

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В ТЕОРИИ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ
 ОБОЛОЧЕК

РОГАЧЕВА Н. Н.

В работе [1] получены уточненные уравнения пьезокерамических оболочек, предварительно поляризованных в направлении нормали к средней поверхности. Здесь тем же приближенным методом [2] на трехмерных граничных условиях выведены двумерные граничные условия пьезокерамических оболочек для различных случаев закрепления электродированных и неэлектродированных краев.

1 Будем рассматривать такие оболочки, у которых лицевые поверхности либо полностью покрыты электродами, на которых известно значение электрического потенциала, либо оболочки, лицевые поверхности которых не имеют электродов. Полная система уравнений в [1] разбита на две группы уравнений. В первую группу вошли уравнения, совпадающие после исключения электрических величин с точностью до постоянных коэффициентов с системой уравнений неэлектрических оболочек. В [1] в трехмерные уравнения был введен несимметричный тензор напряжений. Если, кроме того, вместо вектора электрической индукции D^* и вектора напряженности электрического поля E^* ввести новые величины по формулам (эти величины удобны при получении граничных условий)

$$D_i = a_i D_i^*, \quad D_3 = a_3 a_3 D_3^*, \quad F_i = a_i E_i^*, \quad E_3 = a_1 a_2 E_3^* \quad (1.1)$$

то уравнения первой группы примут вид, отличающийся от [1] малыми членами

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{2h}{s_{11}^E (1-\nu^2)} (\epsilon_i + \nu \epsilon_j) - \frac{2hd_{31}}{s_{11}^E (1-\nu)} E_3^{(0)} - \left[\frac{hs_{13}^E}{s_{11}^E (1-\nu)} (q_3^+ - q_3^-) \right] \\ S_{ij} &= \frac{2h}{s_{66}^E} \omega, \quad H_{ij} = \frac{4h^3}{3s_{66}^E} \left(\tau - \frac{\omega}{2R_j} \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} G_i &= -\frac{2h^3}{3s_{11}^E (1-\nu^2)} (\alpha_i + \nu \alpha_j) + \frac{2h^3 d_{31}}{3s_{11}^E (1-\nu)} E_3^{(0)} + \\ &+ \left\{ \frac{2h^3}{3s_{66}^E (1-\nu^2)} \left[\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_j} \right) \epsilon_i - \frac{s_{13}^E}{s_{11}^E (1-\nu)} \left(\frac{1}{R_i} + \frac{\nu}{R_j} \right) (\epsilon_i - \epsilon_j) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(d_{31} - \frac{2s_{13}^E d_{31}}{s_{11}^E (1-\nu)} \right) \left(\frac{1}{R_i} + \frac{\nu}{R_j} \right) E_3^{(0)} - \frac{d_{31} (1+\nu)}{R_i} E_3^{(0)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{s_{13}^E (1+\nu)}{2h} (q_3^+ + q_3^-) \right] \right\} \end{aligned}$$

Уравнения второй группы служат для определения электрических величин. Выпишем их

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} &= -E_3^{(0)}, & \psi^{(2)} &= -\frac{1}{2}E_3^{(1)} + \frac{\psi^{(1)}}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \\ E_i^{(1)} &= -\frac{1}{A_i} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \alpha_i}, & E_i^{(2)} &= -\frac{1}{A_i} \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \alpha_i} \\ E_3^{(1)} &= -\frac{3d_{33}}{2h\epsilon_{33}^T} (G_1 + G_2) - \left\{ \frac{1}{2h} \frac{d_{31}}{\epsilon_{33}^T} \left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} \right) + \frac{d_{15}}{2h\epsilon_{33}^T} (q_3^+ + q_3^-) \right\} \\ D_i^{(0)} &= \epsilon_{31}^T E_i^{(0)} - \frac{d_{15}}{4h} [3N_i + h(q_i^+ - q_i^-)] \\ D_i^{(1)} &= \epsilon_{31}^T E_i^{(1)} - \frac{d_{15}}{2h} (q_i^+ + q_i^-) + \left\{ \epsilon_{31}^T \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) E_i^{(0)} + \frac{d_{15}}{2R_2} (q_i^+ - q_i^-) \right\} \\ D_i^{(2)} &= \epsilon_{31}^T E_i^{(2)} + \frac{3d_{33}}{4h^2} [N_i + h(q_i^+ - q_i^-)] - \left\{ \frac{d_{15}}{2hR_1} (q_i^+ + q_i^-) \right\} \\ D_3^{(1)} &= -\frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 D_1^{(0)} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 D_2^{(0)} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Все используемые обозначения, кроме введенных формулой (1.1), взяты из [1].

Как и в [1], взята триортогональная система координат $\alpha_1, \alpha_2, \gamma$, где α_1, α_2 -линии совпадают с линиями кривизны срединной поверхности оболочки, а γ -линии им ортогональны.

