ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 5, 1983 Механика

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ НЕОДНОРОДНО-СТАРЕЮЩИХ ТЕЛ С ДВУМЕРНОЙ ТРЕЩИНОЙ

АРУТЮНЯН Н. Х., НАЗАРОВ С. А., ШОЙХЕТ Б. А.

Получены и обоснованы асимптотические представления напряжений и смещений вблизи края двумерной трещины в трехмерном теле в теории упругости и теории ползучести неоднородно-стареющих тел. Вывод асимптотик базируется на коэрцитивных оценках решений задач теории упругости и теории ползучести в некоторых весовых пространствах [1] и на асимптотических представлениях решений плоских задач [2—4] и задачи кручения [5] в области с трещиной. Часть результатов статьи анонсирована в заметке [6].

1. Постановка задач. Пусть Ω_0 — связная, с гладкой (класса C^∞) границей $\partial\Omega_0$ подобласть трехмерного пространства R^3; m — гладкая поверхность, а M — содержащееся в Ω_0 подмножество поверхности m, ограниченное гладким простым замкнутым контуром ∂M. Множество M определяет трещину в Ω_0; ее берега обозначим через M^+ и M^-. Изучаемое тело занимает область $\Omega=\Omega_0 \setminus M$. На берегах трещины заданы напряжения. Для определенности будем считать, что на внешней границе $\partial\Omega_0$ также действуют напряжения. Случай, когда к $\partial\Omega$ приложены смещения, рассматривается аналогично.

Уравнения краевой задачи теории ползучести неоднородно-стареющих тел имеют вид [7]

$$\varepsilon_{jk}(t, x)=\varepsilon_{jk}(u)\equiv(u_{j,k}(t, x)+u_{k,j}(t, x))/2, \quad j, k=1, 2, 3 \tag{1.1}$$

$$\sigma_{jk,k}(t, x)+f_j(t, x)=0, \quad j=1, 2, 3 \tag{1.2}$$

$$\frac{s_{jk}(t, x)}{2G(t+\varkappa(x), x)}=e_{jk}(t, x)-\int_0^t R_1(t+\varkappa(x), \tau+\varkappa(x), x)\, e_{jk}(\tau, x)\, d\tau \tag{1.3}$$

$$\frac{\sigma(t, x)}{E_*(t+\varkappa(x), x)}=e(t, x)-\int_0^t R_2(t+\varkappa(x), \tau+\varkappa(x), x)\, e(\tau, x)\, d\tau$$

$$e=e_{pp}/3, \quad e_{jk}=\varepsilon_{jk}-\delta_{jk}e, \quad \sigma\equiv\sigma_{pp}/3, \quad s_{jk}=\sigma_{jk}-\delta_{jk}\sigma \tag{1.4}$$

$$\sigma_{jk}(t, x)\, n_k^{\pm}=g_j^{\pm}(t, x) \quad \text{на} \quad M^{\pm}, \quad j=1, 2, 3 \tag{1.5}$$

$$\sigma_{jk}(t, x)\, n_k=g_j(t, x) \quad \text{на} \quad \partial\Omega_0, \quad j=1, 2, 3 \tag{1.6}$$

Здесь u_i, σ_{jk}, ε_{jk} — декартовы компоненты смещений, напряжений и деформаций, соответственно; e_{jk}, s_{jk} — компоненты девиаторов напряжений и деформаций, e, σ — их шаровые части; $E_*(t, x)$, $R_*(t, \tau, x)$ — модуль объемного расширения и ядро релаксации при всестороннем растяжении (сжатии), $G(t, x)$, $R_1(t, \tau, x)$ — модуль сдвига и ядро релаксации при сдвиге; $\nu(x)$ — функция неоднородного старения, характеризующая закон изменения возраста материала в зависимости от пространственных координат; f_i, g_i^+, g_i — объемные и поверхностные нагрузки, удовлетворяющие при всех t условиям равновесия

$$\int_V f_j u_j^R \, dx + \int_{M^+} g_j^+ u_j^R \, ds + \int_{\partial V_*} g_j u_j^R \, ds = 0 \tag{1.7}$$

для всякого поля смещений u^R тела, как жесткого целого, то есть для $u^R = a + b \times x$, где a, b — постоянные векторы.

Уравнения задачи теории упругости имеют вид (1.1)—(1.6), если все функции считать не зависящими от времени t, а в реологическом законе (1.3) положить $R_* = R_1 = 0$:

$$s_{jk}(x) = 2\,G(x)\,e_{jk}(x), \quad \sigma(x) = E_*(x)\,e(x) \tag{1.8}$$

Отметим известный факт: задача теории упругости является эллиптической в смысле А. Дуглиса, Л. Ниренберга [8].

Асимптотические разложения решений общих эллиптических краевых задач в областях с коническими (в частности, угловыми) точками изучены в работах [9, 10] и других. Последовательное применение указанных результатов в задачах теории упругости содержится в монографиях [11, 12]. Асимптотические представления вблизи ребер решений эллиптических краевых задач найдены в [13, 14]. Коэрцитивные оценки и теоремы Нетера для широкого класса таких задач содержатся в [15].

