$  — начальная амплитуда,  $\omega(k) = c_0 k - \gamma k^2$  — дисперсионное соотношение, записанное в неподвижных координатах  $(x, y)$ .

Решение системы (1.6) ищем в виде  $U_1 = a(x_1, y, t) \exp[i\varphi(x_1, y, t)]$ . Тогда, отделяя действительную и мнимую части в уравнениях (1.6), для амплитуды  $a$ , фазы  $\varphi$  и  $U_0$  получим, в основных порядках, систему связанных уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial a}{\partial t} - 3\gamma k^2 \frac{\partial a}{\partial x_1} + 2\gamma k a \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - 6\gamma k \frac{\partial a}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - 3\gamma k a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - \gamma \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \\ & + \gamma a \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{c_0}{k} \left( \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{a}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \frac{\alpha^2 a^2}{18\gamma^2 k^2} \exp(-2\gamma k^2 t) = 0 \\ & \frac{\partial \varphi}{\partial t} - 3\gamma k^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{2\gamma k}{a} \frac{\partial a}{\partial x_1} - \frac{2\gamma}{a} \frac{\partial a}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{3\gamma k}{a} \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} = 0 \\ & - 3\gamma k \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{c_0}{2k} \left[ \frac{1}{a} \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\alpha^2 a^2}{6\gamma k} \exp(-2\gamma k^2 t) + \alpha k U_0 = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial U_0}{\partial t} + 2\alpha a \frac{\partial a}{\partial x_1} \exp(-2\gamma k^2 t) \right) + \frac{c_0}{2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} = 0$$

Полученная система в рассматриваемом приближении полностью описывает эволюцию огибающей волны в диссипативной среде.

2. Устойчивость распространения волны. Вначале проследим за изменением  $a$  и  $\varphi$  в зависимости только от времени, то есть  $a = a(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$ . Интегрируя получаемые из (1.7) уравнения при начальных условиях: при  $t = 0$   $a = a_0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ ,  $U_0 = U_{00}$ , получим

$$a = \left[ \frac{1}{a_0^2} + \frac{\alpha^2}{18\gamma^2 k^4} (1 - \exp(-2\gamma k^2 t)) \right]^{-1/2}$$

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{3\gamma k}{4\nu} \ln \left[ 1 + \frac{\alpha^2 a_0^2}{18\gamma^2 k^4} (1 - \exp(-2\gamma k^2 t)) \right] - \alpha k U_{00} t$$

При  $\nu \rightarrow 0$   $a \rightarrow a_0$ , а при  $t \rightarrow \infty$ , и отличие от недиссипативного решения, амплитуда волны уменьшается. Учитывая полученные значения  $a(t)$  и  $\varphi(t)$ , положим в системе (1.7)

$$a = a(t) + a_1(x_1, y, t), \quad \varphi = \varphi(t) + \varphi_1, \quad U_0 = U_{00} + U_{01} \quad (2.1)$$

где  $U_{00} = \text{const}$ ,  $a_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $U_{01}$  — малые возмущения. Подставляя (2.1) в систему (1.7) и линеаризуя ее относительно малых возмущений, получим

$$\frac{1}{a} \frac{\partial a_1}{\partial t} - \frac{3\gamma k}{a} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} - 3\gamma k \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} + \frac{c_0}{2k} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + 2\gamma k \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} -$$

$$- \frac{\nu}{a} \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1^2} + \frac{\alpha^2 a_1^2}{6\gamma^2 k^2} \exp(-2\gamma k^2 t) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - 3\gamma k \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{3\gamma k}{a} \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1^2} - \frac{c_0}{2ak} \frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2} - \frac{2\gamma k}{a} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} -$$

$$- \nu \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} + \frac{\alpha^2 a_1}{3\gamma k} \exp(-2\gamma k^2 t) + \alpha k U_{01} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial U_0}{\partial t} + 2\alpha a \frac{\partial a_1}{\partial x_1} \exp(-2\gamma k^2 t) \right) + \frac{c_0}{2} \frac{\partial^2 U_{01}}{\partial y^2} = 0$$

