

ПЕРЕДАЧА НАГРУЗКИ ОТ КОЛЬЦЕОБРАЗНОГО СТРИНГЕРА
К УПРУГОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ

МХИՂԱՐՅԱՆ Տ. Մ., ԿՈՒՄԱՅԱՆ Ր. Տ.

Контактные задачи о передаче нагрузки от тонкостенных элементов в виде прямолинейных стрингеров к массивным деформируемым телам ввиду их практической важности стали предметом исследования многих авторов. Достаточно полный обзор основных работ и результатов этой области теории упругости содержится в [1]. Здесь укажем лишь на работы [2—10], примыкающие к приводимым ниже исследованиям.

Во всех этих работах для прямолинейного стрингера принимается модель одноосного напряженного состояния и сочетания с моделью контакта по линии, вследствие чего нормальные контактные напряжения по сравнению с тангенциальными пренебрегаются. Непосредственное перенесение этой модели на случай стрингеров с криволинейной, в частности, с круговой осью неприемлемо и противоречиво.

В настоящей работе рассматривается контактная задача о передаче нагрузки от криволинейного бруса (стрингера) с круговой осью малого поперечного сечения к упругой бесконечной пластине. При этом брус трактуется в рамках теории тонких оболочек [11—13].

На основе принятых предположений решение поставленной задачи сводится к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения с ядром Гильберта, совпадающего с уравнением периодической контактной задачи [4, 8]. При помощи аппарата многочленов Чебышева это уравнение в свою очередь сводится к эквивалентной регулярной бесконечной системе линейных уравнений.

Для основных механических характеристик задачи получены явные формулы и приведены числовые результаты.

1. *Постановка задачи и вывод разрешающих уравнений.* Пусть упругая бесконечная пластина высоты d , модуль упругости которой E_0 , а коэффициент Пуассона ν_0 , на своей верхней грани усилена кольцеобразным стрингером с круговой осью радиуса R , имеющим высоту d , ширину h , угол раствора 2α ($0 < \alpha < \pi$), модуль упругости E_1 и коэффициент Пуассона ν_1 . Пусть, далее, стрингер на своей верхней грани загружен тангенциальными силами интенсивности $\tau_{\alpha\alpha}(0)$, сосредоточенными вдоль средней линии (дуги окружности) этой грани, а также сосредоточенными силами P_1 и P_2 , приложенными на его концах (фиг. 1). Будем считать, что $h, d \ll R$ ($h < d$). Требуется определить контактные напряжения в области соединения стрингера с пластиной.

Выведем разрешающее уравнение поставленной задачи.

С этой целью сначала обратимся к брусу. Его трактуем как тонкую цилиндрическую оболочку длины d , нагруженную по своим нижним и верхним граням, и, придерживаясь принятым в [11] обозначениям, положим

$$a_1 = s, \quad a_2 = z, \quad a_3 = n, \quad A_1 = A_2 = 1, \quad R_1 = R, \quad R_2 = \infty, \quad s = R\theta$$

где (s, n, z) — известная ортогональная криволинейная система координат ([14], стр. 476). Далее, вследствие предположения $h, d \ll R$ примем простейшую модель для бруса, когда жесткостями бруса на изгиб в вертикальном (z) и радиальном (n) направлениях по сравнению с его жесткостью на растяжение в продольном направлении (s) можно пренебречь.