Каждая из искоемых величин представлена в виде полинома по степеням γ , например,

$$E_3 = E_3^{(0)} + \gamma E_3^{(1)}$$

Остальные уравнения второй группы выпишем отдельно для случаев электродированных и неэлектродированных лицевых поверхностей.

Если лицевые поверхности полностью покрыты электродами, на которых известно значение электрического потенциала, то условия на лицевых поверхностях записываются следующим образом:

$$\psi|_{\gamma=0, \pm h} = \pm V \quad (1.4)$$

и остальные уравнения второй группы принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} E_3^{(0)} &= -\frac{V}{h}, & \psi^{(1)} &= \frac{V}{h}, & \psi^{(2)} &= -h^2 \psi^{(2)} \\ E_i^{(1)} &= 0, & D_3^{(0)} &= \epsilon_{33}^T E_3^{(0)} + \frac{d_{33}}{2h} (T_1 + T_2) + \left\{ \frac{d_{33}}{2} (q_3^+ - q_3^-) \right\} \\ (i+1) D_3^{(i+1)} &= -\frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 D_1^{(i)} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 D_2^{(i)} \right) \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (1.5)$$

На неэлектродированных лицевых поверхностях должно выполняться следующее условие:

$$D_3|_{T=\tau_0} = 0 \quad (1.6)$$

и уравнения (1.3) надо дополнить следующими формулами:

$$E_3^{(0)} = -\frac{d_{33}}{2h^2\tau_0} (T_1 + T_2) - \left| \frac{d_{33}}{2\tau_0} (q_3^+ - q_3^-) \right|$$

$$E_1^{(0)} = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial \varphi_3^{(0)}}{\partial x_1}, \quad D_1^{(0)} = -h^2 D_3^{(2)} \quad (1.7)$$

$$D_3^{(1)} = -h^2 D_3^{(3)}, \quad D_3^{(3)} = -\frac{1}{2A_1 A_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} A_2 D_1^{(2)} + \frac{\partial}{\partial x_2} A_1 D_2^{(2)} \right)$$

Последнее уравнение из (1.3) можно с помощью формул (1.3), (1.7) записать таким образом:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \left(\varphi_3^{(0)} + \frac{h^2}{3} \varphi_3^{(2)} \right) + \frac{d_{13}}{2h^2\tau_0} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} A_2 N_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} A_1 N_2 \right) = 0 \quad (1.8)$$

Для оболочек с электродированными лицевыми поверхностями, на которых заданы условия (1.4), первая группа уравнений представляет замкнутую систему уравнений относительно механических величин. После того как найдены механические величины, электрические величины определяются прямыми действиями по формулам второй группы (1.3), (1.5). Для оболочки с лицевыми поверхностями, не покрытыми электродами, уравнения второй группы содержат дифференциальное уравнение (1.8) относительно электрического потенциала $\varphi_3^{(0)}$, и вопрос о возможности раздельного определения механических и электрических величин должен решаться в зависимости от вида условий на краях оболочки.

2. Полное электроупругое состояние пьезокерамической оболочки так же, как в теории неэлектрических оболочек [2], будем представлять в виде суммы внутреннего электроупругого состояния, описываемого двумерными уравнениями [1], и погранслоя — существенно трехмерного электроупругого состояния, локализованного вблизи края.

На краю оболочки внутреннее электроупругое состояние и погранслоем связаны граничными условиями. Чтобы получить двумерные граничные условия, надо исследовать взаимодействие внутреннего электроупругого состояния с погранслоем подобно тому, как это сделано в [2].

При выводе граничных условий будем допускать погрешность порядка ϵ , где

$$\epsilon = O(\tau_0^{2-2\epsilon}) \quad (2.1)$$

здесь ϵ — отношение полутолщины оболочки h к характерному размеру

R, λ — показатель изменчивости внутреннего электроупругого состояния. С такой же погрешностью получены уравнения пьезокерамических оболочек в [1].

Будем считать, что рассматриваемый край оболочки совпадает с линией $\alpha_1 = \alpha_{10}$ и выполним обычную для асимптотического метода замену переменных

$$\alpha_1 - \alpha_{10} = R^{-1} \xi_1, \quad \gamma_1 = R^{-1} \xi_2, \quad z = R^{-1} \xi_3 \quad (2.2)$$

Это преобразование означает, что отыскивается электроупругое состояние, которое имеет одинаково большую изменчивость по переменным α_1 и γ_1 и гораздо меньшую изменчивость по переменной z .

Следуя [2], выполним расчленение уравнений погранслоя на уравнения плоского и антиплоского погранслоя. В исходном приближении уравнения плоского погранслоя представляют уравнения плоской задачи электроупругости, а уравнения антиплоского погранслоя с точностью до коэффициентов совпадают с уравнениями антиплоской задачи теории упругости.