В случае, если на берегах трещины заданы напряжения, задача теории упругости не попадает в класс задач, изученных в [15, 13], так как нарушается сформулированное в этих работах требование однозначной разрешимости модельной задачи в двумерном угле. Необходимые для построения асимптотики коэрцитивные оценки решений задач теории упругости и теории ползучести в весовых функциональных пространствах выведены в [1].

2. *Функциональные пространства и оценки решений.* Пусть K — двугранный угол раствора 2π; s — координата на его ребре; (y_1, y_2) и (r, θ) — декартовы и полярные координаты в плоскости, перпендикулярной ребру, причем грани $\partial K^\pm$ угла задаются соотношениями $y_1 < 0$, $y_2 = \pm 0$ или $r > 0$, $\theta = \pi \pm \pi$.

Пусть q — целое неотрицательное, γ, β — вещественные числа, подчиненные неравенствам

$$q + 1/2 < \beta < q + 1 \leqslant \gamma < \beta + 1 \tag{2.1}$$

В работе [1] введены используемые здесь пространства $V^q_\beta(K)$, $V^{q+2}_{\gamma,\beta}(K)$ функций в K и пространство $V^{q+1/2}_\beta(\partial K^\pm)$ следов функций из $V^{q+1}_\beta(K)$ на $\partial K^\pm$. Нормы определены формулами (2.14), (2.15) из [1].

Для описания функциональных пространств в области Ω определим в окрестности D края ∂M трещины M криволинейные кординаты (y_1, y_2, s), где s — длина дуги, измеренная вдоль ∂M от некоторой точки до проекции x на ∂M, (y_1, y_2) — ортогональные координаты в плоскости, проходящей через x и нормальной к ∂M, причем локально M задается соотношениями $y_1 \leqslant 0$, $y_2 = 0$.

Нормы в пространствах $V^{q+2}_{\gamma,\beta}(\Omega)$, $V^q_\beta(\Omega)$ и $V^{q+1/2}_\beta(M^\pm)$ порождаются из норм $V^{q+2}_{\gamma,\beta}(K)$, $V^q_\beta(K)$ и $V^{q+1/2}_\beta(\partial K^\pm)$ разбиением единицы. Если носитель функции v отделен от ∂M, то ее норма вычисляется в $W_2^{q+2}(\Omega)$, $W_2^q(\Omega)$ или $W_2^{q+1/2}(M^\pm)$, а, если носитель мал и пересекается с ∂M, то норма v совпадает с нормой в $V^{q+2}_{\gamma,\beta}(K)$, $V^q_\beta(K)$ или $V^{q+1/2}_\beta(\partial K^\pm)$ функции v^*, которая получается из v после перехода к координатам (y_1, y_2, s).

Следующее утверждение вытекает непосредственно из определения норм в перечисленных пространствах.

Лемма 1. *Пусть $N_j(x, \partial/\partial x)$ — дифференциальный оператор в Ω порядка j, коэффициенты которого и их производные до порядка $q+1$ включительно ограничены в Ω, а W — функция из $V^{q+2}_{\gamma,\beta}(\Omega)$, где q, γ, β удовлетворяют неравенствам* (2.1). *Тогда $N_1W \in V^{q+1}_\beta(\Omega)$, $N_2W \in V^q_\beta(\Omega)$, и справедливы оценки*

$$\|N_jW;\ V^{q+2-j}_\beta(\Omega)\| \leqslant \mathrm{const}\,\|W;\ V^{q+2}_{\gamma,\beta}(\Omega)\|,\ j=1,\ 2$$

Сформулируем еще (в несколько ослабленной, но достаточной для наших целей форме) две теоремы о разрешимости задач теории упругости и теории ползучести [1, 6]. Для этого понадобится следующее определение. Пусть B — банахово пространство. Как обычно, через $L^\infty(0, t; B)$ будем обозначать пространство отображений P отрезка $[0, t]$ в B, наделенное нормой

$$\|P;\ B,\ t\| = \operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|P(\tau);B\|$$

Теорема 1. *Пусть выполнены соотношения* (1.7) *и* (2.1), $f \in V^q_\beta(\Omega)$, $g \in W_2^{q+1/2}(\partial\Omega_0)$, $g^\pm \in V^{q+1/2}_\beta(M^\pm)$; $E_*, G \in C^{q+1}(\Omega)$ *и выполняется условие невырождения в* Ω

$$E_1 \leqslant E_* \leqslant E_2,\quad G_1 \leqslant G \leqslant G_2,\quad E_i,\ G_i = \mathrm{const} > 0$$

Тогда существует единственное (с точностью до жесткого смещения) решение u задачи (1.1), (1.2), (1.4)—(1.6), (1.8) *из пространства*[1] $V^{q+2}_{\gamma,\beta}(\Omega)$. *Если это решение нормировано условиями*

$$\int_\Omega u dx = 0,\quad \int_\Omega \mathrm{rot}\, u dx = 0 \tag{2.2}$$

то справедливо неравенство

[1] Здесь и всюду далее пространства скалярных и векторнозначных функций не различаются в обозначениях; норма вектор-функции равна сумме норм ее компонент.