Ввиду медленного изменения экспоненты на длине волны и в течение одного периода для возмущенных параметров примем

$$a_1 = c_1 \exp(iL), \quad \varphi_1 = c_2 \exp(iL), \quad U_{01} = c_3 \exp(iL)$$

$$L = Kx_1 + Py - \Omega t \quad (2.3)$$

где  $c_i = \text{const}$ ,  $\Omega$ ,  $K$ ,  $P$  — частота и компоненты волнового вектора возмущенной волны, являющейся фронтом волны огибающих. Подставляя (2.3) в (2.2), относительно коэффициентов  $c_i$  получим систему однородных уравнений

нений, откуда из условия нетривиальности решения выражение для частоты  $\Omega$  запишем в виде

$$\Omega + 3\gamma k^2 K + i\nu k^2 + i \frac{\nu}{4\gamma k} T \exp(-2\nu k^2 t) =$$

$$= \pm \left[ -\frac{\nu^2 T^2}{16\gamma^2 k^2} \exp(-4\nu k^2 t) + I^2 - IT \exp(-2\nu k^2 t) - \right.$$

$$\left. - I \frac{4a^2 a^2 k K^2}{2\Omega K - c_0 P^2} \exp(-2\nu k^2 t) \right]^{1/2} \quad (2.4)$$

$$I = I_0 + 2i\nu k K, \quad I_0 = 3\gamma k K^2 - \frac{c_0}{2k} P^2, \quad T = \frac{a^2 a^2}{3\gamma k}$$

В подкоренном выражении из (2.4) последнее слагаемое связано со средним течением, поэтому в нем  $\Omega$  можно заменить значением, получаемым из линейной теории геометрической оптики, то есть положить  $\Omega = -3\gamma k^2 K$ .

В частном случае, когда жидкая фаза невязкая ( $\eta = 0$ ) и несжимаемая ( $1/c_{10} = 0$ ), химическая реакция отсутствует и поэтому  $\nu = 0$ . Тогда в (2.4)  $a = a_0$  и условие действительности величины  $\Omega$  дает

$$I_0^2 - I_0 T + I_0 \frac{4a^2 a_0^2 k K^2}{6\gamma k^2 K^2 + c_0 P^2} > 0 \quad (2.5)$$

Из физических соображений очевидно, что величина  $K$  модулированной волны меньше величины  $k$  монохроматических волн, то есть  $K < k$ . Поэтому нетрудно проверить, что как при поперечных ( $K = 0, P \neq 0$ ), так и при продольных ( $K \neq 0, P = 0$ ) возмущениях условие (2.5) всегда выполняется, то есть в недиссипативных средах распространение волн огибающих устойчиво к малым возмущениям.

В общем случае  $\nu \neq 0$  и в силу комплексности  $\Omega$  условие устойчивости запишется как  $\text{Im } \Omega \leq 0$ . При упрощении выражения (2.4) ограничимся главными членами порядка  $\nu$ . При поперечных возмущениях ( $K = 0$ ) из (2.4) нетрудно заметить, что оба условия устойчивости  $\text{Im } \Omega \leq 0$  и (2.5) тождественно удовлетворяются, то есть учет диссипации усиливает устойчивость распространения модулированной волны. При продольных возмущениях ( $P = 0$ ) для удовлетворения условию  $\text{Im } \Omega \leq 0$  потребуем, чтобы мнимая часть левой стороны соотношения (2.4) по абсолютной величине превосходила мнимую часть правой стороны и тогда, после вычислений, придем к условию

$$K^2 + \frac{T}{4\gamma k} \exp(-2\nu k^2 t) > k \left( 2K^2 + \frac{T}{3\gamma k} \exp(-2\nu k^2 t) \right) \times$$

$$\times \left( K^2 + \frac{T}{3\gamma k} \exp(-2\nu k^2 t) \right)^{-1/2}$$

Правая часть полученного неравенства больше  $2kK$ , поэтому усиленным условием неустойчивости явится соотношение

$$K^2 + \frac{T}{4\gamma k} \exp(-2vk^2t) \leq 2kK$$

Итак, в случае продольных возмущений модулированная волна в одномерной нестационарной задаче (задача самомодуляции), являясь устойчивой в недиссипативной среде, может потерять устойчивость в диссипативной, причем даже в отсутствие вязкости возможна потеря устойчивости при учете химических реакций, протекающих в среде.

