ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVII, № 1, 1984 Механика

К УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КРУГОВОЙ ПАНЕЛИ

МОВСИСЯН Л. А.

Во многих работах по устойчивости для панели начальное состояние принимается безмоментным и, в частности, при внешнем равномерном давлении в качестве начального кольцевого усилия берется известная формула $T = Rq$. Априори понятно, что цилиндрическую панель нельзя считать безмоментной. Оказывается, что такое предположение может привести не только к количественной погрешности.

В настоящей работе на примере одномерной задачи показано, что, если края панели свободно оперты, то она теряет устойчивость не при внешнем давлении, как это имеет место при шарнирно закрепленной панели, а при внутреннем давлении.

Панель предполагается бесконечной протяженности вдоль образующей и для простоты коэффициент Пуассона принимается равным нулю.

Эта задача примечательна еще вот в каком отношении. В уравнениях устойчивости оболочек, обычно, докритическими перерезывающими усилиями пренебрегают. Однако, имеются примеры, где невозможна постановка задачи устойчивости без них [1—3]. В рассматриваемой же задаче перерезывающее усилие докритического состояния оказывает существенное влияние на значения критических параметров.

1. Начальное докритическое состояние панели характеризуется системой [4]*

$$\frac{dT^0}{ds} + \frac{N^0}{R} = 0, \quad \frac{dN^0}{ds} - \frac{T^0}{R} = -Z, \quad \frac{dM^0}{ds} = N^0 \tag{1.1}$$

Предполагается, что на панель действует нормальная нагрузка, которая является функцией только от координаты s (s — длина дуги направляющего круга). Давление считается положительным, если оно направлено в сторону внешней нормали.

На кромках задаются обычные условия свободного опирания:

$$T^0 = M^0 = w^0 = 0 \quad \text{при} \quad s = 0 \text{ и } s = s_0 \quad (s_0 < \pi R) \tag{1.2}$$

Из системы (1.1) при условиях (1.2) начальные усилия определяются сразу, без привлечения геометрических и упругих соотношений

* Нуликами наверху обозначаются величины докритического состояния.

$$T^0 = -\frac{\sin s/R}{\sin s_0/R}\int\limits_0^{s_0} Z(\tau)\sin\frac{s_0-\tau}{R}\,d\tau + \int\limits_0^{s} Z(\tau)\sin\frac{s-\tau}{R}\,d\tau \tag{1.3}$$

$$N^0 = -R\,\frac{dT^0}{ds}$$

В частности, если имеется внутреннее равномерное давление $Z(s) = q = \text{const}$, то из (1.3) получится

$$T^0 = Rq\left[1 - \frac{\cos(2s-s_0)/2R}{\cos s_0/2R}\right], \qquad N^0 = -Rq\,\frac{\sin(2s-s_0)/2R}{\cos s_0/2R} \tag{1.4}$$

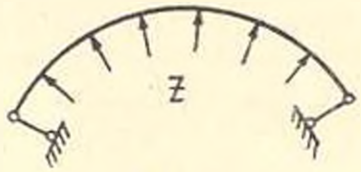
Член $[\cos(2s-s_0)/2R]\ /\cos s_0/2R$, который появляется из-за учета моментности начального состояния, всегда больше единицы при $0 < s_0 < \pi R$ и, следовательно, выражение в квадратных скобках для T^0 отрицательно, то есть при внутреннем давлении появляется сжимающее кольцевое усилие. Если моментность не учесть, то получится наоборот — растягивающее усилие при внутреннем давлении $T^0 = Rq$.

Кстати, появление сжимающих кольцевых усилий при внутреннем давлении не удивительно и это имеет место и для конечной панели при определенных соотношениях ее сторон.

Если предположить, что свободно опертая панель ($T_1 = v = M_1 = w = 0$ при $x = 0$, $x = a$ и $T_2 = u = M_2 = w = 0$ при $s = 0$, $s = s_0$) несет внешнее давление по закону

$$Z(x, s) = -q\sin\lambda x\sin\mu s \tag{1.5}$$

$$\lambda = \frac{\pi}{a}, \quad \mu = \frac{\pi}{s_0}$$



Фиг. 1.