Для некоторых величин плоского и антиплоского погранслоя применим следующую асимптотику (ее справедливость подтверждается тем фактом, что в исходном приближении эта асимптотика приводит к непротиворечивым системам уравнений):

$$(S_{11}^k, S_{12}^k, S_{22}^k, v_1^k/h, D_1^k) = \tau^k (S_{11}^k, S_{12}^k, S_{22}^k, V_{20}^k, D_{20}^k) \quad (2.3)$$

$$(S_{11}^k, S_{22}^k, S_{33}^k, S_{13}^k, v_1^k/h, v_2^k/h, \gamma^k/h, E_1^k, E_2^k, D_1^k, D_2^k) = \\ = \tau^{k-1} (S_{11}^k, S_{22}^k, S_{33}^k, V_{10}^k, V_{30}^k, \gamma_0^k, E_1^k, E_2^k, D_1^k, D_2^k) \\ E_2^k = \tau^{k-2} E_2^k \quad (2.4)$$

Степени η подобраны таким образом, чтобы величины со звездочками были одного порядка.

Верхний индекс k следует заменить индексом a , если искомая величина принадлежит антиплоскому погранслою, и индексом b , если величина относится к плоскому погранслою. Для антиплоской задачи следует положить

$$r = 0 \quad (2.5)$$

а для плоской

$$r = 1 - l \quad (2.6)$$

Выполнив в трехмерных уравнениях пьезоупругости замену переменных (2.2) и приняв во внимание асимптотику (2.3)–(2.6), разобьем полученную систему на две подсистемы. В одной из подсистем главными являются величины антиплоского погранслоя (2.3), (2.5) и в другой подсистеме главными являются величины плоского погранслоя (2.4), (2.6).

Выпишем в исходном приближении уравнения антиплоского и плоского погранслоев

$$\frac{1}{A_{10}} \frac{\partial S_{21}^a}{\partial \xi_1} + \frac{\partial S_{21}^a}{\partial \xi_2} = 0$$

$$\frac{1}{A_{10}} \frac{\partial V_2^a}{\partial \xi_1} = s_{11}^E S_{21}^a = s_{66}^E S_{21}^a, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial V_2^a}{\partial \xi_2} = s_{41}^E S_{21}^a, \quad D_2^a = d_{15} S_{21}^a.$$

$$S_{21}^a|_{\xi_1=0} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{A_{10}} \frac{\partial S_{11}^b}{\partial \xi_1} + \frac{\partial S_{13}^b}{\partial \xi_2} = 0, \quad \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial S_{31}^b}{\partial \xi_1} + \frac{\partial S_{33}^b}{\partial \xi_2} = 0$$

$$\frac{1}{A_{10}} \frac{\partial V_1^b}{\partial \xi_1} = s_{11}^E S_{11}^b + s_{12}^E S_{22}^b + s_{13}^E S_{33}^b + s_{23}^E E_3^b$$

$$s_{12}^E S_{11}^b + s_{11}^E S_{22}^b + s_{13}^E S_{33}^b + d_{31} E_3^b = 0$$

$$\frac{\partial V_3^b}{\partial \xi_2} - s_{13}^E S_{11}^b - s_{11}^E S_{22}^b - s_{23}^E S_{33}^b - d_{31} E_3^b = 0$$

$$\frac{\partial V_{13}^b}{\partial \xi_2} + \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial V_2^b}{\partial \xi_1} - s_{41}^E S_{13}^b - d_{15} E_3^b = 0$$

$$D_1^b - \varepsilon_{11} E_1^b - d_{15} S_{13}^b = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{A_{10}} \frac{\partial D_1^b}{\partial \xi_1} + \frac{\partial D_3^b}{\partial \xi_2} = 0$$

$$D_3^b = -\varepsilon_{33} E_3^b + d_{31} (S_{11}^b + S_{22}^b) + d_{33} S_{33}^b$$

$$E_1^b = -\frac{1}{A_{10}} \frac{\partial \psi_1^b}{\partial \xi_1}, \quad E_3^b = -\frac{\partial \psi_3^b}{\partial \xi_2}$$

$$A_{10} = A_2|_{\xi_1=0}$$

$$S_{31}^b|_{\xi_1=0} = 0, \quad S_{13}^b|_{\xi_1=0} = 0 \quad (2.10)$$

$$\psi_1^b|_{\xi_1=1} = 0 \quad (2.11)$$

$$D_3^b|_{\xi_1=0} = 0 \quad (2.12)$$

Так как механическая и электрическая нагрузки учитываются при интегрировании уравнений внутреннего электроупругого состояния, то для погранслоя взяты нулевые условия на поверхностях $\xi = 1$ и $\xi = -1$ (2.8), (2.10)–(2.12).