3. Самомодуляция волны в недиссипативной среде. Рассмотрим задачу о самомодуляции волны, для которой в системе (1.7) производными по  $\mu$  пренебрегают. Полагая  $v = 0$  и считая, что среднее течение, характеризующее функцию  $U_0$ , обусловлено основным волновым движением [5], в третьем уравнении системы (1.7) можно полагать  $\partial/\partial t \approx 3\gamma k^2 \partial/\partial x_1$  и получить  $U_0 \approx -\alpha^2 (3\gamma k^2)^{-1/2}$ . Исключая  $U_0$  из системы и переходя к координате  $\mu = (x_1 - 3\gamma k^2 t) (6\gamma k)^{-1/2}$ , приведем систему (1.7) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{a}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} - \frac{\partial a}{\partial \mu} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2a} \frac{\partial^2 a}{\partial \mu^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right)^2 - \frac{\alpha a^2}{6\gamma k} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Рассмотрим задачу об эволюции волны, первоначально заданной в виде гауссова профиля:

$$\text{при } t = 0 \quad a = a_0 \exp\left(-\frac{\mu^2}{2R_0}\right), \quad \varphi = \varphi_0 - \frac{\mu^2}{2R_0}$$

где  $a_0$ ,  $\varphi_0$  — начальные амплитуда и фаза волны при  $\mu = 0$ ,  $R_0$  и  $-1/R_0$  — начальные ширина профиля и „кривизна“ волны в пространстве времени. Наличие  $R_0$  приводит к расстройке монохроматичности начального фронта, описываемого для малых  $t$  уравнением  $\omega t \approx kx_1 + \varphi_0 - x_1^2 (12\gamma k R_0)^{-1}$ . При  $R_0 > 0$  ( $R_0 < 0$ ) фронт волны ускоряется (замедляется), при этом, как будет показано ниже, за счет  $R_0$  волна стремится демодулироваться (сагомодулироваться).

Решение системы (3.1) ищем в виде

$$a = \frac{a_0}{f^{1/2}} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2R_0 f^2}\right), \quad \varphi = \varphi(t) - \frac{\mu^2}{2R(t)}, \quad f = f(t) \quad (3.2)$$

Здесь функция  $f(t)$  характеризует степень сжатия профиля волны, причем

$$\frac{1}{R(t)} = \frac{1}{f} \frac{df}{dt}, \quad f(0) = 1, \quad \frac{df(0)}{dt} = \frac{1}{R_0} \quad (3.3)$$

Подставим (3.2) в (3.1) и в нелинейном слагаемом возьмем первые два члена из разложения экспоненты по малым  $\mu$ . Далее, приравняв нулю выражения при одинаковых по  $\mu$  степенях, после интегрирования и учета начальных условий (3.3) получим

$$\left(\frac{df}{dt}\right)^2 = m + n + r - \frac{m}{f} - \frac{n}{f^2}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2v_0^2 f^2} + \frac{mv_0^2}{4f}$$

$$m = \frac{2\alpha^2 a_0^2}{3\gamma k v_0^2}, \quad n = \frac{1}{v_0^4}, \quad r = \frac{1}{R_0^2}$$

Интегрируя полученное уравнение, находим ( $N = m + n + r$ )

$$-t = \frac{\sqrt{Nf^2 - mf - n} - \sqrt{r}}{N} + \frac{m}{2N^{3/2}} \ln \frac{2\sqrt{N(Nf^2 - mf - n)} + 2Nf - m}{2\sqrt{Nr + m + 2n + 2r}} \quad (3.4)$$

Если первоначально заданная волна выпуклая ( $R_0 > 0$ ), то есть в силу монотонности функции  $f$  и согласно (3.3)  $df/dt > 0$ , то в решении (3.4) необходимо брать верхний знак и тогда  $f$  начинает сразу возрастать от значения  $f = 1$  до бесконечности, при этом происходит процесс демодуляции (расплывания) волны (фиг. 1, ветвь  $EA$ ).

Если же первоначально заданная волна вогнутая ( $R_0 < 0$ ), то есть  $df/dt < 0$ , то в (3.4) необходимо брать нижний знак и тогда (ветвь  $EC$ ) функция  $f$  начинает убывать от  $f = 1$  (при  $t = 0$ ) до  $f_1$ , где  $0 < f_1 < 1$  есть корень уравнения  $Nf^2 - mf - n = 0$ , при этом происходит процесс самодедуляции (сжатия) волны, продолжающийся до момента

$$t_* = \frac{1}{N} \sqrt{r} - \frac{m}{2N^{3/2}} \ln \frac{1 + \sqrt{4Nn + m^2}}{2\sqrt{Nr + m + 2n + 2r}}$$

В момент  $t = t_*$  вогнутая волна становится плоской, далее выгибается в сторону выпуклости и начинается процесс демодуляции (ветвь  $CD$ ), при этом функция  $f$  начинает возрастать от  $f = f_1$  до бесконечности. Решение записывается, подобно (3.4), через элементарные функции и потому не приводится.