$$\|u;\ V^{q+2}_{\gamma,\beta}(\Omega)\| \leqslant c\,(\|f;\ V^{q}_{\beta}(\Omega)\| + \|g;\ W^{q+1/2}_{2}(\partial\Omega_0)\| + \|g^{\pm};\ V^{q+1/2}_{\beta}(M^{\pm})\|) \quad (2.3)$$

Не умаляя общности, будем считать $\varkappa(x) \geqslant 0$ и пусть

$$T^{*} = \max_{x\in\overline{\Omega}} \varkappa(x) + T.$$

Теорема 2. *Пусть модули E_{*}, G — достаточно гладкие (класса $C^{q+1}([0, T^{*}] \times \overline{\Omega})$) функции переменных t, x и не вырождаются в $\overline{\Omega}$, ядра релаксации R_j представимы в виде*

$$R_j(t, \tau, x) = p_j(t, \tau, x)(t-\tau)^{-\alpha} + q_j(t, \tau, x),\ j = 1, 2,\ \alpha < 1:$$

$p_j, q_j \in C^{q+1}([0, T^{*}] \times [0, T^{*}] \times \overline{\Omega})$, $\varkappa \in C^{q+1}(\overline{\Omega})$, *при почти всех* $t \in [0, T]$ *выполнены равенства* (1.7), *справедливы соотношения* (2.1) *и включения* $f \in L^{\infty}(0, T;\ V^{q}_{\beta}(\Omega))$,

$$g \in L^{\infty}(0, T;\ W^{q+1/2}_{2}(\partial\Omega_0)),\ g^{\pm} \in L^{\infty}(0, T;\ V^{q+1/2}_{\beta}(M^{\pm}))$$

Тогда на отрезке времени $[0, T]$ *существует единственное (нормированное при почти всех t условиями* (2.2)) *решение* $u \in L^{\infty}(0, T;\ V^{q+2}_{\gamma,\beta}(\Omega))$ *задачи ползучести* (1.1) — (1.6) *такое, что справедливо неравенство*

$$\|u;\ V^{q+2}_{\gamma,\beta}(\Omega),\ T\| \leqslant c\,(\|f;\ V^{q}_{\beta}(\Omega),\ T\| +$$
$$+ \|g;\ W^{q+1/2}_{2}(\partial\Omega_0),\ T\| + \|g^{\pm};\ V^{q+1/2}_{\beta}(M^{\pm})\|) \quad (2.4)$$

с постоянной c, не зависящей от f, g, $g^{\pm}$ и u.

Замечание 1. Оценки (2.3) и (2.4) становятся все более точными при увеличении γ до $\beta + 1 - 0$, однако постоянные в этих неравенствах неограниченно возрастают.

3. *Вспомогательные утверждения.* При выводе асимптотики напряженно-деформированного состояния понадобятся дополнительные оценки решений рассматриваемых задач. Обозначим через $v^{(n)}$ производную $\partial^{n} v/\partial s^{n}$.

Лемма 2. *Пусть в дополнение к условиям теоремы 1*

$$E_{*}^{(n)},\ G^{(n)} \in C^{q+1}(\overline{D}),\ f^{(n)} \in V^{q}_{\beta}(D \setminus M),\ g^{\pm(n)} \in V^{q+1/2}_{\beta}(D \cap M^{\pm}) \quad (3.1)$$
$$n = 1, 2, \cdots, N$$

Тогда для нормированного условиями (2.2) *решения* $u \in V^{q+2}_{\gamma,\beta}(\Omega)$ *задачи* (1.1), (1.2), (1.4) — (1.6), (1.8) *справедливы включения* $u^{(n)} \in V^{q+2}_{\gamma,\beta}(D_0 \setminus M)$ *и неравенства*

$$\|u^{(n)};\ V^{q+2}_{\gamma,\beta}(D_0 \setminus M)\| \leqslant c_n \Big\{\|f;\ V^{q}_{\beta}(\Omega)\| + \|g^{\pm};\ V^{q+1/2}_{\beta}(M^{\pm})\| +$$

$$+ \|g;\ W^{q+1/2}_{2}(\partial\Omega_0)\| + \sum_{p=1}^{n} [\|f^{(p)};\ V^{q}_{\beta}(D \setminus M)\| + \|g^{\pm(p)};\ V^{q+1/2}_{\beta}(D \cap M^{\pm})\|]\Big\} \quad (3.2)$$

Здесь $n = 1, \cdots, N$; D_0 — окрестность ∂M, причем $\overline{D}_0 \subset D$.

