ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVI, № 5, 1983 Механика

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ КОНТАКТНО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СМАЗКИ ПРИ РЕЖИМАХ ТЯЖЕЛОГО НАГРУЖЕНИЯ. ЧАСТЬ II. НЕИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

КУДИШ И. И

1. *Введение.* Данная работа, являющаяся продолжением [1], посвящена асимптотическому исследованию плоской стационарной неизотермической контактно-гидродинамической задачи для шероховатых упругих тел, разделенных тонким слоем несжимаемой смазки с реологией типа Рейнера-Ривлина. Указанная задача для случая ньютоновской жидкости и гладких тел исследовалась в [2—5] численными методами или на основе ряда априорных допущений о поведении давления $p(x)$, зазора $h(x)$ и температуры смазки $T(x, z)$.

Исходные уравнения и постановка задачи, а также смысл использованных обозначений подробно описаны в [1]. В данной работе асимптотическое исследование задачи, как правило, доведено до стадии, когда оказываются непосредственно применимыми методы [1]. Поэтому ниже приведен лишь тот анализ задачи, который отличает настоящую работу от [1]. Кроме того, в статье приведены некоторые результаты по толщине слоя смазки, температуре и т. д.

2. *Метод решения плоской неизотермической упруго-гидродинамической задачи для случая тяжело нагруженного контакта.* В данном параграфе развивается метод регулярных возмущений [6], который в ряде случаев позволяет свести плоскую неизотермическую упруго-гидродинамическую задачу для тяжело нагруженного контакта к аналогу задачи § 2 работы [1] и далее исследовать ее изложенным в § 2 работы [1] методом. Отметим, что трудности, встающие на пути решения изотермической задачи, при решении неизотермической задачи усугубляются необходимостью совместного определения давления, зазора и температуры. В то же время методы решения и сами решения этих двух задач в качественном отношении близки. Поэтому все сказанное в § 2 работы [1] о решении изотермической задачи в равной мере относится и к решению неизотермической задачи.

В условиях тяжело нагруженного контакта в уравнения (1.1)—(1.11) входит малый параметр ω, порожденный большими нагрузками на контакт, малыми линейными скоростями движения и т. д. Более подробно смысл параметра ω и примеры его задания изложены в [1]. Напомним, что контакт называется тяжело нагруженным, если при $\omega \ll 1$ обеспечивается выполнение неравенства [1]

$$H_0(h-1) - \lambda p^* \ll 1 \quad \text{при } x - a \gg \varepsilon_q, \quad c - x \gg \varepsilon_e \tag{2.1}$$

где $\varepsilon_q = \varepsilon_q(\omega) \ll 1$ и $\varepsilon_e = \varepsilon_e(\omega) \ll 1$ — характерные размеры зон входа и выхода из области контакта, расположенных в окрестностях точек $x = a$ и $x = c$. При этом давление по всей области контакта за исключением малых зон входа и выхода близко к герцевскому.

Ниже детально разобраны различные режимы смазывания, классификация которых устанавливается с помощью порядка величины $\nu(x)$

$$\nu(x) = \frac{H_0 h}{2f}\frac{dp}{dx} \tag{2.2}$$

Заметим, что при $\omega \ll 1$ в зоне входа функция ν может иметь значения $\nu \ll 1$, $\nu \sim 1$ или $\nu \gg 1$.

Для возможности проведения асимптотического исследования предположим, что постоянные a, $\overline{sl}$, λ и $\varkappa$ являются функциями малого параметра ω и удовлетворяют условиям [1]

$$a = -1 + a_1\varepsilon_q, \quad a_1 < 0, \quad a_1 \sim 1; \quad \lambda = \lambda_0\varepsilon_q^{\frac{1-\alpha}{2}}, \quad \lambda_0 > 0, \quad \lambda_0 \sim 1 \tag{2.3}$$

$|\overline{sl}| \ll 1$ при $\omega \ll 1$

С целью сокращения изложения ниже будут приведены лишь основные результаты и опорные моменты в исследовании рассматриваемой задачи. Для облегчения понимания существа примененных асимптотических методов, где это необходимо, будут делаться ссылки на работу [1], в которой эти методы подробно изложены.

А) Рассмотрим условия смазывания, при которых в зоне входа $\nu \ll 1$. Из вида уравнений (1.1) (второе уравнение) и (1.5), а также из определения (2.2) функции ν следует, что функции $f(x)$ и $T(x, z)$ при $\nu \ll 1$ необходимо искать в виде разложений по целым степеням $\nu \ll 1$

$$f = f_0 + \nu f_1 + O(\nu^2), \quad T = T_0 + \nu T_1 + O(\nu^2) \tag{2.4}$$

Разложив функцию $I\left[f\left(1 + \frac{2z}{h}\nu\right)\right]$, входящую в (1.5) и второе уравнение (1.1), по формуле Тейлора в окрестности $f = f_0$ и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ν, с помощью разложений (2.4) получим

$$f_0 = \Phi\left[\overline{sl} \Big/ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{ds}{\mu(p, T_0)}\right]$$

$$f_1 = \left[\overline{sl}\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\mu'_T(p, T_0)\, T_1\, ds}{\mu^2(p, T_0)}\, \Phi'\left[\overline{sl} \Big/ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{ds}{\mu(p, T_0)}\right] - \right. \tag{2.5}$$

$$\left. - \frac{2f_0}{h}\int_{-h/2}^{h/2} \frac{ds}{\mu(p, T_0)}\int_{-h/2}^{h/2} \frac{s\,ds}{\mu(p, T_0)}\right] \Big/ \left(\int_{-h/2}^{h/2} \frac{ds}{\mu(p, T_0)}\right)^2, \ldots$$