то для кольцевого усилия T_2 получится следующее выражение:

a) в безмоментной постановке

$$T_2 = RZ \tag{1.6}$$

b) по теории В. З. Власова

$$T_2 = \frac{\lambda^4 RZ}{c^2R^4(\lambda^2+\mu^2)^4 + \lambda^4}, \qquad c^2 = \frac{h^2}{12\,R^2} \tag{1.7}$$

c) по точной теории [5]

$$T_2 = \frac{\lambda^4 + c^2(4\lambda^2\mu^2 + \mu^4) - R^2c^2(4\lambda^4\mu^2 + 4\lambda^2\mu^4 + \mu^6)}{c^2R^4(\lambda^2+\mu^2)^4 + \Lambda}\,RZ \tag{1.8}$$

$$\Lambda = \lambda^4 + c^2(4\lambda^2\mu^2 + \mu^4) - 2R^2c^2(4\lambda^4\mu^2 + 4\lambda^2\mu^4 + \mu^6)$$

Из приведенных формул видно, что если по приближенным теориям (1.6) и (1.7) знаки T_2 и Z одинаковые, то уже по точной теории при определенных отношениях a и s_0 знаки T_2 и Z становятся обратными. В частности, при $a \gg s_0$ получится результат, подобный вышеприведенному, в смысле знака. А уже для $a \ll s_0$ знаки T_2 и Z совпадают. Это означает, что если в последнем случае возможна потеря устойчивости при внешнем давлении, то в первом случае она возможна лишь при внутреннем давлении. Между прочим, предположение безмоментности начального состояния при иных краевых условиях может привести к вполне приемлемым результатам. В случае, когда края панели шарнирно закреплены,

$$v^0 = M^0 = w^0 = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, \; s = s_0 \tag{1.9}$$

то есть в (1.2) меняется только тангенциальное условие, выражение для T^0 при постоянном давлении имеет вид (1.4) с той существенной разницей, что перед вторым членом как множитель фигурирует c^2, так например, при $s_0 = \pi R/2$

$$T^0 = Rq\left[1 - \frac{2c^2}{\pi - 2{,}5}\left(\cos\frac{s}{R} + \sin\frac{s}{R}\right)\right] \tag{1.10}$$

При условиях же (1.2) $T^0 = Rq\,(1 - \cos s/R - \sin s/R)$.

Отсюда видно, что в случае шарнирно закрепленной панели предположение безмоментности докритического состояния оправдано и точность формулы $T^0 = Rq$, которой пользуются, в частности, при определении критического давления для арки [6], находится в пределах точности теории оболочек.

Помимо равномерного внутреннего давления (1.4) будут рассмотрены также случай синусоидального давления $Z = \bar{q}\sin \pi s/s_0$, усилия при котором будут

$$T^0 = Q\sin\frac{\pi s}{s_0}, \qquad Q = \frac{R\bar{q}}{1 - \left(\dfrac{\pi R}{s_0}\right)^2} \tag{1.11}$$

и случай равномерно распределенной по линии $s_0/2$ нагрузки (в пределе сосредоточенная сила) $Z = P\,\delta\,(s - s_0/2)$, где δ — функция Дирака, при котором

$$T^0 = -\frac{P}{2}\,\frac{\sin s/R}{\cos s_0/2R} + P\int_0^s \delta\left(\xi - \frac{s_0}{2}\right)\sin\frac{s-\xi}{R}\,d\xi \tag{1.12}$$