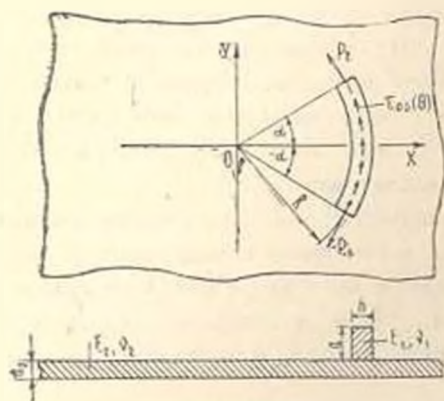
Тогда [11, 12] упругие соотношения сводятся к следующему:

$$T_1 = E_1 h \varepsilon_1 \quad (1.1)$$

а уравнения равновесия бруса — к следующим:

$$\frac{1}{R} \frac{dT_1}{d\theta} + \frac{\tau_{\theta s}(\theta) - \bar{\tau}_s(\theta)}{d} = 0 \quad (1.2)$$

$$\bar{q}_s(\theta) = -\frac{d}{R} T_1(\theta)$$



Фиг. 1.

Здесь $T_1(\theta)$ и $\varepsilon_1(\theta)$ — осредненные по координате n , то есть по ширине бруса значения продольных (в направлении s) усилий и деформаций цилиндрической оболочки соответственно, а $\bar{\tau}_s(\theta)$ и $\bar{q}_s(\theta)$ — осредненные таким же образом значения неизвестных пока тангенциальных и радиальных контактных напряжений.

Интегрируя первое уравнение (1.2), получим

$$T_1(\theta) = \frac{R}{d} \int_{-\alpha}^{\theta} [\bar{\tau}_s(u) - \tau_{\theta s}(u)] du + C$$

Теперь примем во внимание очевидные граничные условия

$$T_1(-\alpha) = \frac{P_1}{d}, \quad T_1(\alpha) = \frac{P_2}{d} \quad (1.3)$$

откуда непосредственно обнаружим, что $C = P_1/d$ и, следовательно,

$$T_1(\theta) = \frac{R}{d} \int_{-\alpha}^{\theta} [\bar{\tau}_s(u) - \tau_{\theta s}(u)] du + \frac{P_1}{d} \quad (-\alpha \leq \theta \leq \alpha) \quad (1.4)$$

При этом второе граничное условие (1.3) эквивалентно, как покажем ниже, моментному условию равновесия кругового бруса

$$R \int_{-a}^a \bar{\tau}_{0s}(u) du = P \quad (1.5)$$

где

$$P = P_2 - P_1 + T_0, \quad T_0 = R \int_{-a}^a \bar{\tau}_{0s}(u) du$$

Заметим, что второе уравнение (1.2) можно записать также в виде

$$\frac{dq_s}{d\theta} = \bar{\tau}_{0s}(\theta) - \bar{\tau}_s(\theta) \quad (-a < \theta < a) \quad (1.6)$$

или, с учетом (1.4), в виде

$$\bar{q}_s(\theta) = -\frac{P_1}{R} - \int_{-a}^{\theta} [\bar{\tau}_s(u) - \bar{\tau}_{0s}(u)] du \quad (-a \leq \theta \leq a) \quad (1.7)$$

Далее, из (1.1) и (1.4) для осевой деформации ε бруса получим следующее выражение:

$$\varepsilon_s(\theta) = \frac{1}{A_s E_1} \left\{ P_1 + R \int_{-a}^{\theta} [\bar{\tau}_s(u) - \bar{\tau}_{0s}(u)] du \right\} \quad (-a < \theta < a) \quad (1.8)$$

где $A_s = h d$ — площадь поперечного сечения бруса.

Теперь запишем уравнения равновесия кругового бруса как абсолютно жесткого тела. Они имеют вид

$$\begin{aligned} R \int_{-a}^a \{ \bar{q}_s(\theta) \cos \theta + [\bar{\tau}_{0s}(\theta) - \bar{\tau}_s(\theta)] \sin \theta \} d\theta &= -(P_1 + P_2) \sin \alpha \\ R \int_{-a}^a \{ \bar{q}_s(\theta) \sin \theta - [\bar{\tau}_{0s}(\theta) - \bar{\tau}_s(\theta)] \cos \theta \} d\theta &= (P_2 - P_1) \cos \alpha \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$R \int_{-a}^a \frac{\bar{\tau}_{0s}(\theta) - \bar{\tau}_s(\theta)}{d} d\theta + R \frac{P_2}{d} - R \frac{P_1}{d} = 0$$

Интегрированием по частям и при помощи (1.6) можно показать, что первые два уравнения (1.9) удовлетворяются тождественно. Третье же уравнение (1.9), выражающее условие равенства нулю главного момента, как легко видеть, сводится к (1.5).

