

## МАКСИМИЗАЦИЯ ЖЕСТКОСТИ НА КРУЧЕНИЕ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ ИЗ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

БАНИЧУК Н. В. ЛАРИЧЕВ А. Д.

Исследуется задача оптимизации скручиваемого стержня из композитного материала. В качестве максимизируемого функционала принимается жесткость на кручение. Материал стержня предполагается армированным жесткими включениями. Используется расчетная схема деформирования материалов, базирующаяся на представлениях о микроструктурных особенностях и эффективных модулях. В этой схеме эффективные модули композита связаны с характеристиками армирующего материала и матрицы, коэффициентом концентрации включений. Между эффективным модулем сдвига  $G$  и коэффициентом концентрации  $\psi$  имеет место линейная зависимость. В рассматриваемой ниже задаче оптимизации  $\psi$  играет роль «управляющей» функции и развязывается из условия максимизации функционала жесткости. Для отыскания оптимальных распределений  $\psi$  используется итерационный алгоритм, основанный на малых вариациях управляющей функции и решения «прямых» вариационных задач. Приводятся результаты расчетов. Дается анализ найденных оптимальных решений. Оценивается выигрыш, получаемый при оптимизации.

1. Рассмотрим кручение упругого цилиндрического стержня. Стержень расположен параллельно оси  $z$  в прямоугольной системе координат  $x, y, z$  и закручивается относительно этой оси моментами  $M$ , приложенными к его концам. Сечение стержня плоскостью  $xy$  обозначим через  $D$ , а границу области  $D$  — через  $\Gamma$ . Предполагается, что стержень является неоднородным, однако, характеристики материала и, в частности, модуль сдвига  $G$  не меняются в направлении оси  $z$ , а зависят только от координат  $x, y$ . Введем функцию напряжений  $\varphi(x, y)$ , которая связана с компонентами тензора напряжений  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  соотношениями  $\tau_{xz} = G\varphi_x, \tau_{yz} = -G\varphi_y$ , где  $\psi$  — угол закручивания, приходящийся на единицу длины стержня. Функция напряжения  $\varphi = \varphi(x, y)$  может быть найдена как решение вариационной задачи минимизации интеграла

$$J = \int_D \int \left[ \frac{1}{G} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) - 4\varphi \right] dx dy \quad (1.1)$$

при граничном условии

$$(\varphi)_{\Gamma} = 0 \quad (1.2)$$

Прежде чем формулировать задачу оптимизации, опишем свойства материала стержня и приведем соотношения, связывающие величину моду-

ля сдвига со структурными параметрами. Среда предполагается композитной, состоящей из связующего материала и арматуры в виде отрезков круговых цилиндрических волокон равной длины. Предположим, что отрезки волокон хаотически распределены в пространстве и что их радиусы много меньше их длин, то есть  $r \ll h$ . Будем считать, что связующая среда деформируется упруго и обозначим ее модуль сдвига через  $G_m$ . Кроме того, считается, что число отрезков волокон в рассматриваемом объеме достаточно велико и в каждом волокне реализуется упругое одноосное напряженное состояние. Это позволяет рассматривать композит как макроскопически однородную изотропную среду. При этом эффективный модуль сдвига среды  $G$  связан с коэффициентом объемного содержания арматуры  $v$  (коэффициентом концентрации) линейной зависимостью [1]

$$G = Av + B, \quad A = \frac{E_a}{15} - G_m, \quad B = G_m \quad (1.3)$$

где  $E_a$  — модуль Юнга арматуры. При варьировании распределения  $v$  изменяется величина жесткости стержня на кручение  $K$ , определяемая в силу (1.1)—(1.3) и формулы

$$K = 2 \iint_D \tau dx dy \quad (1.4)$$

В рассматриваемой ниже задаче оптимизации в качестве оптимизируемого функционала примем жесткость на кручение  $K$ . Фоль искомой управляющей функции будет играть  $v$ , определяемая из условия максимума функционала качества (1.4) при дополнительных ограничениях

$$0 \leq v_{\min} \leq v \leq v_{\max} \leq 1 \quad (1.5)$$

$$\iint_D v dx dy = V \quad (1.6)$$

где  $v_{\min}$ ,  $v_{\max}$  — заданное минимальное и максимальное допустимые значения концентрации включений, а  $V$  — заданное количество арматуры, причем  $v_{\min} \text{mes } D \leq V \leq v_{\max} \text{mes } D$ .