2. Уравнения устойчивости с учетом докритического перерезывающего усилия имеют вид [7]

$$\begin{aligned} &\frac{d^2v}{ds^2} + \frac{1}{R}\left(\frac{dw}{ds} - c^2\frac{d^3w}{ds^3}\right) - \frac{N^0}{Eh}\,\frac{d^2w}{ds^2} = 0 \\ &\frac{1}{R}\left(\frac{dv}{ds} + \frac{w}{R}\right) + c^2\frac{d^4w}{ds^4} - \frac{T^0}{Eh}\,\frac{d^2w}{ds^2} = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь v, w — перемещения соответственно в окружном и нормальном направлениях. В отличие от общепринятых уравнений в (2.1) фигурирует член с коэффициентом N^0. Система эта получена при предположениях классической теории устойчивости оболочек — учитываются только повороты линейных элементов срединной поверхности оболочек. Кстати, подобная система приводится и в [8]. В [9] учитываются не только повороты, но и удлинения, а в [10], помимо них, учитываются также сдвиги. Однако, как правило, члены с начальными перерезывающими усилиями пренебрегаются. В (2.1) нет и надобности вместо кривизны $\varkappa = -d^2w/dx^2$ брать более точное выражение, так как при граничных условиях (1.2) это абсолютно не влияет на значение критических параметров.

Решение (2.1) берется в виде рядов

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin \lambda_k s, \qquad v = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \cos \lambda_k s, \qquad \lambda_k = \frac{k\pi}{s_0} \tag{2.2}$$

удовлетворяющих условиям типа (1.2) для возмущенного состояния. В виде рядов представляются также начальные усилия

$$T^0 = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos \lambda_m s, \quad N^0 = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \lambda_m s, \quad b_m = R\lambda_m a_m \tag{2.3}$$

Коэффициенты Фурье вышеприведенных примеров соответственно имеют вид

$$\begin{gathered} a_0 = Rq\left[1 - \frac{2R}{s_0}\frac{1-\cos s_0/R}{\sin s_0/R}\right] \\ a_m = Rq\frac{2s_0/R}{(m\pi)^2 + (s_0/R)^2}\frac{[1+(-1)^m](1-\cos s_0/R)}{\sin s_0/R} \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$a_0 = \frac{2Q}{\pi}, \qquad a_m = \frac{2Q}{\pi}\frac{1+(-1)^m}{1-m^2} \tag{2.5}$$

$$a_0 = P\frac{R}{s_0}\frac{\cos s_0/2R - 1}{\cos s_0/2R} \tag{2.6}$$

$$a_m = P\frac{s_0/R}{(m\pi)^2 - (s_0/R)^2}\left\{\frac{1-(-1)^m \cos s_0/R}{\cos s_0/2R} + \right.$$
$$\left. + 2\left[(-1)^m \cos\frac{s_0}{2R} - \cos\frac{m\pi}{2}\right]\right\}$$

Подставляя (2.2) и (2.3) в (2.1), после некоторых несложных преобразований для неизвестных f_k получим бесконечную систему однородных уравнений, условием нетривиального решения которой является

$$\det \| c_{km} \| = 0 \tag{2.7}$$

$$c_{km} = b_{km} + \delta_{km}, \qquad \delta_{km} = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

$$b_{kk}=\frac{1}{\Lambda_k}\left(a_0-\frac{3}{2}a_{2k}\right)\lambda_k^2,\quad \Lambda_k=\frac{Eh^3}{12}\lambda_k^2\left(\lambda_k^2-\frac{1}{R^2}\right)$$

$$b_{km}=\frac{1}{2\Lambda_k}\left[a_{k-m}\left(2-\frac{m}{k}\right)-a_{k+m}\left(2+\frac{m}{k}\right)\right]\lambda_m^2,\quad k\leq m$$

Значение критической нагрузки определяется как наименьший корень уравнения (2.7).

Легко видеть, что детерминант (2.7) нормальный [11]. В самом деле, так как коэффициенты a_k имеют хотя бы порядок $O(k^{-3})$, то ряд $\sum\limits_{k,m}|b_{km}|$ сходится и, следовательно, корни (2.7) можно определить методом последовательных приближений, и процесс этот сходится.

Что касается формы потери устойчивости, то она будет вовсе не по целой полуволне, а представится в виде (2.2), где коэффициенты должны быть определены из решения однородной системы с детерминантом (2.7). Следует отметить, что в рассмотренных примерах гармоника с одной полуволной является главной, то есть она наиболее близка к истинной форме потери устойчивости.