Таким образом, разрешающими уравнениями бруса будут уравнения (1.4)—(1.7). В эти уравнения в отличие от соответствующих уравнений для прямолинейных стрингеров помимо тангенциальных контактных на-

пряжений $\bar{\tau}_r(\theta)$ входят также поперечные, то есть радиальные контактные напряжения $q_r(u)$, которыми нельзя пренебрегать.

Отметим, что при больших R , как вытекает из второго уравнения (1.2), можно считать $\bar{q}_r(\theta) \approx 0$.

Обратимся теперь к упругой бесконечной пластине.

Приняв во внимание (1.6), при помощи известных результатов из [15] после простых выкладок для деформации в окружном направлении $\varepsilon_\theta^{(2)}$ от сосредоточенных вдоль круговой дуги радиуса R и раствора 2α тангенциальных и радиальных сил интенсивностей $\bar{\tau}_\theta(\theta)$ и $\bar{q}_r(\theta)$ соответственно получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta^{(2)} = & \frac{(1 + \nu_2)(3 - \nu_2)}{8\pi E_2 d_2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{ctg} \frac{u - \theta}{2} \bar{\tau}_\theta(u) du - \\ & - \frac{1 - \nu_2^2}{4\pi E_2 d_2} \left[\frac{\alpha}{R} (P_1 + P_2) - \int_{-\alpha}^{\alpha} u \bar{\tau}_\theta(u) du + \int_{-\alpha}^{\alpha} u \bar{q}_r(u) du \right] - \\ & - \frac{(1 + \nu_2)(3 - \nu_2)}{8\pi E_2 d_2} \left\{ \frac{1}{R} [P_1 \sin(\alpha + \theta) + P_2 \sin(\alpha - \theta)] + \right. \\ & \left. + \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin(u - \theta) \bar{q}_r(u) du \right\} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Далее запишем условие контакта в окружных деформациях

$$\varepsilon_\theta^{(2)} = \varepsilon_1(\theta) \quad (-\alpha < \theta < \alpha)$$

которое, конечно, неэквивалентно условию контакта в перемещениях и, тем самым, обуславливает приближенность постановки обсуждаемой задачи. Это условие с учетом (1.8) и (1.10) решение поставленной задачи окончательно сводит к решению следующего интегро-дифференциального уравнения:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{ctg} \frac{u - \theta}{2} \bar{\tau}_\theta(u) du = \lambda \varphi(\theta) + f(\theta) - \nu_0 C \quad (-\alpha < \theta < \alpha) \quad (1.11)$$

при граничных условиях

$$\varphi(-\alpha) = 0, \quad \varphi(\alpha) = 1 \quad (1.12)$$

вытекающих из (1.5).

Здесь введены обозначения

$$\lambda = \frac{8\pi R d_2 E_2}{(1 + \nu_2)(3 - \nu_2) h d E_1}, \quad \nu_0 = \frac{2(1 - \nu_2)}{3 - \nu_2}$$

$$\varphi(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \tau(u) du, \quad C = \int_{-\pi}^{\pi} u \tau(u) du$$

$$f(\theta) = \lambda \left[P_1 - \int_{-\pi}^{\pi} \tau_0(u) du \right] + \nu_0 \left[\alpha(P_1 + P_2) + \int_{-\pi}^{\pi} u \tau_0(u) du \right] + \\ + P_1 \sin(\alpha - \theta) + P_2 \sin(\alpha - \theta) + \int_{-\pi}^{\pi} \sin(u - \theta) \tau_0(u) du \quad (1.13)$$

$$\tau(u) = \frac{R_-}{\rho} \tau_-(u), \quad \tau_+(u) = \frac{R_+}{\rho} \tau_{0+}(u), \quad p_1 = \frac{P_1}{\rho}, \quad p_2 = \frac{P_2}{\rho}$$