Доказательство. Пусть u — решение задачи (1.1), (1.2), (1.4) — (1.6), (1.8), а $\chi \in C_0^{\infty}(R^2)$ — срезка с малым носителем, равная единице в окрестности нуля; $\operatorname{supp} \chi \Subset D$. Векторное поле $v(x) = \chi(y)\, u(x)$ удовлетворяет системе уравнений теории упругости с новыми правыми частями

$$F(x) = \chi(y) f(x) + l\left(y,\ s,\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial s}\right) u(x),\quad G^{\pm}(x) = \chi(y)\, g^{\pm}(x) +$$

$$+\, b(y,\ s)\, u(x) \tag{3.3}$$

в уравнениях (1.2), (1.5) и однородным граничным условиям (1.6). Здесь l — матричный оператор первого порядка, b — матрица-функция; носители коэффициентов l и элементов b содержатся в D и отделены от ∂M. Поэтому (см. лемму 1) справедливы неравенства

$$\|lu;\ V^{q}_{\beta}(\Omega)\| + \|bu; V^{q+1/2}_{\beta}(M^{\pm})\| \leqslant c_1 \|u;\ V^{q+1}_{\beta}(\Omega)\| \leqslant c_2 \|u;\ V^{q+2}_{1,\beta}(\Omega)\| \tag{3.4}$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial s}\, lu;\ V^{q}_{\beta}(\Omega)\right\| + \left\|\frac{\partial}{\partial s}\, bu;\ V^{q+1/2}_{\beta}(\partial\Omega)\right\| \leqslant c_3 \|u;\ V^{q+2}_{1,\beta}(\Omega)\|$$

Вектор смещений v удовлетворяет системе Ламе и граничным условиям на $M^{\pm}$ с правыми частями F и $G^{\pm}$. Запишем указанные уравнения для краткости в матричной форме

$$L(x,\ \partial/\partial x)\, v + F = 0 \ \text{в}\ \Omega;\quad B(x,\ \partial/\partial x)\, v = G \ \ \text{на}\ M^{\pm} \tag{3.5}$$

Дифференцируя (3.5) по s, имеем

$$L(x,\ \partial/\partial x)\, v^{(1)} + \partial F/\partial s + \frac{\partial L}{\partial s}(x,\ \partial/\partial x)\, v = 0 \ \text{в}\ \Omega$$

$$B(x,\ \partial/\partial x)\, v^{(1)} = \partial G^{\pm}/\partial s - \frac{\partial B}{\partial s}(x,\ \partial/\partial x)\, v \ \text{на}\ M^{\pm} \tag{3.6}$$

В силу соотношения

$$\left\|\frac{\partial L}{\partial s}\, v;\ V^{q}_{\beta}(\Omega)\right\| + \left\|\frac{\partial B}{\partial s}\, v;\ V^{q+1/2}_{\beta}(M^{\pm})\right\| \leqslant c_4 \|u;\ V^{q+2}_{1,\beta}(\Omega)\|$$

из неравенств (3.4) и теоремы 1 получаем, что решение $v^{(1)}$ уравнений (3.6) и однородных граничных условий на $\partial\Omega_0$ удовлетворяет оценке

$$\|v^{(1)};\ V^{q+2}_{1,\beta}(\Omega)\| \leqslant c_5 (\|u;\ V^{q+2}_{1,\beta}(\Omega)\| + \|f^{(1)};\ V^{q}_{\beta}(D \cap M)\| +$$

$$+ \|g^{\pm(1)};\ V^{q+1/2}_{\beta}(D \cap M^{\pm})\|) \tag{3.7}$$

Так как поля u и v совпадают на множестве $\{x : \chi(y) = 1\}$, то согласно (2.6), из (3.7) следует требуемое неравенство (3.2) при $n = 1$. Для остальных значений n оценки (3.2) получаются последовательным применением приведенных рассуждений к вектор-функциям $v^{(n-1)}$. Лемма доказана.

При доказательстве теоремы 2 настоящей работы (см. теорему 3 из [1]), решение задачи ползучести, как обычно [16, 17], было представлено в виде сходящегося в $L^{\infty}(0,\ T;\ V^{q+2}_{1,\beta}(\Omega))$ ряда, члены которого суть решения рекуррентной последовательности задач теории упругости. Применяя к ним оценки (3.2) и повторяя ход доказательства теоремы 3 [1], получим следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть в дополнение к условиям теоремы 2 имеют место включения*

$$E_*,\ G\in C^{q+1+n}([0,T^*]\times\overline{D}),\ p_i,\ q_i\in C^{q+1+n}([0,T^*]\times[0,T^*]\times\overline{D})$$

$$\lambda\in C^{q+1+n}(\overline{D}),\quad f^{(n)}\in L^\infty(0,T;V^q_\beta(D\setminus M))$$

$$g^{\pm(n)}\in L^\infty(0,T;V^{q+1/2}_\beta(D\cap M^\pm)),\quad n=1,\cdots,N. \tag{3.8}$$