Необходимо подчеркнуть важность учета среднего течения, оказывающего демодулирующее влияние на характер эволюции волн обтекающих в недиссипативной среде, в то время как при его отсутствии распространение волн может иметь волноводный характер [15].

4. *Оссимметричные узкие пучки в диссипативной среде.* При рассмотрении стационарных двумерных задач о пучках необходимо учесть, что изменения параметров течения по касательной к волне превосходят их изменения поперек волны, поэтому в системе (1.6) вторыми производными по  $x$  можно пренебречь в сравнении со вторыми производными по  $y$ . Обратный переход от координат  $(x_1, y, t)$  к неподвижной системе координат  $(x, y, t)$  дается соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x, y} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x, y} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{y, t}, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_{y, t} = \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{y, t} \quad (4.1)$$

Подставляя (4.1) в (1.6), пренебрегая производными по  $t$  и полагая, что

среднее течение обусловлено квазимонохроматическим распространением модулированной волны — волны огибающей квазимонохроматических волн. Из второго уравнения системы (1.6) нетрудно заметить, что  $|U_1| \sim e^2$ , то есть в рассматриваемом приближении взаимодействия между основными и средними течениями не происходит, что неявно было учтено в [3]. Система (1.6) для комплексной амплитуды сведется к уравнению ( $t \approx x/c_0$ )

$$i \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{1}{2k} \left( \frac{n}{y} \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right) - \frac{\alpha^2}{6\gamma k c_0} \exp\left(-\frac{2\nu k^2 x}{c_0}\right) \left(1 - i \frac{\nu}{3\gamma}\right) |U_1|^2 U_1 = 0 \quad (4.2)$$

где  $n = 0, 1$  соответствует плоскому и осесимметричному течениям. Поскольку, согласно п. 2, распространение волны устойчиво к малым поперечным возмущениям, естественно ожидать, что учет диссипации усилит процессы эволюции пучка, изученные при  $\nu = 0$  в [3]. Действительно, полагая  $n = 1$  и отделяя действительную и мнимую части уравнения (4.2), приведем его к системе

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\alpha}{2k} \left( \frac{1}{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{k} \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\alpha^2 \nu a^3}{18\gamma^2 k^2 c_0} \exp\left(-\frac{2\nu k^2 x}{c_0}\right) = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{2ak} \left( \frac{1}{y} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{2k} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\alpha^2 a^2}{6\gamma k c_0} \exp\left(-\frac{2\nu k^2 x}{c_0}\right) = 0$$

Следуя [5, 16], решение системы (4.3) ищем в виде

$$a = \frac{a_0}{f(x)} \exp\left(-\frac{y^2}{2y_0^2 f^2}\right), \quad \varphi = \sigma(x) + \frac{y^2 k}{2R(x)} \quad (4.4)$$

где  $a_0$  — начальное значение амплитуды волны на оси пучка,  $y_0$  — начальное значение ширины пучка,  $f(x)$  — безразмерная функция, характеризующая степень фокусирования пучка, причем  $f(0) = 1$ ,  $R(x)$  — радиус кривизны волны,  $\sigma(x)$  — фаза волны на оси пучка.

Подставляя (4.4) в (4.3), удержим в разложении для экспоненты при нелинейных слагаемых первые два члена. Далее, приравнявая соотношения при одинаковых по  $y$  степенях, из первого и второго уравнений системы (4.3) соответственно получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{f} \frac{df}{dx} - \frac{\alpha^2 \nu a_0^2}{18\gamma^2 k^2 c_0} \exp\left(-\frac{2\nu k^2 x}{c_0}\right) \frac{1}{f^2} \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{R^2} + \frac{g_0^2}{f^4} \exp\left(-\frac{2\nu k^2 x}{c_0}\right) &= 0 \quad (4.5) \\ g_0^2 &= \frac{\alpha a_0^2}{3\gamma k^2 y_0^2 c_0} + \frac{1}{k^2 y_0^4} \end{aligned}$$