При этом радиальные напряжения будут определяться по формуле

$$q(\theta) = -p_1 - \varphi(\theta) + \int_{-\pi}^{\pi} \tau_0(u) du, \quad q(\theta) = \frac{R_-}{\rho} \bar{q}_1(\theta) \quad (1.14)$$

Отметим, что интеграл в (1.11) следует понимать в смысле главного значения по Коши.

2. Сведение разрешающего интегро-дифференциального уравнения к бесконечной системе линейных уравнений. Решение уравнения (1.11) представим в виде

$$\tau(\theta) = \varphi'(\theta) = \frac{\sec \theta/2}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}} \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_n \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \quad (2.1) \\ (-\alpha < \theta < \alpha)$$

где $T_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) — многочлены Чебышева первого рода. Отсюда после простых выкладок получим

$$\varphi(\theta) = \sec \frac{\alpha}{2} \left[X_0 \left[z - \arccos \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \right] - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n} \sin \left[n \arccos \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \right] \right] \quad (-\alpha < \theta < \alpha) \quad (2.2)$$

при этом для вычисления интегралов от многочленов Чебышева положено

$$\cos t = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

Из граничных условий (1.12) непосредственно находим

$$X_0 = \frac{1}{\pi} \cos \frac{\alpha}{2}$$

Далее, следуя известной процедуре [6, 8], для определения неизвестных коэффициентов $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ получим следующую бесконечную систему уравнений:

$$X_m + \sum_{n=1}^{\infty} K_{m,n} X_n = f_m - \gamma_0 Ch_m \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

где введены обозначения

$$K_{m,n} = \frac{1}{n} \frac{2\lambda}{\pi^2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi \sin m\varphi \sin n\varphi}{1 + \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} d\varphi \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

$$f_m = \frac{1}{2\pi^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta) \frac{1/2 (\cos \theta - \cos \alpha)}{\cos \theta/2} U_{m-1} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) d\theta +$$

$$+ \frac{2\lambda}{\pi^2} X_0 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi - \varphi) \sin \varphi \sin m\varphi}{1 + \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} d\varphi + g_m \quad (2.4)$$

$$h_m = \begin{cases} \frac{2}{\pi} (-1)^{k-1} \cos \frac{\alpha}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} \right)^{2k-1}, & m = 2k - 1 \\ 0, & m = 2k \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$g_m = \begin{cases} \frac{2}{\pi} (-1)^k \cos \frac{\alpha}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} \right)^{2k}, & m = 2k \\ 0, & m = 2k - 1 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Здесь $U_{m-1}(x)$ ($m = 1, 2, \dots$) — многочлены Чебышева второго рода.

3. Исследование бесконечной системы линейных уравнений. Покажем, что для любого значения физического параметра λ ($0 \leq \lambda < \infty$) бесконечная система уравнений (2.3) квазивполне регулярна. С этой целью оценим суммы

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} |K_{m,n}| \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Из (2.4) можем записать

$$K_{m,n} = \frac{1}{n} R_{m,n} \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

где

$$R_{m,n} = \frac{2\lambda}{\pi^2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi \sin m\varphi \sin n\varphi}{1 + \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} d\varphi$$

После простых преобразований получим

$$S_m \leq \frac{\lambda \operatorname{tg} \alpha / 2}{2\pi^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|M_{m+n-1}|}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|M_{m-n+1}|}{n} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|M_{m+n+1}|}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|M_{m-n-1}|}{n} \right]$$