Нетрудно показать [2], что для функции  $\varphi$ , доставляющей минимум функционала (1.1), при граничном условии (1.2) справедливо равенство  $K = -J$ . Таким образом, исходная задача максимизации жесткости на кручение может быть приведена к виду

$$K_c = \max K = - \min \min J \quad (1.7)$$

Внутренний минимум по  $\varphi$  в (1.7) вычисляется при фиксированном распределении  $v(x, y)$  и граничном условии (1.2). Внешний минимум по  $v$  разыскивается при ограничениях типа неравенств (1.5) и изопериметрическом условии (1.6).

Необходимое условие оптимальности показывает, что в рассматриваемой задаче для оптимального решения могут реализоваться как предельные значения управляющей функции  $v = v_{\min}(G = G_{\min})$ ,  $v = v_{\max}(G = G_{\max})$ , так и промежуточные значения, определяемые формулой  $v = (\lambda \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} - B)/A$ , то есть

$$v = \begin{cases} v_{\min}, & (x, y) \in D_- \\ (\lambda \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} - B)/A, & (x, y) \in D_0 \\ v_{\max}, & (x, y) \in D_+ \end{cases} \quad (1.8)$$

где  $\lambda$  — множитель Лагранжа, отвечающий изопериметрическому условию (1.6).  $D_-$ ,  $D_0$ ,  $D_+$  — части области  $D$ , в которых соответственно реализуются минимальное, максимальное и промежуточные значения концентрации  $v$ .

Выполнимость условия экстремума Вейерштрасса в случае  $B = 0$  доказана в [3]. В случае  $B \neq 0$  проверка выполнимости этого условия осуществляется при помощи выкладок, полностью аналогичных, приведенным в [3].

Решение одномерной задачи оптимизации для стержня круглого сечения получено в [4]. Отметим, что для круглого стержня концентрация армирующих включений  $v(x, y)$  принимает только предельные значения  $v = v_{\min}$  и  $v = v_{\max}$ , а зона  $D_0$  промежуточных значений концентрации  $v_{\min} < v < v_{\max}$  отсутствует.

2. Исходная задача решалась численно с использованием алгоритма последовательной оптимизации [2]. Применительно к отысканию оптимальных распределений армирующего материала, алгоритм состоит в решении «прямых» задач (1.1), (1.2) при заданных функциях  $G(x, y)$  и последующем определении по методу проектирования градиентов новых реализаций  $v(x, y)$ , приводящих к увеличению функционала  $K$ .

Решение «прямых» задач проводилось на основе метода локальных вариаций с оптимальным шагом варьирования. Применялась треугольная схема разбиения области  $D$  (фиг. 1) и выпуклая конечно-разностная аппроксимация вариационной задачи (1.1), (1.2) с одним обращением к вычислению подынтегральной функции [5]. Выражение для оптимального шага варьирования  $\delta\varphi_{ij}$  функции напряжения имеет вид

$$\delta\varphi_{ij} = (4 + C_1\varphi_{i,j-1} + C_2\varphi_{i,j+1} + C_3\varphi_{i-1,j} + C_4\varphi_{i+1,j}) / (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) - \varphi_{ij},$$

$$C_1 = (1/G_{i,2j} + 1/G_{i+1,2j-1})/\Delta y^2, \quad C_2 = (1/G_{i,2j+2} + 1/G_{i+1,2j+1})/\Delta y^2 \quad (2.1)$$

$$C_3 = (1/G_{i,2j} + 1/G_{i,2j+1})/\Delta x^2, \quad C_4 = (1/G_{i+1,2j+1} + 1/G_{i+1,2j})/\Delta x^2$$

где  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  — размеры ячейки по оси  $x$  и оси  $y$ .

Для учета ограничений (1.5), накладываемых на функцию  $v(x, y)$ , вводилась вспомогательная управляющая переменная  $\chi(x, y)$  соотношением