Тогда для нормированного условиями (2.2) *решения u задачи* (1.1)—(1.6) *справедливы включения $u^{(n)}\in L^\infty(0,T;V^{q+2}_{\beta}(D_0\setminus M))$ и неравенства*

$$\|u^{(n)};V^{q+2}_\beta(D_0\setminus M),T\|\leqslant c_n\,[\|f;V^q_\beta(D\setminus M),T\|+\|g;W_2^{q+1/2}(\partial\Omega_0)\|+$$

$$+\|g^\pm;V^{q+1/2}_\beta(D\cap M^\pm),T\|+\sum_{p=1}^{n}[\|f^p,V^q_\beta(D\setminus M),T\|+$$

$$+\|g^{\pm(p)};V^{q+1/2}_\beta(D\cap M^\pm),T\|] \tag{3.9}$$

4. *Асимптотика в задаче упругости.* Следуя [13], получим асимптотические формулы для решения u задачи упругости (1.1), (1.2), (1.4)—(1.6), (1.8). Для этого на множестве $D\setminus M$ сведем указанную краевую задачу к совокупности двумерной задачи теории упругости и задачи кручения в сечении $\{(y,s)\in D\setminus M:\ s=s_0\}$:

$$L^0\left(s,\frac{\partial}{\partial y}\right)v(y,s)+\Phi(y,s)=0 \text{ в } k;\ B^0\left(s,\frac{\partial}{\partial y}\right)v(y,s)=$$

$$=\Psi^\pm(y,s) \text{ на } \partial k \tag{4.1}$$

где $k=R^2\setminus\{y:\ y_2=0,\ y_1\leqslant 0\}$ — плоскость, ослабленная лучом;

$$L^0\left(s,\frac{\partial}{\partial y}\right)=$$

$$=\left\|\begin{matrix}\mu(s)\Delta+(\lambda(s)+\mu(s))\partial^2/\partial y_1^2; & (\lambda(s)+\mu(s))\partial^2/\partial y_1\partial y_2; & 0\\ (\lambda(s)+\mu(s))\partial^2/\partial y_2\partial y_1; & \mu(s)\Delta+(\lambda(s)+\mu(s))\partial^2/\partial y_2^2; & 0\\ 0; & 0; & \mu(s)\Delta\end{matrix}\right\|$$

$$B^0\left(s,\frac{\partial}{\partial y}\right)=\left\|\begin{matrix}\mu(s)\partial/\partial y_2; & \mu(s)\partial/\partial y_1; & 0;\\ \lambda(s)\partial/\partial y_1; & (2\mu(s)+\lambda(s))\partial/\partial y_2; & 0;\\ 0 & 0; & \mu(s)\partial/\partial y_2\end{matrix}\right\| \tag{4.2}$$

$\mu(s)$, $\lambda(s)$ — замороженные на ребре ∂M коэффициенты Ламе

$$\mu(s)=G(0,s),\ \lambda(s)=[E_*(0,s)-2G(0,s)]/3. \tag{4.3}$$

Как и в лемме 2, умножим поле смещений u на срезающую функцию χ. Полученная вектор-функция $v=\chi u$ удовлетворяет системе (3.4), а, следовательно, и уравнениям (4.1), где

$$\Phi(y,s)=F(x)+[L(x,\partial/\partial x)-L^0(s,\partial/\partial y)]\,v$$

$$\Psi^\pm(y,s)=G^\pm(x)-[B(x,\partial/\partial x)-B^0(s,\partial/\partial y)]\,v \tag{4.4}$$

Для того, чтобы воспользоваться результатами [9, 10, 2, 3, 5] о плоских задачах, необходимо оценить нормы функции (4.4) в пространствах $V^q_\beta(k)$ и $V^{q+1/2}_\beta(\partial k^\pm)$.

Предположим, что при $n = 0$ справедливы соотношения

$$f^{(n)} \in V_q^q(D \setminus M), \quad g^{\pm (n)} \in V_q^{q-1/2}(D \cap M^{\pm}) \tag{4.5}$$

Тогда в силу (3.3) и того, что носители коэффициентов операторов l и b отделены от M, находим

$$\int_{\partial M} \{\|F(\cdot, s);\ V_q^q(k)\|^2 + \|G^{\pm}(\cdot, s);\ V_q^{q+1/2}(\partial k^{\pm})\|^2\}\, ds \leqslant \tag{4.6}$$

$$\leqslant \mathrm{const}\,\{\|f;\ V_q^q(\Omega)\|^2 + \|g^{\pm};\ V_q^{q+1/2}(M^{\pm})\|^2 + \|v;\ V_{1,\beta}^{q+2}(\Omega)\|^2\}$$

Операторы $L - L^0$ и $B - B^0$ второго и первого порядков, соответственно, обладают следующими свойствами: коэффициенты при $\partial^2/\partial y_j \partial y_k$ в $L - L^0$ и при $\partial/\partial y_j$ в $B - B^0$ обращаются в нуль, если $y = 0$; все коэффициенты этих операторов гладкие в Ω вплоть до границы функции. Поэтому

$$\int_{\partial M} \{\|(L - L^0)\, v(\cdot, s);\ V_{q-1}^q(k)\|^2 + \|(B - B^0)\, v(\cdot, s);\ V_{q-1}^{q+1/2}(\partial k^{\pm})\|^2\}\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\,\{\|v;\ V_{1,\beta}^{q+2}(\Omega)\|^2 + \|\partial v/\partial s;\ V_{1,\beta}^{q+2}(D \setminus M)\|^2\} \tag{4.7}$$