Здесь

$$|M_p| = \int_0^{\pi} \frac{|\sin p\varphi|}{1 + \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \alpha / 2} d\varphi \leq \frac{B}{|p|}; \quad B = \frac{2 + \pi \operatorname{tg}^2 \alpha / 2}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha / 2}$$

Оценив каждую сумму в выражении S_m , окончательно будем иметь

$$S_m \leq \frac{\lambda \operatorname{tg} \alpha / 2}{2\pi^2} \left\{ \frac{B}{m-1} \left[c + \ln(m-1) + \frac{1}{2(m-1)} - \chi(m-1) \right] + B_m + \right. \\ \left. + B \left[\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{3}{m+1} \left(c + \ln m + \frac{1}{2m} - \chi(m) \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{B}{m+1} \left[c + \ln(m+1) + \frac{1}{2(m+1)} - \chi(m+1) \right] + B_m + \right. \quad (3.1) \\ \left. + \frac{B}{m-1} \left[3c + \ln(m-1)(m-2)^2 + \frac{1}{2(m-1)} - \chi(m-1) - 2\chi(m-2) \right] \right\}$$

Здесь c — постоянная Эйлера, а функция

$$\chi(m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{m(m+1) \dots (m+k-1)}$$

где

$$A_k = \frac{1}{k} \int_0^1 x(1-x)(2-x) \dots (k-1-x) dx \quad (k=2, 3, \dots)$$

$$B_m = \begin{cases} B\pi^2/6 & \text{при } m=1 \\ 0 & \text{при } m=2, 3, \dots \end{cases}, \quad B_m^* = \begin{cases} B\pi^2/6 & \text{при } m=1 \\ B & \text{при } m=2, 3, \dots \end{cases}$$

Отсюда видно, что, по крайней мере,

$$\chi(m) = O\left(\frac{1}{m}\right) \text{ при } m \rightarrow \infty$$

Из неравенства (3.1) следует, что

$$S_m = O\left(\frac{1}{m^{1-\varepsilon}}\right) \text{ при } m \rightarrow \infty$$

где ε — сколь угодно малое положительное фиксированное число. Полученное равенство показывает, что бесконечная система (2.3) при любом значении параметра λ ($0 \leq \lambda < \infty$) квазивполне регулярна.

Далее, можно показать, что бесконечная система (2.3) при определенных значениях параметра λ вполне регулярна. Условие полной регулярности имеет вид

$$\lambda < \sqrt{\frac{3\varepsilon}{a} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}$$

Далее, можно показать, что свободные члены бесконечной системы (2.3) стремятся к нулю при $m \rightarrow \infty$ со скоростью не менее, чем $(m^{-1/2})$.

Займемся определением постоянной C . Пусть $\{X_m^{(f)}\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{X_m^{(h)}\}_{m=1}^{\infty}$ будут решениями бесконечной системы (2.3) при правых частях, равных $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$ соответственно. Тогда решение $\{X_m\}_{m=1}^{\infty}$ системы (2.3) будет даваться формулой

$$X_m = X_m^{(f)} - v_0 C X_m^{(h)} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.2)$$

С другой стороны, из (1.13) и (2.1) получим

$$C = \frac{X_0 C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n^{(f)}}{1 + v_0 \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n^{(h)}} \quad (3.3)$$

где

$$C_n = 2 \sec \frac{\alpha}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cos \varphi \right) \cos n\varphi d\varphi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.4)$$

Отметим, что исходя из (2.1), для коэффициентов интенсивностей тангенциальных контактных напряжений в концевых точках накладки получим

$$\begin{aligned} A_1 &= \lim_{b \rightarrow 0} \sqrt{a - b} \tau(b) = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} \left(X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \right) \\ A_2 &= \lim_{b \rightarrow a} \sqrt{a + b} \tau(b) = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} \left| X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n X_n \right| \end{aligned} \quad (3.5)$$