$$v = \alpha + \beta \sin \chi \quad (2.2)$$

$$\alpha = (v_{\max} + v_{\min})/2, \quad \beta = (v_{\max} - v_{\min})/2$$

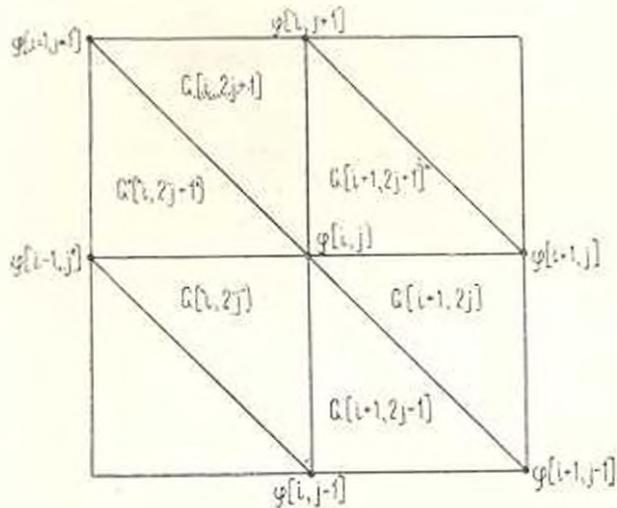
Введенная согласно (2.2) новая управляющая  $\chi(x, y)$  удовлетворяет неравенствам (1.5) для любых значений  $(x, y) \in D$ . Единственное ограничение, накладываемое на функцию  $\chi$  и ее вариацию  $\delta\chi$ , обусловлено изопериметрическим равенством (1.6). Для того, чтобы вариации управляющей функции не нарушали изопериметрического условия, требуется удовлетворение равенства

$$\int_D \cos \chi \delta\chi \, dx dy = 0 \quad (2.3)$$

С учетом (2.3) улучшающую вариацию управляющей функции определим по методу проектирования градиентов

$$\delta\chi = -\cos \chi \left( f - \frac{\int_D f \cos^2 \chi \, dx dy}{\int_D \cos^2 \chi \, dx dy} \right) \quad (2.4)$$

где  $f = (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)/G^2(x, y)$ ,  $1 \gg \tau > 0$  — шаг по градиенту.



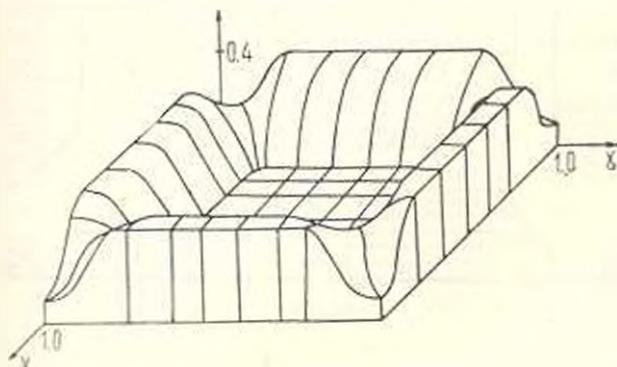
Фиг. 1

Нетрудно убедиться в том, что вариация (2.4) обеспечивает увеличение оптимизируемого функционала  $K$  и удовлетворяет условию (2.3).

Последовательное решение «прямых» задач (1.1), (1.2) с применением формулы (2.1) для оптимальной величины шага варьирования и вычисление новых приближений для управляющей функции  $\chi^{k+1} = \chi^k + \delta\chi^k$  ( $v^{k+1} = v^k + \delta v^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ) по формулам (2.4), (2.2) продолжается до тех пор, пока невязка в выполнении необходимых условий оптимальности не будет достаточно мала. Алгоритм последовательной оптимизации

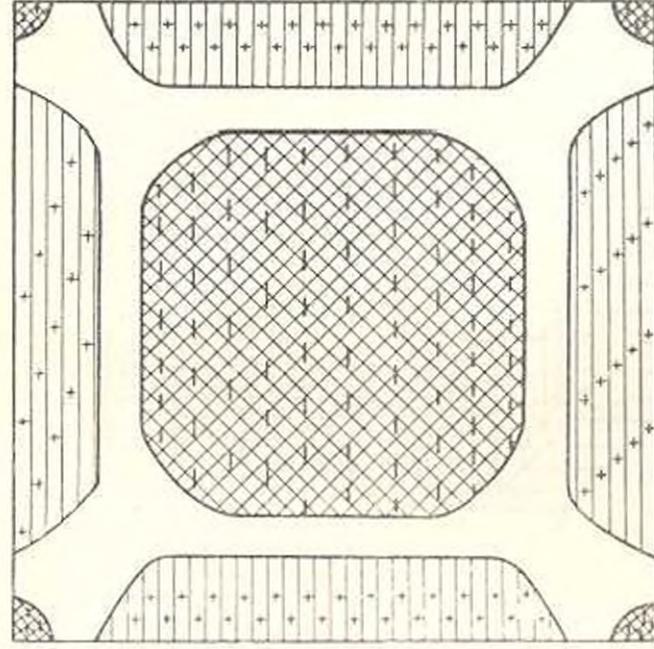
реализован в виде программы для ЭВМ и с ее использованием выполнены расчеты оптимальных распределений армирующих включений для стержней различных поперечных сечений.