Ниже приводится таблица для безразмерных критических параметров вышерассмотренных примеров при различных значениях s_0/R.

s_0/R	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$
$\frac{q_{кр}R^3}{D}$	1168	58,74	8,604	1,452	0,1796
	787,2	40,48	5,701	0,9808	0,1206
$\frac{\bar{q}_{кр}R^3}{D}$	1417	74,13	10,45	1,840	0,2423
	993,7	51,79	7,008	1,227	0,1723
$\frac{P_{кр}R^2}{D}$	385,3	40,12	8,421	1,937	0,3892
	211,0	25,32	5,375	1,254	0,2565

Для каждого случая в первой строке помещены критические параметры без учета начального перерезывающего усилия, а во второй — с учетом. Как правило, сходимость процесса достигается очень быстро, и второе и третье приближения почти не отличаются.

Как видно из таблицы, учет докритического усилия существенно понижает значение критических параметров (более, чем на сорок процентов).

Таким образом, шарнирно опертая бесконечная панель или круговой стержень теряют устойчивость только при внутренних нагрузках и неучет начального перерезывающего усилия приводит к существенным погрешностям в значениях критических параметров.

То, что изменение тангенциальных граничных условий приводит к существенному количественному изменению критических параметров известно давно, но в настоящей задаче имеет место также изменение и качественное.

ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՊԱՆԵԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Ամփոփում

Պանելի կայունությունը դիտարկվում է միաչափ դրվածքով։ Ցույց է տրված, որ նախնական վիճակի (մոմենտային) հավասարումները ճիշտ լուծելու դեպքում ազատ հենված պանելը կայունությունը կորցնում է ներքին ճնշման դեպքում։ Դիտարկված է երեք տիպի բեռներ՝ հավասարաչափ և սինուսոիդային ճնշում, կենտրոնացված բեռ։

Կրիտիկական պարամետրերի որոշումը բերվում է անվերջ մատրիցի, որին համապատասխանում է նորմալ դետերմինանտ, ամենափոքր սեփական արժեքի գտնելուն։

Ստացված է նախակրիտիկական կտրող ուժի ուժեղ ազդեցությունը կրիտիկական պարամետրերի վրա։

THE STABILITY OF A CURCULAR CYLINDRICAL PANEL

L. A. MOVSISIAN

Summary

The stability of a panel is investigated using one-dimensional arrangement. The exact solutions of the equations of the initial state (momentum state) show that a hinge supported panel is unstable under internal compression. Three types of loads are considered (uniform, sinusoidal and concentrated forces).

It has been shown that pre-buculing shear stresses have a great influence on the values of critical parameters.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Flemming J. F., Herrmann G., Mooney I.* Bucling of structural Elements Subject to Surface Shear. — J. of Applied Mechanics, 1965, Vol. 32, No. 1, pp. 225—227.
2. *Herrmann G., Armenakas A. E.* Vibrations and Stability of Plates Under Initial Stress — Proceedings ASCE. Jour. of Engineering Mechanics Division, 1960, Vol. 86, pp. 65—94.
3. *Мовсисян Л. А., Пештмалджян Д. В.* Об уравнениях устойчивости и колебания анизотропных пластин.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1973, т. 26, № 6, с. 18—28
4. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
5. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Гостехиздат, 1953. 544 с.
6. *Динник А. Н.* Устойчивость арок. М.—Л.: Гостехиздат, 1946. 128 с.
7. *Мовсисян Л. А.* Об уравнениях устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки.— Докл. АН АрмССР, 1971, т. 52, № 2, с. 70—75.
8. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972, 432 с.

9. *Муштари Х. М., Галимов К. З.* Нелинейная теория упругих оболочек. К.: Таткнигоиздат, 1957. 431 с.
10. *Даревский В. М.* Нелинейные уравнения теории оболочек и их линеаризация в задачах устойчивости.— Тр. VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1966. с. 355—373.
11. *Канторович Л. В.* и *Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.—Л.: Гостехиздат, 1949. 695 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
17. V. 1982