4. Числовой пример. При числовых расчетах было положено $\tau_{0,1}(0) = 0$ и рассмотрены два случая нагружения стрингера. В первом случае (симметричное нагружение) $P_1 = P_2$, тогда $P = 0$ и в качестве P формально можно принять P_1 , что даст $p_1 = p_2 = 1$. Поскольку в разбираемом случае распределение $\tau(\theta)$ нечетное, то вместо (2.1) будем иметь

$$\tau(\theta) = \frac{\sec \theta/2}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}} \sum_{n=1}^{\infty} X_{n-1} T_{n-1} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \quad (-\alpha < \theta < \alpha) \quad (4.1)$$

а вместо (1.14)

$$q(\theta) = -1 + \sec \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{2n-1}}{2n-1} \sin \left[(2n-1) \arccos \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \right] \quad (4.2)$$

$$(-\pi < \theta < \pi)$$

Соответствующая (2.3) бесконечная система имеет вид

$$X_{2m-1} + \sum_{n=1}^{\infty} K_{2m-1, 2n-1} X_{2n-1} = f_{2m-1} - v_0 C h_{2m-1} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (4.3)$$

где

$$f_{2m-1} = (-1)^{m-1} \frac{1}{\pi} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} \right)^{2m-1} \left| 2(\lambda + 2\alpha v_0) \sin \frac{\alpha}{2} + \right.$$

$$\left. + 2(2m-1) \sin^2 \alpha \right| \quad (m = 1, 2, \dots)$$

$$h_{2m-1} = (-1)^{m-1} \frac{2}{\pi} \cos \frac{\alpha}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} \right)^{2m-1}$$

а выражение $K_{2m-1, 2n-1}$ дается формулой (2.4). Отметим, что из (4.2)

$$q(\pi) = -1$$

а из (3.3)

$$C = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} C_{2n-1} X_{2n-1}^{(f)}}{1 + v_0 \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n-1} X_{2n-1}^{(h)}}$$

Численная реализация (4.1) — (4.3) была осуществлена при

$$\alpha = \frac{\pi}{8}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{8}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{4}$$

$$\lambda = 0; 2; 6; \quad v_2 = 0, 3$$

причем каждое значение λ сочеталось со всеми заданными значениями α . Сначала на ЭВМ «ЕС-1022» была решена соответствующая (4.3) укороченная система. Затем вычисления производились по формулам (4.1) и (4.2). Коэффициенты интенсивности A_1 и A_2 ($A_2 = -A_1$) считались по формуле (3.5). Значения $\tau(0)$ и $q(0)$, вычисленные с точностью до 10^{-1} , приведены на графиках (фиг. 2—4), а значения A_1 — в табл. 1.

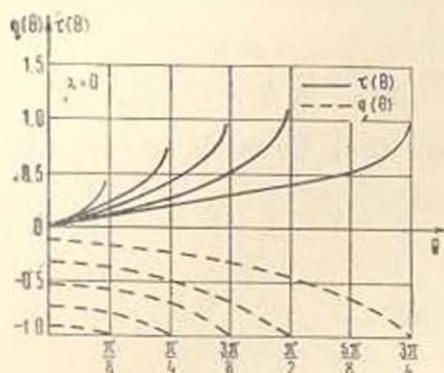
Анализ этих результатов показывает, что по мере возрастания размеров контактной зоны напряжения $\tau(0)$ и $q(0)$ (по абсолютной величине) заметно падают. Такую же закономерность можно обнаружить при возрастании λ , то есть при уменьшении жесткости системы стрингер-основание. Из табл. же 1 видно, что по мере возрастания α и λ коэффициент A_1 , вообще

говоря, заметно увеличивается. Последнее обстоятельство указывает на то, что при возрастании этих параметров нагрузка, в основном, поглощается в концевых зонах стрингера.