Окончательно, используя теорему 1, лемму 2 и соотношения (2.1), из оценок (4.6), (4.7) получаем неравенство

$$\int_{\partial M} \{\|\Phi(\cdot, s);\ V_q^q(k)\|^2 + \|\Psi^{\pm}(\cdot, s);\ V_q^{q+1/2}(\partial k^{\pm})\|^2\}\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\,\{\|f;\ V_q^q(\Omega)\|^2 + \|g^{\pm};\ V_q^{q+1/2}(M^{\pm})\|^2 + \|g;\ W_2^{q+1/2}(\partial\Omega_0)\|^2 +$$

$$+ \|f^{(1)};\ V_q^q(D \setminus M)\|^2 + \|g^{\pm(1)};\ V_q^{q-1/2}(D \cap M^{\pm})\|^2\} \tag{4.8}$$

Так как первые две строки системы (4.1) образуют плоскую задачу теории упругости, а третья — задачу кручения (см. (4.2)), то, согласно результатам [9, 10, 2, 3, 5] об асимптотике решений двумерных задач, справедливы асимптотические формулы

$$(v_r, v_\theta) = \{c_1(s)(\cos\theta, \sin\theta) + c_2(s)(-\sin\theta, \cos\theta) +$$

$$+ C_1(s)\, r^{1/2}(U_r^1(s, \theta), U_\theta^1(s, \theta)) + C_2(s)\, r^{1/2}(U_r^2(s, \theta), U_\theta^2(s, \theta))\}\, \chi(r) +$$

$$+ (v_r^*, v_\theta^*), \quad v_s = \{c_3(s) + C_3(s)\, r^{1/2}\, U_s^3(\theta)\}\, \chi(r) + v_s^* \tag{4.9}$$

Здесь аргументами функций v_p, v_p^* являются переменные y, s; угловые части U_r^j, U_θ^j, U_s^3 определены равенствами

$$U_r^1(s, \theta) = (2k(s) - 1)\sin\theta/2 + \sin 3\theta/2$$

$$U_\theta^1(s, \theta) = (2k(s) + 1)\cos\theta/2 + \cos 3\theta/2$$

$$U_r^2(s, \theta) = (2k(s) - 1)\cos\theta/2 + 3\cos 3\theta/2$$

$$U_\theta^2(s, \theta) = -(2k(s) + 1)\sin\theta/2 - 3\sin 3\theta/2, \quad U_s^3(\theta) = \cos\theta/2 \tag{4.10}$$

где $k(s) = 3 - 4\nu(s)$, $\nu(s) = [E_*(0, s) - 2G(0, s)]/[2G(0, s) + 2E_*(0, s)]$

В силу результатов [9, 10] при любом $\rho > 0$ и каждом s справедливы оценки

$$\sum_{j=1}^{3} \{|c_j(s)|^2 + |C_j(s)|^2\} + \|v^*(\cdot, s); V_{\rho, \beta}^{q+2}(k)\|^2 \leq$$

$$\leq \text{const}\{\|\Phi(\cdot, s); V_\beta^q(k)\|^2 + \|\Psi(\cdot, s); V_\beta^{q+1/2}(\partial k)\|^2 +$$

$$+ \|v(\cdot, s); V_{\rho, \beta}^{q}(k)\|^2\} \tag{4.11}$$

Интегрируя (4.11) по ∂M, из неравенств (2.6) и (4.8) получаем, что c_j, $C_j \in L_2(\partial M)$, $r^{\rho-2+h} \nabla_y^h v^* \in L_2(D \setminus M)$, $h = 0, \cdots, q+2$. Здесь и далее через $\nabla_y^h v$ обозначена совокупность всех производных порядка h по y_1, y_2 от вектор-функции v.

Так как в окрестности ∂M поля u и v совпадают ($\chi = 1$), то доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть в дополнение к условиям теоремы 1 выполнены соотношения* (3.1) *при* $n = 1$ *и* (4.5) *при* $n = 0$. *Тогда для решения* $u \in V_{\rho, \beta}^{q+2}(\Omega)$ *задачи* (1.1), (1.2), (1.4)—(1.6), (1.8), *нормированного условиями* (2.2), *справедливы асимптотические представления*

$$(u_r, u_\theta) = \{c_1(s)(\cos\theta, -\sin\theta) + c_2(s)(-\sin\theta, \cos\theta) +$$

$$+ C_1(s) r^{1/2}(U_r^1(s, \theta) + U_\theta^1(s, \theta)) + C_2(s) r^{1/2}(U_r^2(s, \theta), U_\theta^2(s, \theta))\} \chi(r) +$$

$$+ (u_r^*, u_\theta^*) \tag{4.12}$$

$$u_s = \{c_3(s) + C_3(s) r^{1/2} U_s^1(\theta)\} \chi(r) + u_s^*$$

$$\sigma_{pq} = 2G(0, s) r^{-1/2} \{C_1(s) \textstyle\sum_{pq}^1(\theta) + C_2(s) \sum_{pq}^2(\theta)\} \chi(r) + \sigma_{pq}^*, \quad p, q = r, \theta$$

$$\sigma_{ps} = \frac{1}{2} G(0, s) r^{-1/2} C_3(s) \textstyle\sum_{ps}(\theta) \chi(r) + \sigma_{ps}^*, \quad p = r, \theta \tag{4.13}$$

$$\sigma_{ss} = 8\nu(s) G(0, s) r^{-1/2} \{c_1(s) \textstyle\sum_{ss}^1(\theta) + c_2 \sum_{ss}^2(\theta)\} \chi(r) + \sigma_{ss}^* \tag{4.14}$$