а также уравнения для определения функций $T_0(x, z)$, $T_1(x, z), \cdots$. Из разложений по степеням $\nu \ll 1$ функций $T_{wi}(x)$ получим граничные условия для функций $T_k(x, z)$. Решив полученные таким образом уравнения, найдем функции $T_0(x, z)$ и $T_1(x, z)$, как функции z, $p(x)$, $h(x)$, $T^0_{w1}(x)$, $T^0_{w2}(x)$, $T^1_{w1}(x)$, $T^1_{w2}(x)$, $\varkappa$, sl, H_0 (здесь $T^k_{wi}(x)$ — коэффициенты асимптотических разложений $T_{wi}(x)$). В результате, используя (2.4) и формулу Тейлора для разложения функции $F\left[f\left(1+\frac{2z}{h}\nu\right)\right]$ в окрестности $f=f_0$ до второго члена включительно, вычислим интеграл, входящий в (1.2), и тем самым функцию $W(p, h)$. Для краткости мы не будем приводить аналитического выражения для функции W в общем случае.

Следует отметить, что для исследования в главном задачи относительно $p(x)$, H_0 и т. д. (при $\nu \ll 1$ в зоне входа) необходимо и достаточно знание лишь функций $f_0(x)$, $f_1(x)$, $T_0(x, z)$ и $T_1(x, z)$. Поэтому дальнейший анализ упрощенной системы уравнений при $\omega \ll 1$ выполняется в полном согласии с асимптотическим методом § 2 работы [1].

Проиллюстрируем изложенную методику исследования на примере конкретных зависимостей

$$\mu(p, T) = \tilde{\mu}(p)\, e^{-\delta T}, \quad \frac{\partial \chi(p, T)}{\partial T} = 0 \tag{2.6}$$

хорошо аппроксимирующих экспериментальные данные для широкого класса смазочных материалов. Здесь $\tilde{\mu}(p)$ и $\delta = \delta(p)$ — функции давления, независящие от температуры. Предположим также для простоты, что температуры тел одинаковы, причем потребуем, чтобы выполнялись равенства

$$T_0\left(x, \pm\frac{h}{2}\right) = T_w(x), \quad T_k\left(x, \pm\frac{h}{2}\right) = 0; \ k = 1, 2, \cdots \tag{2.7}$$

В этих предположениях с помощью (2.5)—(2.7) и изложенной выше методики получим краевые задачи для функций T_0 и T_1

$$\chi(p)\frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} = -\frac{\varkappa H_0}{\tilde{\mu}(p)} f_0 F(f_0)\exp(\delta T_0), \quad T_0\left(x, \pm\frac{h}{2}\right) = T_w(x) \tag{2.8}$$

$$\chi(p)\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = -\frac{\varkappa H_0}{\tilde{\mu}(p)} f_0 F(f_0)\exp(\delta T_0)\left\{\frac{2z}{h}\left[1 + \frac{f_0}{sl\,\tilde{\mu}(p)}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\exp(\delta T_0)\,ds \right.\right. \Big/$$

$$\left.\left. \Big/ \, \Phi'\left(sl\,\tilde{\mu}(p) \Big/ \int\limits_{-h/2}^{h/2}\exp(\delta T_0)\,ds\right)\right] + \delta T_1\right\}, \quad T_1\left(x, \pm\frac{h}{2}\right) = 0 \tag{2.9}$$

Решение краевой задачи (2.8) получим в виде [7, 8]

$$\exp(\delta T_0) = A_0[1 - \mathrm{th}^2 Bz] \tag{2.10}$$

$$A_0 = \exp(\delta T_w)\,\mathrm{ch}^2\frac{Bh}{2}\cdot\Phi\left(sl\,\bar{\mu}\exp(-\delta T_w)\frac{B}{\mathrm{sh}\,Bh}\right) = \frac{4\chi}{sl\,\varkappa\delta H_0}B\,\mathrm{th}\frac{Bh}{2} \tag{2.11}$$

Заметим, что при $sl \neq 0$ и выполненных условиях

$$\Phi(x) > 0 \text{ при } x > 0,\quad \Phi\left(sl\,\bar{\mu}\exp(-\delta T_x)\frac{x}{\mathrm{sh}\,xh}\right) \underset{x\to\infty}{<} \frac{4\chi}{sl\,\varkappa\delta H_0}x\,\mathrm{th}\frac{xh}{2} \tag{2.12}$$

в случае монотонно возрастающей функции Φ [1], решение второго уравнения в (2.11) для величины B существует и единственно.

Решение задачи (2.9) для функции T_1 имеет вид [8]

$$T_1 = \frac{1}{\delta}\left[1 + \frac{f_0\exp(\delta T_w)}{sl\,\bar{\mu}}\frac{\mathrm{sh}\,Bh}{B}\Big/\Phi'\left(sl\,\bar{\mu}\Big/\int_{-h/2}^{h/2}\exp(\delta T_0)\,ds\right)\right]\times$$
$$\times\left\{\frac{\mathrm{th}\,Bz}{\mathrm{th}\frac{Bh}{2}} - \frac{2z}{h}\right\} \tag{2.13}$$