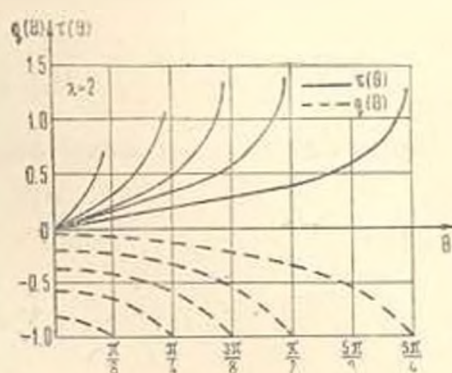
Таблица 1

α \ λ	0,0	2,0	6,0
$\pi/8$	0,07952	0,20298	0,40701
$\pi/4$	0,18999	0,33055	0,54036
$3\pi/8$	0,26552	0,40041	0,59572
$\pi/2$	0,28523	0,41314	0,59863
$3\pi/4$	0,27247	0,39740	0,58322

Во втором случае (кососимметрическое нагружение) $P_2 = -P_1$. В этом случае $P = 2P_1$ и соответствующие (4.1) — (4.3) формулы будут



Фиг. 2.



Фиг. 3.

$$\tau(\theta) = \frac{\sec \theta/2}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}} \left[\frac{1}{\pi} \cos \frac{\alpha}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n} T_{2n} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \right] \\ (-\alpha < \theta < \alpha)$$

$$q(\theta) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sec \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{2n}}{n} \sin \left[2n \arccos \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \right] + \\ + \frac{1}{\pi} \arccos \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \quad (-\alpha < \theta < \alpha) \quad (4.4)$$

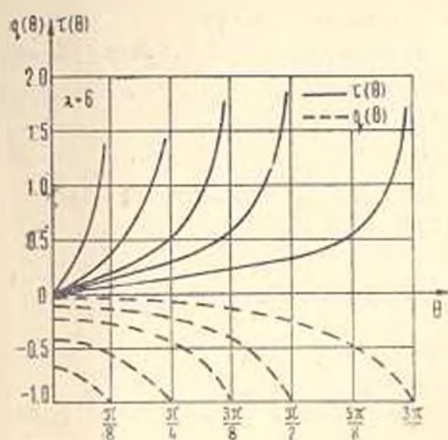
$$X_{2m} + \sum_{n=1}^{\infty} K_{2m, 2n} X_{2n} = f_{2m} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (4.5)$$

где

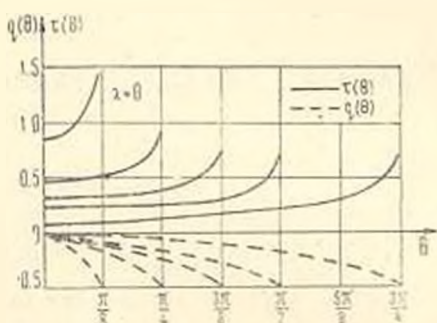
$$f_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} \right)^{2m} \left(m \sin 2\alpha + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \right) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

а $K_{2m, 2n}$, как ранее, дается формулой (2.4), причем $q(\alpha) = -1/2$.

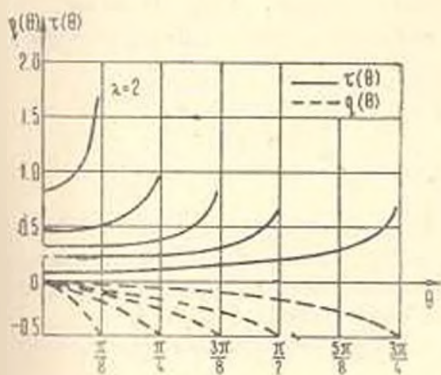
Ход изменения $\tau(\theta)$ и $q(\theta)$ при указанных выше значениях параметров α и λ показан на графиках (фиг. 5—7). Закономерности их изменения