Здесь аргументами функций u_k *и* σ_{kl} *являются переменные* y, s; *угловые части в соотношениях* (4.12) *определены равенствами* (4.10), *а в соотношениях* (4.13), (4.14) — *равенствами*

$$\textstyle\sum_{rr}^1(\theta) = \frac{5}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{3\theta}{2}, \quad \sum_{rr}^2(\theta) = \frac{5}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{3}{2}\cos\frac{3\theta}{2}$$

$$\textstyle\sum_{\theta\theta}^1(\theta) = \frac{3}{2}\sin\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{3\theta}{2}, \quad \sum_{\theta\theta}^2(\theta) = \frac{3}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2}\cos\frac{3\theta}{2}$$

$$\textstyle\sum_{r\theta}^1(\theta) = \cos\frac{3\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}, \quad \sum_{r\theta}^2(\theta) = \sin\frac{\theta}{2} - 3\sin\frac{3\theta}{2} \tag{4.15}$$

$$\textstyle\sum_{ss}^1(\theta) = -\sum_{\theta s}(\theta) = \sin\frac{\theta}{2}, \quad \sum_{ss}^2(\theta) = \sum_{rs}(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}$$

при любом $\rho > 0$ *справедлива оценка*

$$\sum_{j=1}^{3} \{\|c_j;\ L_2(\partial M)\| + \|C_j;\ L_2(\partial M)\|\} + \sum_{j=1}^{q-2} \|r^{\beta-2+j}\ \nabla_y^j u^a;\ L_2(D\setminus M)\| +$$

$$+\sum_{j=1}^{q+1} \|r^{\beta-1+j}\sigma^a;\ L_2(D\setminus M)\| \leqslant c\,\{\|f;\ V_\beta^q(\Omega)\| + \|g^{\pm};\ V_\beta^{q-1/2}(M^{\pm})\| + \quad (4.16)$$

$$+\|g;\ W_2^{l+1/2}(\partial\Omega_0)\| + \|f^{(1)};\ V_\beta^l(D\setminus M)\| + \|g^{\pm(1)};\ V_\beta^{q-1/2}(M^{\pm}\cap D)\|\}$$

где постоянная c не зависит от f, $g^{\pm}$ и g.

Доказательство. Осталось указать, что представления (4.13), (4.14) получаются после дифференцирования формул (4.12) по y_i и применения неравенства (3.2), $n = 1$ (ср. (1.1), (1.4), (1.8)).

Замечание 2. Выделенные в асимптотических формулах (4.12) и (4.13), (4.14) слагаемые не принадлежат при $\beta \in (0,1/2)$ пространствам, содержащим u_i^a и σ_{ij}^a.

Покажем теперь, что при наличии дополнительной гладкости по s внешних нагрузок f и g коэффициенты интенсивности C_j и функции c_j в (4.12)—(4.14) приобретают дополнительную гладкость.

Обозначим через $U_k(r, \theta, s)$ выражения, стоящие в фигурных скобках в формулах (4.9), а через $V_k(r, \theta, s)$ (через $\Xi_k(r, \theta, s)$) — аналогичные выражения, где c_j, C_j заменены на $\partial c_j/\partial s$, $\partial C_j/\partial s$ (k^0 заменено на $\partial k^0/\partial s$).

Продифференцируем краевую задачу (4.1) по s. Имеем

$$L^0(s, \partial/\partial y)\, v^{(1)}(y, s) + L^{0(1)}(s, \partial/\partial y)\, v(y, s) + \Phi^{(1)}(y, s) = 0 \text{ в } k$$

$$B^0(s, \partial/\partial y)\, v^{(1)}(y, s) + B^{0(1)}(s, \partial/\partial y)\, v(y, s) = \Psi^{(1)}(y, s) \text{ на } \partial k \quad (4.17)$$

Так как U—решение однородной плоской задачи теории упругости и однородной задачи кручения, то [2, 3, 5]

$$0 = \frac{\partial}{\partial s}(AU) = \frac{\partial A}{\partial s} U + AV + A\Xi = \frac{\partial A}{\partial s} U + A\Xi \quad (4.18)$$

где $A = \{L^0(s, \partial/\partial y), B^0(s, \partial/\partial y)\}$. Введем вектор-функцию

$$w(r, \theta, s) = v^{(1)}(r, \theta, s) - \Xi(r, \theta, s)\,\chi(r)$$

Из (4.17), (4.18) получаем, что

$$L^0\left(s, \frac{\partial}{\partial y}\right) w + \varphi = 0 \text{ в } k;\ B^0\left(s, \frac{\partial}{\partial y}\right) w = \psi \text{ на } \partial k \quad (4.19)$$