Теперь с помощью (2.4), (2.5), (2.10), (2.11) и (2.13) найдем выражение для функции

$$W(p,h) = -\frac{H_0\delta\frac{dp}{dx}\mathrm{ch}^4\frac{Bh}{2}}{2\bar{\mu}(p)\exp(-\delta T_w)B^2}\left\{\frac{Bh}{2\mathrm{th}\frac{Bh}{2}} - \frac{Bh}{2}\mathrm{th}\frac{Bh}{2} - 1 + \right.$$
$$+\frac{sl^2\varkappa H_0\delta\bar{\mu}(p)\exp(-\delta T_w)}{8\chi\,\mathrm{sh}^2\frac{Bh}{2}}\Phi\left(\frac{sl\,\bar{\mu}(p)\exp(-\delta T_w)B}{\mathrm{sh}\,Bh}\right)\left[\frac{Bh}{2\mathrm{th}\frac{Bh}{2}} + \right.$$
$$\left.\left. - \frac{Bh}{2}\mathrm{th}\frac{Bh}{2} - 4\ln\mathrm{ch}\frac{Bh}{2} - 1 + \frac{8}{Bh}\int_0^{Bh/2}\ln\mathrm{ch}\,y\,dy\right]\right\}\Big/ \tag{2.14}$$
$$\Big/\Phi'\left(\frac{sl\,\bar{\mu}(p)\exp(-\delta T_w)B}{\mathrm{sh}\,Bh}\right)$$

Дальнейший асимптотический анализ полученной системы уравнений (1.1) (первое уравнение), (1.3), (1.4), (2.14) и (2.11) при условии, что в зонах входа и выхода $\delta(p) \sim 1$, $\chi(p) \sim 1$ и $T_{w}(x) \sim 1$, проводится в полном соответствии с § 2 работы [1]. Для данного анализа необходимо сделать следующее предположение об асимптотическом поведении функции Φ в зонах входа и выхода из области контакта [1]:

$$\Phi(v(x)\,sl) = \omega^l|sl|^m H_0^{-n}\,\Phi_0(t) + \cdots;\quad \Phi_0(t)\sim 1,\ t\sim 1 \tag{2.15}$$

Заметим, что из (2.15) вытекает равенство [1]

$$F(H_0 \varepsilon_p^{-1/2} w(t)) = (\omega^{-l} \varepsilon_p^{-1/2} H_0^{n-1})^{1/m} F_0(t) + \cdots, \quad F_0(t) \sim 1, \quad w(t) \sim 1 \tag{2.16}$$

Здесь $v(x)$ и $w(t)$ — некоторые функции порядка единицы, величины ε_a и l в зоне входа заменяются на ε_q и $r = (x - a)/\varepsilon_a$, а в зоне выхода — соответственно на ε_y и $s = (x - c)/\varepsilon_y$.

Ниже будут рассмотрены условия смазывания, при которых в зонах входа и выхода при $\omega \ll 1$ выполняется соотношение $B \ll 1$ или $B \sim 1$ или $B \gg 1$. При этом из (2.15) и второго уравнения (2.11) следуют оценки

$$B \ll 1 \text{ при } \varkappa\omega^l |sl|^{m+1} H_0^{1-n} \ll 1 \tag{2.17}$$

$$B \sim 1 \text{ при } \varkappa\omega^l |sl|^{m+1} H_0^{1-n} \sim 1 \tag{2.18}$$

$$B \gg 1 \text{ при } \varkappa\omega^l |sl|^{m+1} H_0^{1-n} \gg 1 \tag{2.19}$$

В случае, когда в зоне входа $B \ll 1$, с помощью оценки (2.15) из второго уравнения (2.11) в зоне входа (выхода) в главном получим

$$B = \left[\frac{\varkappa\, sl\, \delta H_0}{2\chi h} \Phi\left(sl \frac{\bar{\mu} \exp(-\delta T_w)}{h}\right)\right]^{1/2} + \cdots =$$

$$= (\varkappa\omega^l |sl|^{m+1} H_0^{1-n})^{1/2} \left[\frac{\delta\Phi_0(t)}{2\chi h} \operatorname{Sign}(sl)\right]^{1/2} + \cdots \text{ при } r, s \sim 1 \tag{2.20}$$

При этом имеет место оценка (2.17). Учитывая малость величины B, из (2.14) найдем главный член разложения функции $W(p, h)$

$$W(p, h) = \frac{h^3}{12\bar{\mu}(p) \exp(-\delta T_w)} H_0 \frac{dp}{dx} \Big/ \Phi'\left(\frac{sl\, \bar{\mu}(p) \exp(-\delta T_w)}{h}\right) + \cdots \tag{2.21}$$

Из сравнения выражений (2.21) для функции $W(p, h)$ в неизотермическом случае и (3.8) из [1] для функции $W(p, h)$ в изотермическом случае следует, что с точностью до замены μ на $\bar{\mu}\exp(-\delta T_w)$ все результаты, полученные в п. А § 3 из [1], переносятся на рассматриваемый случай без изменений. Заметим, что при $\bar{\mu}(p) = \mu(p)$ и $T_w \to 0$ из (2.21) следует, что неизотермическая задача сводится к изотермической.

На основании сказанного для толщины слоя смазки H_0 получим

$$H_0 = A(\omega^l |sl|^{m-1} \varepsilon_*^2)^{1/(n+2)}, \quad A = A(\alpha_1, l, m, n, \lambda_0, \alpha) \sim 1 \tag{2.22}$$

Поэтому в зонах входа и выхода величина B оказывается существенно меньше единицы, если выполнена оценка (см. (2.20))

$$\varkappa \ll (\omega^{5l} |sl|^{2n+5m+3})^{-1/(3n+2)}, \quad \omega \ll 1 \tag{2.23}$$

Отсюда следует справедливость (2.17).