Здесь не выписано уравнение относительно фазы  $\sigma(x)$ . Учитывая, что на расстоянии порядка длины волны эффекты диссипации слабо влияют на распространение волны, можно полагать  $\exp(-2\nu k^2 x/c_0) \approx \text{const} = 1$ . Тогда, исключая  $R$  из системы (4.5), определяя постоянную интегрирования из условия

$$x=0 \quad f(0) = 1, \quad \frac{df(0)}{dx} = \frac{1}{R_0} + \frac{x^2 \nu a_0^2}{18 \gamma^2 k^2 c_0}, \quad \frac{1}{R_0} = \frac{1}{R(0)}$$

относительно функции  $f$  получим уравнение

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^2 = b_0^2 - \frac{g_0^2}{f^2}, \quad b_0^2 = \frac{1}{R_0^2} + \frac{1}{k^2 y_0^4} + \frac{\alpha a_0^2}{3 \gamma k^2 c_0} \left(\frac{1}{y_0^2} + \frac{\nu}{3 \gamma R_0}\right) \quad (4.6)$$

Подобное [3] исследование уравнения (4.6) показывает, что для первоначально всех выпуклых ( $R_0 > 0$ ) и вогнутых ( $R_0 < 0$ ), удовлетворяющих условию  $|R_0| > 18 \gamma^2 k^2 c_0 (x^2 \nu a_0^2)^{-1/2}$ , сразу начинается процесс дефокусировки пучка, а для вогнутых воли, удовлетворяющих условию  $|R_0| < 18 \gamma^2 k^2 c_0 (x^2 \nu a_0^2)^{-1/2}$ , имеет место схождение пучка, продолжающееся до координаты

$$x_* = b_0^{-1} (1 - i_0^2)^{1/2}, \quad f(x_*) = i_0 = g_0 b_0^{-1} < 1$$

Отсюда нетрудно заметить, что величины  $\lambda_*$  меньше значения  $\lambda_0$  без учета диссипативных эффектов, то есть учет вязкости и химической реакции приводят к увеличению меры фокусировки пучка.

Таким образом, если пучок начинает сходиться, то диссипация увеличивает меру схождения, а если пучок расходится, то она увеличивает меру его расхождения, что согласуется с выводами п. 2.

Рассмотрим численный пример задачи, в которой имеется схождение пучка. Для типичных значений  $\rho_0 = 1 \text{ г/см}^3$ ,  $\beta_0 = 0,1$ ,  $R_0 = 0,01 \text{ см}$ ,  $\nu = 0,1 \text{ см}^2/\text{сек}$ ,  $k = 1 \text{ см}^{-1}$ ,  $\gamma = 10$ ,  $y_0 = 1,3 \text{ см}$ ,  $R(0) = 3 \text{ см}$ , получим:  $\alpha = 0,5 \text{ см}^3/\text{сек}$ ,  $c_0 = 3000 \text{ см/сек}$ . Полагая  $a_0 = 18 \text{ см/сек}$ , вычисляем координату фокального пятна  $x_* = 1,8 \text{ см}$  и меру фокусирования  $i_0 = 0,7$ .

В заключение отметим, что используемое нами уравнение пульсации изолированного одиночного пузырька применяется в современной научной литературе [10, 12, 17, 18, 19]. С другой стороны, для немалых концентраций газа необходим детальный учет взаимовлияния пузырьков и, тем самым, более точный учет диссипативных эффектов, в которых преобладающее место занимает тепловая диссипация на границе раздела фаз [20, 21]. Целью настоящей статьи является развитие методов теории модуляции волн применительно к газожидкостным смесям. Подобные методы применимы и к более реальным моделям сред.

ԻՆԼԱՔՍԱՑՎՈՂ ԳԱԶԱԶՆԵՂՈՒԿԱՑԻՆ ԽԱՌՆՈՒՐԴՈՒՄ ՔՎԱԶԻՄՈՆՈՔՐՈՄԱՏԻԿ  
ԱՆԻՔՆԵՐԻ ԷՎՈՅՈՒՑԻԱՆ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈՅՎ, Գ. Գ. ՕՉԱՆՅԱՆ