3. Рассмотрим свободный край $\alpha_1 = \alpha_{10}$ оболочки с электродированными лицевыми поверхностями и неэлектродированной поверхностью края.

Трехмерные граничные условия в рассматриваемом случае имеют следующий вид:

$$\tau_1 = 0, \quad \tau_{21} = 0, \quad \tau_{33} = 0, \quad D_1 = 0 \quad (3.1)$$

Число p определяется из решения II вспомогательной задачи по формуле

$$p = \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-1}^0 S_{22}^b A_{10} \zeta_1 A_{10} d\zeta_1 + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \zeta^2 S_{11}^b |_{\zeta=0} d\zeta$$

Граничные условия на свободном электродированном крае $\xi_1 = 0$ имеют следующий вид:

$$T_1 = 0, \quad S_1 - n_1 \frac{hd_{31}}{2\epsilon_{33}} \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_2}{\partial x_2} = 0$$

$$N_1 - \frac{h}{R_2} \frac{n_1 d_{31}}{2\epsilon_{33}} T_2 - \frac{1}{A_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} = 0$$

$$G_1 + 3l \frac{h}{A_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} = 0, \quad \psi^{(0)} - \frac{d_{31}}{4h\epsilon_{33}} \left(G_2 - 3l \frac{h}{A_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \right) = V$$

Для вычисления n_1 надо решить вспомогательную плоскую задачу со следующими торцевыми условиями:

$$S_{11}^b = 0, \quad S_{12}^b = 0, \quad \psi_2^b + \zeta = 0$$

а затем вычислить n_1 по формуле:

$$n_1 = \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-1}^0 S_{22}^b A_{10} d\zeta_1$$

Последние граничные условия получены с точностью до величин порядка η^4 . Это связано с тем, что в граничном условии для перерезывающего усилия второй член, учитывающий влияние погранслоя, $O(\eta^4)$ по сравнению с главным первым членом. Вычислив константу n_1 с точностью до величин $O(\eta^{1-4})$, получим граничные условия с точностью до величин $O(\eta^4)$.

Итак, получены граничные условия для оболочек с предварительной поляризацией в направлении нормали к срединной поверхности. Для оболочек с электродированными лицевыми поверхностями они оказались аналогом граничных условий неэлектрических оболочек.

Полная система уравнений, описывающая оболочки, не имеющие электродов на лицевых поверхностях, десятого порядка. В соответствии с этим на каждом крае оболочки получено пять граничных условий — четыре механических и одно, связывающее электрический потенциал с моментами и усилиями. Если все края такой оболочки неэлектродированы, то механическую и электрическую задачи можно решать отдельно. Если же хоть один край оболочки электродирован, задача не допускает расщепления на механическую и электрическую задачи.

ԵՋՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐ ՊՅԵՉՈՒՆԵՐԱԼԻԳԻԿ ԻԱՂԱՆԹԻՆԵՐԻ
ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԼԳԻՉ

Ն. Ն. ՌՈԳԱՉԵՎԱ

Ա մ փ ո փ ո ռ ը

Ներկա աշխատանքում մոտավոր մեթոդով ստացված են միջին մակերևույթի նորմալի ուղղությամբ բեռնացված պլեզոկերամիկ թաղանթների տեսության ճշգրտված եզրային պայմաններ: Որպես էլեկտրալին հաճախարումներ վերցված են պլեզոստատոգրաֆիայի տեսության համապատասխան Պլեզոկերամիկական թաղանթի լրիվ էլեկտրաստատոգրաֆիկական դիտարկվում է որպես նեոցին էլեկտրաստատոգրաֆիկական և սահմանային շերտերի զուգորդում: Նրանց փոխներգործության հաշվառումով եզրի վրա ստացված են երկրափ եզրային պայմաններ:

BOUNDARY CONDITION IN PIEZOCERAMIC SHELL THEORY

N. N. ROGACHEVA

S u m m a r y

In this paper an approximate method is used to obtain refined boundary conditions of the theory of piezoceramic shell, polarized in normal direction. Three-dimensional equations of piezoelasticity are taken as initial. The complete electroelastic state of a piezoelastic shell is considered as a sum of the entire electroelastic state and the boundary layer. Taking into account their interaction at the edge, two-dimensional boundary conditions are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рогачева Н. Н.* Уточненная теория свдзсэргимических оболочек. — Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1981, т. 34, № 1.
2. *Галденсейлер А. А.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976.
3. *Улитко А. Ф.* К теории колебаний пьезокерамических тел. В кн. «Гиполовые напряжения в элементах конструкций». 15. К.: Наукова думка, 1975.

Институт проблем механики АН СССР

Получила в редакцию
10.11.1982