Рассмотрим случай, когда в зонах входа и выхода $B \sim 1$. Из ранее изученного случая следует, что условием реализации данного режима является оценка (см. (2.23))

$$x \sim \left(\omega^{5l}\,|sl|^{2n+5m-3}\right)^{-1/(3n-2)}, \quad \omega \ll 1 \qquad (2.24)$$

Учитывая, что если решение уравнения (2.11) $B \sim 1$, то величины $\mathrm{sh}\,\frac{Bh}{2}$, $\mathrm{ch}\,\frac{Bh}{2}$ и т. п. имеют порядок 1, при замене в (3.8) из [1] μ на $\bar{\mu}\exp(-\delta T_w)$ и $\frac{h^3}{12} \Big/ \Phi'\left(\frac{\mu\, sl}{h}\right)$ соответственно на

$$\frac{\mathrm{ch}^2\frac{Bh}{2}}{B^2}\left[\frac{Bh}{2\,\mathrm{th}\,\frac{Bh}{2}} - \frac{Bh}{2}\,\mathrm{th}\,\frac{Bh}{2} - 1 + \frac{sl^2\varkappa H_0\delta\bar{\mu}(p)\exp(-\delta T_w)}{8\chi\,\mathrm{sh}^2\frac{Bh}{2}}\times\right.$$

$$\times\Phi'\left(\frac{sl\,\bar{\mu}(p)\exp(-\delta T_w)B}{\mathrm{sh}\,Bh}\right)\left[\frac{Bh}{2\,\mathrm{th}\,\frac{Bh}{2}} + \frac{Bh}{2}\,\mathrm{th}\,\frac{Bh}{2} -\right.$$

$$\left.\left. - 4\ln\mathrm{ch}\,\frac{Bh}{2} - 1 + \frac{8}{Bh}\int\limits_0^{Bh/2}\ln\mathrm{ch}\,y\,dy\right]\right] \Big/ \Phi'\left(\frac{sl\,\bar{\mu}(p)\exp(-\delta T_w)B}{\mathrm{sh}\,Bh}\right)$$

получим, что результаты п. А § 3 из [1] остаются в силе. Кроме того, отсюда следует справедливость оценки (2.18) (см. (2.22) и (2.24)). При этом для толщины слоя смазки H_0 по-прежнему имеет место оценка (2.22).

Рассмотрим случай, когда в зонах входа и выхода $B \gg 1$. При этом второе уравнение (2.11) в главном принимает вид (2.15)

$$\exp(mBh) = \varkappa\omega^t|sl|^{m+1}H_0^{1-n}\delta\chi^{-1}\bar{\mu}^m\exp(-m\delta T_w)\,2^{m-2}\,\Phi_0(t)\,\mathrm{Sign}(sl)\,B^{m-1} \qquad (2.25)$$

Предположим, что реология жидкости такова, что всегда имеет место неравенство $m > 0$. Тогда главный член решения уравнения (2.25) при $m > 0$ и $B \gg 1$ имеет вид [9]

$$B = \frac{1}{mh}\ln\left\{\varkappa\omega^t|sl|^{m+1}H_0^{1-n}\frac{2^{m-2}\bar{\mu}^m\delta}{\chi\exp(m\delta T_w)}\,\Phi_0(t)\,\mathrm{Sign}(sl)\right\} \gg 1 \qquad (2.26)$$

Вычислим функцию $W(p, h)$ из (2.14). Разложив $W(p, h)$ из (2.14) при $B \gg 1$, с помощью соотношений (2.15), (2.25) и (2.26) найдем

$$W(p, h) = \frac{\varkappa\, sl^2 H_0^n}{\ln^2\left(\frac{1}{24}\varkappa\omega^t|sl|^{m+1}H_0^{n-1}\delta\right)}\,\frac{m(m+1)\delta\omega^t}{16\chi}\,\frac{dp}{dx} + \dots \qquad (2.27)$$

Следует отметить, что в (2.27) в роли вязкости смазки μ выступает теплопроводность χ.

Далее анализ задачи проводится в полном соответствии с асимптотическим методом § 2 из [1]. Не повторяя всех выкладок, приведем лишь результаты. Безразмерная толщина слоя H_0 находится из уравнения

$$H_0 = A\left|\frac{\varepsilon_q^2}{\varkappa s l^3}\ln^2\left(\frac{1}{24}\varkappa\omega^l |sl|^{m-1} H_0^{1-n}\right)\right|^{1/3}$$

$$A = A(\alpha_1,\ l,\ m,\ n,\ \lambda_0,\ \alpha) \sim 1;\ \omega \ll 1 \tag{2.28}$$

Заметим, что из (2.28) при $n = 1$ следует явное выражение для H_0. При прочих n, однако, возникает необходимость решения уравнения (2.28) относительно H_0 при известной постоянной A. Не останавливаясь на этом подробно, отметим, что постоянная A является одним из компонентов решения соответствующих систем асимптотически справедливых уравнений из [1], в которых $\varkappa$ и $\overline{W}_0(t)$ определяются из равенств

$$\overline{W}_0(t) = \frac{m(m+1)\lambda_0 h^2}{16\chi_0}\frac{dp}{dt},\quad \bar{r} = 3,\ \lambda_0 = \lambda(\varepsilon_q^{1/2}v),\ \chi_0 = \chi(\varepsilon_q^{1/2}v) \tag{2.29}$$

Здесь в зоне входа символы v, h и t следует заменить на q, h_q и r, а в зоне выхода — на g, h_s и s, где $q = q(r)$ и $g = g(s)$ — главные члены асимптотик давления в зонах входа и выхода [1] и $\varepsilon_s = \varepsilon_q$.

Заметим, что из условия в зоне входа $v \ll 1$ с помощью формул (2.2), (2.22), (2.28), (2.4), (2.5) получим оценку, совпадающую с оценкой (3.13) из [1], при $\varkappa$ из (2.23) или (2.24) и оценку

$$\varepsilon_q \ll \left(|sl|\varkappa^{-1}\ln(\varkappa\omega^l |sl|^{m+1} H_0^{1-n})\right)^{2/5},\quad \omega \ll 1 \tag{2.30}$$

при $\varkappa$ из (2.19). При выводе (2.30) также использовано равенство (2.26).