Ու մ փ ո փ ու մ

Փոքր շափսերի դաղային պղպղակներ պարունակող քիմիապես ակտիվ մածուցիկ հեղուկների խառնուրդում դիտարկված են փոքր, բայց վերջավոր ամպլիտուդա ունեցող ալիքների տարածման խնդիրներ, խառնուրդի բաղադրության փոփոխությունը որոշվում է հեղուկ ֆազայում մեկ քիմիական ռեակցիայի ընթանմամբ: Ենթադրված է, որ դիտարկվող թույլ ոչ գծային միջավայրում դիսպերսիայի և դիսիպացիայի էֆեկտները էական են: Դանդաղ փոփոխվող ամպլիտուդայի և ֆազայի մեթոդով կարճ ալիքների հավասարումներից դուրս են բերված մոդուլացիայի հավասարումները: Ջույց է տրված, որ դիսիպացիայի բացակայության դեպքում ինչպես ընդլայնական, այնպես էլ երկայնական ուղղություններով ալիքների տարածումը միշտ կայուն է, մինչդեռ դիսիպացիայի հաշվառումը բերում է ընդլայնական կայունության կորստի: Հետադրուված են ալիքի ինքնամոդուլացիայի և նեղ փնջերի խնդիրները:

THE EVOLUTION OF QUASI-MONOCROMATIC WAVES IN A GAS-FLUID MIXTURE WITH RELAXATION

A. G. BAGDOEV, G. G. OHANIAN

S u m m a r y

The problems on propagation of weak shock waves in a mixture of chemically active viscous fluids containing small bubbles of gas are considered. By the method of slowly changing amplitude and phase from short wave equations, the nonlinear equations of modulations are deduced. Investigations concerning the stability of modulated wave upon small perturbations are carried out. The problems of wave self-modulation and narrow beams are investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжов О. С. О нелинейной акустике химически активных сред.— ПММ, 1971, т. 35, № 6.
2. Ни А. А., Рыжов О. С. Нелинейное распространение волн в средах с произвольным количеством химических реакций.— ПММ, 1976, т. 40, № 4.
3. Багдоев А. Г., Оганян Г. Г. Распространение модулированных нелинейных волн в релаксирующей газожидкостной смеси.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 1.
4. Оганян Г. Г. Распространение слабых волн в релаксирующей газожидкостной смеси.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1979, т. 32, № 2.
5. Уилемс Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.

6. *Lighthill M. J.* Some special cases treated by the Whitham theory. *Proc. Roy. Soc.* 1967, A—299, No. 28, p. 1456.
7. *Карпман В. Н.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973.
8. *Батлоси А. Г.* Определение окрестности фронтов поля в пространственной задаче.— *Изв. АН Арм. ССР, Механика*, 1977, т. 30, № 6.
9. *Davey A.* The propagation of a weak nonlinear wave. *J. of Fluid Mech.*, 1972 vol. 53, No. 4, p. 769—781.
10. *Ван Вейнгарден А.* Одномерные течения жидкостей с пузырьками газа. В сб. «Реология суспензий». М.: Мир, 1975.
11. *Де Гроот С. Р., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964.
12. *Ахуличев В. А.* Пульсации кавитационных полостей. В сб. «Мощные ультразвуковые поля». М.: Наука, 1968.
13. *Tanuttl T. and Yajima N.* Perturbation methods for a nonlinear wave propagation. *J. Math. Phys.*, 1969, No. 10, p. 1369—1372.
14. *Руденко О. В., Солян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
15. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. М.: Наука, 1979.
16. *Алманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В.* Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде.— *Успехи физ. н.*, 1967, т. 93, № 1.
17. *Козарко Б. С.* Движение смеси жидкости с газовыми пузырьками. В сб. «Неустойчившееся течение воды с большими скоростями». М.: Наука, 1973, с. 243—246.
18. *Заболотская Е. А.* Два механизма самовоздействия звуковых волн, распространяющихся в газожидкостной смеси.— *Акуст. ж.*, 1977, т. 23, № 4, с. 591—595.
19. *Noordzij L., Van Wijngaarden L.* Relaxation effects caused by relative motion, on shock waves in gasbubble-liquid mixtures. *J. Fluid Mech.*, 1974, vol. 66, p. 1.
20. *Губайдулин А. А., Ивандоев А. Н., Нияматуллин Р. И.* Исследование нестационарных ударных волн в газожидкостных смесях пузырьковой структуры.— *ИИМТФ*, 1978, № 2, с. 78—86.
21. *Нияматуллин Р. И.* Основы механики гетерогенных систем. М.: Наука, 1978.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию  
12. III 1982