При проведении расчетов использовались новые переменные:  $x' = x/a$ ,  $y' = y/a$ ,  $G' = G/G_m$ ,  $\varphi' = \varphi/a^2 G_m$ , где  $a$  — характерный размер области  $D$ . Основные параметры задачи принимались равными:  $\alpha = 0,25$ ;  $\beta = 0,15$ ;  $V_f(\text{mes } D) = 0,25$ . Величина  $E_c/15 G_m$ , характеризующая свойства композита, полагалась равной 8, что соответствует эпоксидной смоле, армированной углеродными волокнами. Полученные в результате расчетов распределения концентраций армирующих включений представлены на фиг. 2–5.

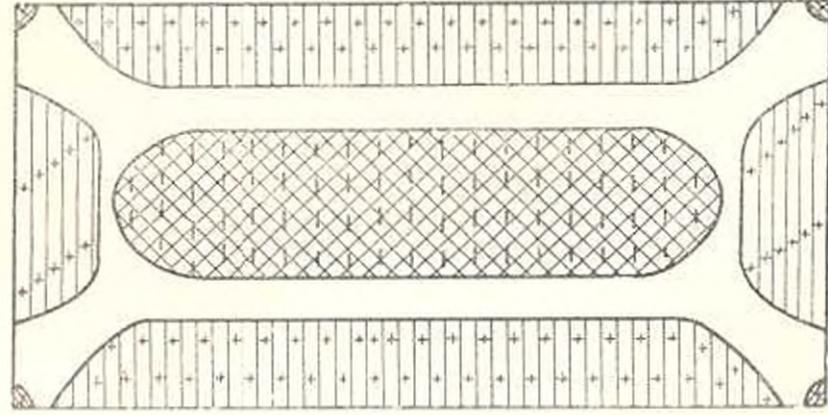


Фиг. 2

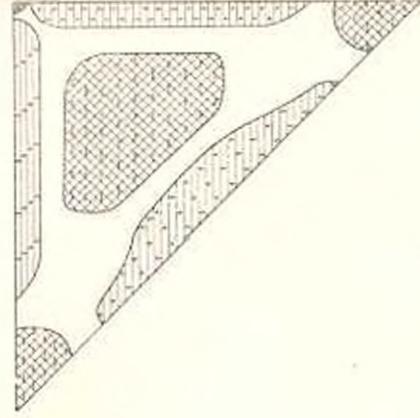
На фиг. 2 показано распределение  $\varphi(x, y)$  для стержня квадратного поперечного сечения. Найденное распределение  $\varphi(x, y)$  показывает, что основная масса армирующего материала концентрируется у краев квадрата. В этих областях концентрация армирующего материала достигает максимума, то есть  $\varphi = \varphi_{\max}$ . В углах сечения и в центре, как следует из расчетов, использование армирующего материала менее эффективно и здесь концентрация включений минимальна,  $\varphi = \varphi_{\min}$ . Между областями  $\varphi = \varphi_{\max}$  и  $\varphi = \varphi_{\min}$  находятся переходные зоны. На фиг. 3 показано в плане то же распределение концентрации включений. Здесь и далее квадратной штриховкой будем обозначать области, где концентрация включений достигает минимума. В областях со штриховкой прямыми линиями концентрации армирующего материала максимальна. Области без штриховки являются областями переходных зон. Показанное на фиг. 4 распределение концентрации отвечает случаю прямоугольного поперечного сечения. Основные характерные особенности для прямоугольного сечения остаются такими же, как и для квадратного, но происходит перерастяжение по координате с большим линейным размером. На фиг. 5 представлено оптимальное распределение концентрации включений для скручиваемого стержня с сечением в форме прямоугольного треугольника. Найденное решение показывает, что основная масса включений концентрируется в областях, примыкающих к сторонам треугольника, где концентрация достигает максимума. Расположение материала включений в углах и в центре не эффективно и



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

здесь концентрация минимальна. Следует отметить, что в рассмотренных выше примерах области минимальных значений концентрации включений, расположенные в центре, близки по форме к поперечному сечению. В приведенных примерах выигрыш за счет оптимизации по сравнению с равномерно армированными сечениями превышал 20%.