Остановимся кратко на условиях, при которых справедлив проведенный в данном пункте асимптотический анализ. Этими условиями являются (см. § 2 и п. А § 3 в [1]) (2.20) из [1], (2.15), $\bar{\mu}(\varepsilon_q^{1/2}) \sim 1$, $\lambda(\varepsilon_q^{1/2}) \sim 1$, $\chi(\varepsilon_q^{1/2}) \sim 1$, $T_n(x) \sim 1$ при $x \pm 1 \sim \varepsilon_q$ и $\omega \ll 1$. При этом ε_q, $\varkappa$ и H_0 удовлетворяют одной из следующих троек условий: (3.13) из [1], (2.23), (2.22); (3.13) из [1], (2.24), (2.22) и (2.30), (2.19), (2.28). Следует отметить, что в данном случае, также как и в п. А § 3 из [1], можно показать справедливость оценки (2.20) из [1], лежащей в основе примененного асимптотического метода.

Таким образом, для каждого из рассмотренных случаев в зонах входа и выхода получены две системы асимптотически справедливых уравнений с соответствующими постоянными $\varkappa$ и функциями $\overline{W}_0(t)$. Данные системы уравнений замыкаются при $B \ll 1$ равенствами $h_q(r) = h_s(s) = 1$, а при $B \gg 1$ — уравнениями (2.29), (2.31) из [1] для $h_q(r)$ и $h_s(s)$. При этом в зависимости от порядка B для H_0 справедливы формулы (2.22) или (2.28).

В) Рассмотрим условия смазывания, при которых в зонах входа и выхода $v \sim 1$. В этом случае функцию f в зонах входа и выхода будем искать в виде (3.15) из [1]. При этом уравнение для температуры (1.5) с учетом оценки (2.16) в зонах входа и выхода принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\chi\frac{\partial T}{\partial z}\right)=-\frac{\sigma\left(\omega^{-l}\varepsilon_q^{-\frac{m+1}{2}}H_0^{2m+n+1}\right)^{1/m}}{\mu\left(\varepsilon_q^{1/2}v,\,T\right)}\left(f_v+z\frac{dv}{dl}\right)F_0(l,z) \qquad (2.31)$$

Здесь символы v и l в зоне входа заменяются на q и r, а в зоне выхода соответственно на g и s; f_q и f_g — главные члены асимптотик функции $f(x)$ в зонах входа и выхода [1]. Кроме того, в (2.31) уже использовано равенство (2.15) из [1].

Для простоты предположим, что $\chi(p, T)=\chi(p)$ и не зависит от T, а также, что $T_{w1}(x)=T_{w2}(x)=T_w(x)$.

Легко видеть, что величина $\sigma=\chi\left(\omega^{-l}\varepsilon_q^{-\frac{m+1}{2}}H_0^{2m+n+1}\right)^{1/m}$ может иметь различный порядок при $\omega\ll 1$. При $\sigma\ll 1$ из уравнений задачи для температуры (см. (2.31), (1.6) и сделанные выше предложения) следует, что в главном $T(x, z)=T_w(x)+O(\sigma)$. Подставив эту функцию T в выражение (1.2) для $\Psi(p, h)$, найдем, что рассматриваемая неизотермическая упруго-гидродинамическая задача свелась к изотермической задаче, изученной в п. В § 3 из [1]. В силу этого все полученные в п. В § 3 из [1] результаты и условия их применимости верны и для рассматриваемой здесь задачи. В частности, для величин ε_q и H_0 имеют место формулы [1]

$$\varepsilon_q=\left(\omega^{l}|sl|^{n-m-1}\right)^{2/(3n-2)}$$

$$H_0=A\left(\omega^{3l}|sl|^{3m+1}\right)^{1/(3n+2)},\quad A=A(\alpha_1,\, l,\, m,\, n,\, \lambda_0,\, a)\sim 1 \qquad (2.32)$$

Поэтому из (2.32) следует, что $\sigma\ll 1$ при $\omega\ll 1$ при условии выполнения оценки (2.23).

При $\sigma\sim 1$ из уравнения (2.31) и условия $T_w(x)\sim 1$ в зонах входа и выхода получим, что $T(x, z)=O(1)$. В силу этого в зонах входа и выхода $\mu(p, T)\sim 1$. Поэтому, определив T из уравнений (2.31), (1.6) как функцию переменных z, $r(s)$, $q(r)$ $(g(s))$ и т. д. и подставив в выражение (1.2) для функции $\Psi(p, h)$ и второе уравнение (1.1), найдем, что асимптотический анализ получившихся систем уравнений при $\omega\ll 1$ может быть проведен согласно методу § 2 из [1], который в данном случае несущественно отличается от метода, использованного в п. В § 3 из [1]. В силу сказанного, после очевидных изменений результаты п. В § 3 из [1] переносятся на рассматриваемый случай. В частности, для ε_q и H_0 справедливы формулы (2.32). Поэтому из (2.32) следует, что оценка $\sigma\sim 1$ при $\omega\ll 1$ имеет место при выполнении условия (2.24).