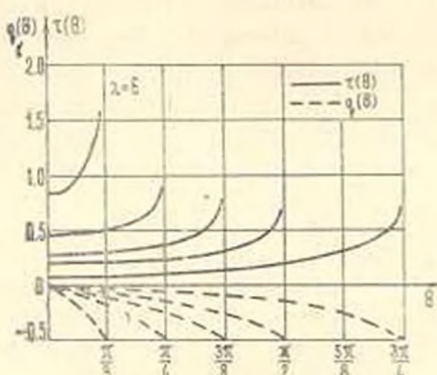
Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

те же, что и в первом случае. Вдобавок здесь можно утверждать, что при $2\alpha < \pi/4$ напряжениями $q(\theta)$ (по абсолютной величине) можно пренебрегать по сравнению с $\tau(\theta)$.

ՈՒՅԻ ՓՈԽԱՆՅՈՒՄԸ ՕՂԱԿԱԶԵՎ ՎԵՐԱԿՐԻՒՑ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԱՆՎԵՐՋ ՍԱԼԻՆ

ՈՒ. Մ. ՄԽԻՔԱՐՅԱՆ, Ռ. Ս. ԹՈՒՄԱՆՅԱՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Մ

Աղյուսակում ներկայացված է առաձգական անվերջ սալի համար հարթ կոնտակտային խնդիր, երբ վերջինս ուժեղացված է փոքր հաստություն ունեցող առաձգական շրջանային վերադիրով:

ենդրի լուծումը բերվում է սինգուլյար ինտեգրո-գիֆերենցիալ համասարման լուծմանը որոշակի եզրային պայմանների ղեկարում: Չերիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների ապարատի օգնությամբ այդ համասարումը իր հերթին բերվում է սեկուլյար անոմերի գծային համասարումների սխեմեի:

Խառնաժողովրդական համար ստացված են թվային արդյունքներ, որոնք ներկայացված են աղյուսակի և գրաֆիկների տեսքով:

A LOAD TRANSFER FROM CIRCULAR STRINGER TO AN ELASTIC INFINITE PLATE

S. M. MKHITARIAN, R. S. TUMANIAN

S u m m a r y

The contact problem for load transfer from a stringer with a circular axis to an elastic infinite plate is considered.

The solution of this problem is reduced to a solution of singular integro-differential equation with Gilbert's kernel. This equation, by means of Chebishev polynomials, is reduced to an equivalent regular infinite system of linear equations.

Numerical examples are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976.
2. Стернберг Е., Муки Р. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине. Прикладная механика.— Тр. американского о-ва инженеров-механиков, русский перевод, серия Е, 1968, т. 35, № 4.
3. Арутюнян Н. Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
4. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками.— ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
5. Arutunian N. K., Mkhitarian S. M. Some contact problems for a semi-plane with elastic stiffeners. Trends in elasticity and thermoelasticity. Witold Novacki Anniversary Volume, Groningen. Wolters-Noordhoff Publ., 1971, p. 3—20.
6. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
7. Морарь Г. А., Попов Г. Я. К периодической контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
8. Морарь Г. А., Попов Г. Я. К периодической контактной задаче для полуплоскости с упругими накладками.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
9. Александров В. М., Солодовник М. Д. Эффективный метод решения задачи о взаимодействии накладки (стрингера) с упругой полуплоскостью и некоторые новые качественные результаты. Труды X Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Т. 1, Тбилиси: Изд-во Мецниереба, 1975.
10. Александров В. М., Соловьев А. С. Некоторые смешанные плоские задачи теории упругости и их приложение к расчету погрешностей тензонищений.— Изв. АН СССР, МТТ, 1970, № 1.
11. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962.

12. Лурье А. И. Общая теория упругости тонких оболочек.—ПММ. 1940, т. 4, вып. 2.
13. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. М.—Л.: Гостехиздат. 1947.
14. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. А. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963.
15. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.

Институт механики АН Армянской ССР
Кироваканский филиал Ереванского
политехнического института им. К. Маркса

Поступила в редакцию
19.IV. 1982