Рассмотренные задачи для скручиваемого стержня из хаотически армируемого композита ставились как задачи оптимизации крутильной жесткости при заданном объеме армирующих включений. Очевидно, что минимизация веса стержней при ограничениях на крутильную жесткость может быть рассмотрена аналогично, но в этом нет необходимости, так как эти задачи являются двойственными по отношению друг к другу. Поэтому, как показано в [2], найденное выше решение простым преобразованием переменных приводится к решению задачи минимизации веса стержня при заданной крутильной жесткости. Таким образом, в работе исследованы задачи об оптимальной неоднородности скручиваемых стержней и выявлены некоторые закономерности и особенности распределения армирующих включений и, как следствие, эффективных модулей. Следовательно, изменяя распределение включений (волокон) и тем самым варьируя эффективные модули, можно максимизировать жесткость на кручение при ограничениях на вес или снижать вес при заданной крутильной жесткости. Полученные решения указывают на значительные возможности улучшения жесткостных характеристик за счет создания оптимальных неоднородностей. Особенно важно то, что такой метод оптимизации позволяет улучшить механические характеристики, сохраняя неизменной форму конструкции. Если на практике применение полученных оптимальных решений оказывается затруднительным, то могут быть построены более простые, с точки зрения реализации, квазиоптимальные распределения, в частности, кусочно-постоянные, но по функционалу близкие к оптимальному.

**ԿՈՄՊՈԶԻՏ ԵՅՈՒԹՅՈՒՆ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՉՈՒՆԻԿ ԲՈՐՈՎԱՆ  
ԿՈՇՏՈՒԹՅԱՆ ՄԱՔՍԻՄԱԼԱՑՈՒՄԸ**

Ն. Վ. ԲԱՆՉՈՒԿ, Լ. Գ. ԼԱՐՉԵՎ

**Ա Վ Փ Ե Փ Ո Ւ Վ**

Հետազոտվում է կոմպոզիտ նյութից սյուրվող ձողի օպտիմալացման խնդիրը՝ Ռուսիա մարտիմալացման ֆունկցիոնալ բնույթովում է սյուրման կոշտությունը: Չողի նյութը ենթադրվում է կոշտ ներդրակներով ամրանավորված: Սահբի էֆեկտիվ և մոդուլի և ներդրակի կոնցենտրացիայի  $\nu$  գործակցի միջև սեղի ունի դժային կախվածություն: Գիտարկվող խնդրում  $\nu$ -ի օպտիմալացումը խաղում է սկառավարող ֆունկցիայի գեր և փնտրվում է կոշտության ֆունկցիոնալի մարտիմալության պայմանից:  $\nu$ -ի օպտիմալ բաշխման փնտրման համար օգտագործվում է խտերացիոն ալգորիթմ: Բերված է հաշվման արդյունքները: Տրվում է գաղտն օպտիմալ լուծման անալիզը: Գնահատվում է օպտիմալացման հաշվից ստացված շահույթը:

# MAXIMIZATION OF TORSIONAL RIGIDITY OF ELASTIC BARS MADE OF COMPOSITE MATERIALS

N. V. BANICHUK, A. D. LARICHEV

## Summary

The problem of optimization of torsional rigidity of bars made of composite materials is investigated. Torsional rigidity is considered as the functional to be maximized. The material of bars is supposed to be reinforced by rigid inclusions. The relation between modulus of elasticity in shear  $G$  and inclusion concentration  $v$  is linear. In the considered problem,  $v$  acts as a control function and is defined from the optimal condition of torsional rigidity. To determine the optimal distributions of  $v$  the iteration algorithm is used. Numerical results are available. The optimal solutions are analysed and advantages obtained by means of optimization are evaluated.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Анань Б. Д. Оптимальное проектирование упругих анизотропных неоднородных тел. Третий национальный конгресс по теоретической и прикладной механике, Болгария, Варна: 1977, с. 275—280.
2. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980, 256 с.
3. Лурыс К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975, 480 с.
4. Klossowicz B. Sur la nonhomogeneite optimal d'une barre tordue.—Bull. Acad. polon. sci. ser. sci. techn. 1970, vol. 16, No. 8, p. 611—615.
5. Баничук Н. В., Кортвелишвили В. М., Черноусько Ф. Л. О разностно-квадратурно-аппроксимационных выпуклых интегральных функционалов.—ДАН СССР, 1978, т. 231, № 2, с. 269—272.

Институт проблем механики АН СССР  
Центральный научно-исследовательский  
институт строительных конструкций  
им. Кучеренко Госстроя СССР

Поступила в редакцию  
12. X. 1980