Рассмотрим случай $\sigma\gg 1$. При этом уравнения (2.31), (1.6) для температуры T имеют вид уравнений классической сингулярно возмущенной задачи с малым параметром при старшей производной [6, 10]. После нахождения с помощью второго уравнения (1.1), (2.16) и (3.15) из [1] функций f_q и f_g, входящих в (2.31), определение функции T из (2.31), (1.6) связано со значительными трудностями. Уравнение (2.31) в общем случае является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами. Поэтому получить решение данного уравнения в аналитическом виде (за исключением случая $\mu(p, T) = \bar{\mu}(p)/(1 - \delta T)$) вряд ли представляется возможным (данное замечание относится и к случаю $\sigma \sim 1$). Однако, с помощью результатов п. А настоящего параграфа и соотношения $\nu \sim 1$ по непрерывности получим (см. формулы (2.2), (2.5), (2.26) и (2.28)) оценки (2.28) и

$$\varepsilon_q = [|sl| \varkappa^{-1} \ln (\varkappa \omega^{l} |sl|^{m+1} H_0^{-n})]^{2/5}, \quad \omega \ll 1 \tag{2.33}$$

служащие для определения ε_q и H_0, как функций $\varkappa$, ω, $|sl|$, m, n и l. Далее анализируется какой именно режим смазывания реализуется: масляное голодание или обильная смазка [1], после чего используются уравнения (2.29), (2.35) из [1] и (2.32). Детальный же анализ задачи связан с численным методом решения исходных уравнений (1.1)—(1.6) и соответствующей системы с обращенным интегральным оператором [1].

В заключение данного пункта отметим, что проведенный асимптотический анализ справедлив при выполнении оценок (см. п. В § 3 из [1]) (2.22) из [1], (2.16), $\bar{\mu}(\varepsilon_q^{1/2}) \sim 1$, $\bar{\lambda}(\varepsilon_q^{1/2}) \sim 1$, $\bar{\chi}(\varepsilon_q^{1/2}) \sim 1$, $T_w(x) \sim 1$ при $x \pm 1 \sim \varepsilon_q$ и $\omega \ll 1$. При этом ε_q, H_0 и $\varkappa$ удовлетворяют одной из следующих троек условий: (2.32), (2.23); (2.32), (2.24) и (2.33), (2.28), $\varkappa(\omega^{-l} \varepsilon_q^{-\frac{m+1}{2}} H_0^{2m-n+1})^{l} \gg 1$. Кроме того, следует отметить, что можно показать справедливость оценки (2.20) из [1], лежащей в основе примененного асимптотического метода.

C) Рассмотрим условия смазывания, при которых в зонах входа и выхода $\nu \gg 1$. Выразим из (2.2) $H_0 \dfrac{dp}{dx}$ и подставим во второе уравнение (1.1) и уравнение (1.5). Легко видеть, что вне малой, порядка $h/2\nu$, окрестности точки $z = 0$ функцию $T(x, z)$ и, одновременно, функцию $f(x)$ следует искать в виде асимптотического разложения по степеням $\nu^{-1} \ll 1$

$$f = f_0 + O(\nu^{-1}), \quad T = T_0 + \nu^{-1} T_1 + O(\nu^{-2}) \tag{2.34}$$

Разложив функцию $F\left[H_0 \dfrac{dp}{dx}\left(z + \dfrac{h}{2\nu}\right)\right]$ в ряд Тейлора в окрестности точки $H_0 z \dfrac{dp}{dx}$ (который является асимптотическим при $|z| \gg \dfrac{h}{2\nu}$) и ограничившись первыми двумя членами, подставим это разложение в (1.5) и второе уравнение (1.1). После приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ν^{-1} с помощью (2.34) найдем

$$f_0 = \left[sl - \int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{F\left(H_0 s \dfrac{dp}{dx}\right)}{\mu(p, T_0)} ds \right] \Bigg/ \left\{ \int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{F'\left(H_0 s \dfrac{dp}{dx}\right)}{\mu(p, T_0)} ds - \right. \tag{2.35}$$

$$-\frac{2}{H_0 h \frac{dp}{dx}} \int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{F\left(H_0 s \frac{dp}{dx}\right) \mu_T (p, T_0)\, T_1\, ds}{\mu^2 (p, T_0)} \Bigg]$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\varkappa (p, T_0) \frac{\partial T_0}{\partial z}\right] = -\frac{\varkappa H_0^2 \frac{dp}{dx}}{\mu (p, T_0)} z F\left(H_0 z \frac{dp}{dx}\right) \qquad (2.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\varkappa (p, T_0) \frac{\partial T_1}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\varkappa_T (p, T_0)\, T_1 \frac{\partial T_0}{\partial z}\right] = -\frac{\varkappa H_0^2 \frac{dp}{dx}}{\mu (p, T_0)} F\left(H_0 z \frac{dp}{dx}\right) \times$$

$$\times \left\{ \frac{h}{2}\left[1 + H_0 z \frac{dp}{dx} \frac{F'\left(H_0 z \frac{dp}{dx}\right)}{F\left(H_0 z \frac{dp}{dx}\right)}\right] - z \frac{\mu_T (p, T_0)}{\mu (p, T_0)} T_1 \right\} \qquad (2.37)$$

Заметим, что уравнения (2.36), (2.37) замыкаются с помощью граничных условий для функций $T_i (x, z)$, полученных в предположении, что функции $T_{a i}(x)$ и $T_{b i}(x)$ представимы в виде рядов по степеням $\nu^{-1} \ll 1$.

Предположим, что каким-либо способом нам удалось получить решения уравнений (2.36), (2.37), выраженные через $p (x)$, $h (x)$, $\frac{dp}{dx}$, H_0 и т. д. Тогда можно перейти к выводу приближенного уравнения Рейнольдса. Для этого функции $F\left[H_0 \frac{dp}{dx}\left(s + \frac{h}{2\nu}\right)\right]$ и $\frac{1}{\mu (p, T)}$ с помощью представлений (2.34) разложим по формуле Тейлора соответственно в окрестности точек $H_0 s \frac{dp}{dx}$ и T_0, удерживая при этом по два члена. Подставив затем эти разложения в (1.2), с учетом (2.2) получим

$$W (p,h) = \frac{sl}{2} h - \int\limits_{-h/2}^{h/2} dz \int\limits_{-h/2}^{z} \frac{F\left(H_0 s \frac{dp}{dx}\right)}{\mu (p, T_0)} ds - \left[sl - \int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{F\left(H_0 s \frac{dp}{dx}\right)}{\mu (p, T_0)} ds\right] \times$$

$$\times \int\limits_{-h/2}^{h/2} dz \int\limits_{-h/2}^{z} \frac{1}{\mu (p, T_0)} \left[\frac{H_0 h}{2} \frac{dp}{dx} F'\left(H_0 s \frac{dp}{dx}\right) -\right.$$

$$\qquad (2.38)$$

$$\left. - \frac{\mu_T (p, T_0)}{\mu (p, T_0)} T_1 F\left(H_0 s \frac{dp}{dx}\right)\right] ds \Big/ \int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{\mu (p, T_0)} \left[\frac{H_0 h}{2} \frac{dp}{dx} F'\left(H_0 s \frac{dp}{dx}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{\mu_T (p, T_0)}{\mu (p, T_0)} T_1 F\left(H_0 s \frac{dp}{dx}\right)\right] ds + \cdots$$

Рассмотрим для простоты частный случай равных температур тел (2.7). При этом из уравнений (2.36) и (2.37) следует, что функция $T_0(x, z)$ четна, а функция $T_1 (x, z)$ нечетна по z. Отсюда вытекают равенства

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{F\left(H_0 s \dfrac{dp}{dx}\right)}{\mu(p, T_0)} ds = 0 \tag{2.39}$$

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2} dz \int\limits_{-h/2}^{z} \frac{1}{\mu(p, T_0)} \left[\frac{H_0 h}{2} \frac{dp}{dx} F'\left(H_0 s \frac{dp}{dx}\right) - \frac{\mu_T'(p, T_0)}{\mu(p, T_0)} T_1 F\left(H_0 s \frac{dp}{dx}\right) \right] ds =$$

$$= \frac{h}{2} \int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{\mu(p, T_0)} \left[\frac{H_0 h}{2} \frac{dp}{dx} F'\left(H_0 s \frac{dp}{dx}\right) - \frac{\mu_T'(p, T_0)}{\mu(p, T_0)} T_1 F\left(H_0 s \frac{dp}{dx}\right) \right] ds$$

с помощью которых будем иметь

$$W(p, h) = - \int\limits_{-h/2}^{h/2} dz \int\limits_{-h/2}^{z} \frac{F\left(H_0 s \dfrac{dp}{dx}\right)}{\mu(p, T_0)} ds + \cdots \tag{2.40}$$

В уравнениях (2.36) и (2.37) в зонах входа и выхода возникает параметр $\sigma = \varkappa (\omega^{-1} \varepsilon_q^{\frac{m+1}{2}} H_0^{2m+n+1})^{\frac{1}{m}}$ (см. представления (2.8) из [1] и (2.16)), который может иметь различный порядок при $\omega \ll 1$. При $\sigma \ll 1$ из уравнений для функций $T_0(x, z)$ и $T_1(x, z)$ (2.36), (2.37) и граничных условий (2.7) следует, что в главном в зонах входа и выхода $T(x, z) = T_w(x) + O(\sigma)$. Подставив эти выражения в (2.40), найдем, что рассматриваемая неизотермическая упруго-гидродинамическая задача свелась к изотермической задаче, изученной в п. С § 3 из [1]. В силу этого все полученные в п. С § 3 из [1] результаты и условия их применимости верны для рассматриваемого случая. В частности, для H_0 справедлива оценка (см. (3.25) из [1])

$$H_0 = A \left(\omega^l \varepsilon_q^{\frac{3m+1}{2}}\right)^{\frac{1}{m+n+1}}, \quad A = A(\sigma_1, l, m, n, t_0, \alpha) \sim 1 \tag{2.41}$$

и при этом выполняется одна из оценок (3.28) из [1] или (3.29) из [1], в зависимости от чего реализуется либо режим масляного голодания, либо — обильной смазки [1]. Поэтому из (2.41) следует, что оценка $\sigma \ll 1$ при $\omega \ll 1$ справедлива при условии

$$\varkappa \ll \left(\omega^l \varepsilon_q^{2n+3m+3}\right)^{\frac{1}{n+m+1}}, \quad \omega \ll 1 \tag{2.42}$$

При $\sigma \sim 1$ из уравнений (2.36), (2.37) и (2.7) вытекает, что в зонах входа и выхода $T_0(x, z) \sim 1$ и $T_1(x, z) \sim 1$. Отсюда в зонах входа и выхода имеем оценку $\mu(p, T) \sim 1$. Поэтому, определив функции $T_0(x, z)$ и $T_1(x, z)$ из уравнений (2.36), (2.37), (2.7), как функции переменных z, $r(s)$, $q(r)$ ($g(s)$) и т. д., затем подставим эти функции в выражение (2.40) для $W(p, h)$. В результате получим, что асимптотический анализ выведенных таким образом уравнений при $\omega \ll 1$ проводится согласно методике § 2 из [1], которая в данном случае мало отличается от метода, использованного в п. С § 3 из [1]. Поэтому после очевидных изменений результаты п. С § 3 из [1] переносятся на рассматриваемый случай. При этом оценки (3.28) и (3.29) из [1] переносятся без изменений, а формула для H_0 имеет вид (2.41). Из (2.41) следует условие справедливости оценки $\sigma \sim 1$ при $\omega \ll 1$ в виде

$$\varkappa \sim \left(\omega^{1} \varepsilon_0^{2n+5m+...}\right)^{-\frac{1}{n+m+1}}, \quad \omega \ll 1 \tag{2.43}$$

Рассмотрим случай $\sigma \gg 1$ при $\omega \ll 1$. При этом уравнения (2.36), (2.37), (2.7) для функций $T_0(x, z)$ и $T_1(x, z)$ имеют вид уравнений классической сингулярно возмущенной задачи с малым параметром при старшей производной [6, 10]. Уравнение (2.36) для $T_1(x, z)$ в общем случае нелинейное (исключение составляет случай $\bar{\mu}(p, T) = \mu(p)/(1 + \delta T)$), а уравнение (2.37) для $T_1(x, z)$ — линейное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. Поэтому решить эти уравнения или хотя бы оценить порядок функций $T_0(x, z)$ и $T_1(x, z)$ при $\omega \ll 1$ в общем случае не представляется возможным. В силу этого дальнейший асимптотический анализ не может быть осуществлен. По-видимому, единственной возможностью здесь является непосредственное численное исследование исходных систем уравнений.

Аналогично п. С § 3 из [1] можно показать справедливость оценки (2.22) из [1], лежащей в основе асимптотического анализа. Таким образом, проведенный в данном пункте асимптотический анализ справедлив при выполнении оценок (см. п. С § 3 из [1]) (2.16), $\bar{\mu}(\varepsilon_0^{1/2}) \sim 1$, $\delta(\varepsilon_0^{1/2}) \sim 1$, $\lambda(\varepsilon_0^{1/2}) \sim 1$, $T_0(x) \sim 1$ при $x + 1 \sim \varepsilon_0$ и $\omega \ll 1$. При этом величины ε_0, H_0 и $\varkappa$ удовлетворяют одной из следующих троек условий: (3.27) из [1], (2.41), (2.42) и (3.27) из [1], (2.41), (2.43).

Следует иметь в виду, что выводы, сделанные в § 3 из [1] относительно поведения решения изотермической задачи, с несущественными изменениями переносятся на случай неизотермической задачи.

Автор благодарен В. М. Александрову за полезное обсуждение работы.

ՅՈՒՂՄԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱ-ՀԻԴՐՈԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ՄԵԹՈԴՆԵՐԸ ՆԱՆՐ ԲԵՌՆՎԱԾՈՒԹՅԱՆ ՌԵԺԻՄՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ: ՄԱՍ II: ՈՉ ԻԶՈԹԵՐՄԻԿ ԽՆԴԻՐԸ

Ի. Ի. ԿՈՒԴԻՇ

Ամփոփում

Դիտարկվում է յուղման բարակ շերտով անջատված երկու խորքնաբարդ առաձգական մարմինների սահումով գլորման մասին հարթ ստացիոնար ոչ իզոթերմիկ կոնտակտա-հիդրոդինամիկական խնդիրը։ Յուղումը դիտվում է Թեյներ-Ռիվլինի տիպի, բավականին ընդհանուր ռեոլոգիայով, անսեղմելի մածուցիկ հեղուկ։ Միկրոանհարթությունների շերտի տորումը մոտարկվում է ճնշման ստորճանային ֆունկցիայով։ Խնդիրը բերվում է ոչ գծային ինտեգրոդիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի։ Սինգուլյար ասիմպտոտիկ վերլուծությունների և կցման մեթոդներով խնդրի հետազոտման դեպքում, կոնտակտի տիրույթից մուտքի և ելքի գոտիներում ստացված են հավասարումներ ճնշման և բացվածքի ասիմպտոտիկայի գլխավոր անդամների համար։

Բացի դրանից ստացված են մի շարք վերլուծական բանաձևեր յուղման շերտի հաստությունների և սահքի շփման ուժերի համար։ Նշված բանաձևերը իրարից տարբերվում են գլորման շփման լարումների և սահքի շփման լարումների տարբեր կարգի հարաբերությունների դեպքում։

ASYMPTOTIC METHODS OF INVESTIGATION OF PLANE PROBLEMS OF ELASTOHYDRODINAMIC LUBRICATION THEORY FOR HEAVY-LOADED REGIMES. PART II. NONISOTHERMAL PROBLEM

I. I. KUDISH

Summary

A plane nonisothermal elastohydrodynamic problem for rough bodies, divided by a thin layer of non-Newtonian viscous Reiner-Rivlin's liquid is studied by the method of matched asymptotic expansions in case of heavy-loaded contact. Asymptotic estimations are obtained for the lubricant film thickness and friction force under conditions of lubricant deficiency and abundant lubrication. Equations for major terms of pressure asymptotics are derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кудиш И. И.* Асимптотические методы исследования плоских задач контактно-гидродинамической теории смазки при режимах тяжелого нагружения. Часть I. Изотермическая задача.— Изв. АН АрмССР, Механика, 1982, т. 35, № 5.
2. *Каннел, Уолоуит.* Упрощенный анализ сил трения при упруго-гидродинамическом контакте в условиях качения со скольжением.— Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Проблемы трения и смазки, 1971, т. 93, № 1.
3. *Cheng H. S.* Refined Solution of the Thermal Elastohydrodynamic Lubrication of Rolling and Sliding Cylinders. ASLE Trans., 1965, v. 8.
4. *Шиpобоков В. В., Дроздов Ю. Н.* Толщина смазочного слоя при качении со скольжением тел с учетом тепловых процессов.— Машиноведение, 1979, № 4.
5. *Коднир Д. С.* Контактная гидродинамика смазки деталей машин. М.: Машиностроение, 1976.
6. *Ван Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
7. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 4-е изд. М.: Наука, 1971.
8. *Кудиш И. И.* Асимптотический анализ плоской неизотермической упруго-гидродинамической задачи для тяжело нагруженного контакта качения.— Изв. АН АрмССР, Механика, 1978, т. 31, № 6.
9. *Де Брейн Н. Г.* Асимптотические методы в анализе. М.: ИЛ, 1961.
10. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

Всесоюзный научно-исследовательский
конструкторско-технологический
институт подшипниковой промышленности

Поступила в редакцию
31. III. 1981