где

$$\{\varphi, \psi\} = \{\Phi^{(1)}, \Psi^{(1)}\} + \{L^{0(1)}, B^{0(1)}\}\, v^* +$$

$$+ [\{L^{0(1)}, B^{0(1)}\}, \chi]\, U + [\{L^0, B^0\}, \chi]\, \Xi \quad (4.20)$$

Допустим, что выполнены включения (3.1), $N = 2$, и (4.5), $n = 1$. Из (4.4), (4.16), (3.2) и того, что носители двух последних слагаемых отделены от ∂M, при любом $\rho > 0$ справедливо неравенство

$$\int_{\partial M} [\|\tilde{u}(\cdot, s); V^q_{q+p}(k)\|^2 + \|\psi^{\pm}(\cdot, s); V^{q+1/2}_{q+p}(\partial k)\|^2]\, ds \leqslant$$

$$\leqslant c(p)\,[\|f; V^q_q(\Omega)\|^2 + \|g^{\pm}; V^{q+1/2}_q(M^{\pm})\|^2 + \|g; W^{q+1/2}_2(\partial\Omega_0)\|^2 +$$

$$+ \|f^{(1)}; V^q_q(D\setminus M)\|^2 + \|g^{\pm(1)}; V^{q+1/2}_q(D\cap M^{\pm})\|^2 +$$

$$+ \|f^{2}; V^q_3(D\setminus M)\|^2 + \|g^{\pm(2)}; V^{q+1/2}_3(D\cap M^{\pm})\|^2]$$

Остается воспользоваться теми же результатами о двумерных задачах, что и при выводе оценок (4.11), (4.16). Таким образом, при $N = 1$ имеем

$$\sum_{j=1}^{3} [\|c_j; W^N_2(\partial M)\| + \|C_j; W^N_2(\partial M)\|] \leqslant \mathrm{const}\, \Pi(f, g^{\pm}, g) \qquad (4.21)$$

где

$$\Pi(f, g^{\pm}, g) = \|f; V^q_q(\Omega)\| + \|g^{\pm}; V^{q+1/2}_q(M^{\pm})\| + \|g; W^{q+1/2}_2(\partial\Omega_0)\| +$$

$$+ \|f^{(N+1)}; V^q_3(D\setminus M)\| + \|g^{\pm(N+1)}; V^{q+1/2}_3(D\cap M^{\pm})\| +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} [\|f^{(j)}; V^q_q(D\setminus M)\| + \|g^{\pm(j)}; V^{q+1/2}_q(D\cap M^{\pm})\|]$$

При помощи подобных же выкладок получаются неравенства (4.21) при $N > 1$. Итак, установлено следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть в дополнение к условиям теоремы 1 выполнены включения* (3.1) *при* $n = 1, \ldots, N+1$ *и* (4.5) *при* $n = 0, \ldots, N$. *Тогда для коэффициентов* c_j *и* C_j в формулах (4.12)—(4.14) справедливы оценки (4.21). Кроме того, для остатков u^* и σ^* в формулах (4.12)—(4.14) имеют место неравенства

$$\sum_{n=0}^{N} \left\{ \sum_{j=0}^{q+2} \left\| r^{j-2+l}\, \nabla^j_y \frac{\partial^n u^*}{\partial s^n}; L_2(D\setminus M) \right\| + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{q+1} \left\| r^{j-1+l}\, \nabla^j_y \frac{\partial^n \sigma^*}{\partial s^n}; L_2(D\setminus M) \right\| \right\} \leqslant \mathrm{const}\, \Pi(f, g^{\pm}, g)$$

5. *Асимптотика решения задач ползучести.* Введем обозначения для «замороженных» на ребре ∂M трещины реологических характеристик:

$$G^0(t, s) = G(t + \varkappa(x), x),\ E^0_*(t, s) = E_*(t + \varkappa(x), x) \text{ при } x \in \partial M$$

$$\nu(t, x) = [E_*(t, x) - 2G(t, x)] / [2G(t, x) + 2E_*(t, x)],\ k(t, x) = 3 - 4\nu(t, x)$$

$$\nu^0(t, s) = \nu(t + \varkappa(x), x),\ k^0(t, s) = k(t + \varkappa(x), x) \text{ при } x \in \partial M$$

$$R^0_i(t, \tau, s) = R_i(t + \varkappa(x), \tau + \varkappa(x), x) \text{ при } x \in \partial M,\ i = 1, 2$$

Здесь $(0, s)$ — криволинейные координаты точки $x \in \partial M$.

Теорема 5. *Пусть в дополнение к условиям теоремы 2 выполнены соотношения (3.8) при $n = 1, \ldots, N+1$ и следующие включения при $n = 0, 1, \ldots, N$:*

$$f^{(n)} \in L^{\infty}(0, T; V_q^0(D \setminus M)),\ g^{(n)} \in L^{\infty}(0, T; V_q^{1-1/2}(D \cap M)) \quad (5.1)$$

Тогда для решения $u \in L^{\infty}(0, T; V_{\beta}^{1,2}(\Omega))$ задачи (1.1)—(1.6), нормированного условиями (2.2), справедливы асимптотические представления

$$(u_r, u_\theta) = [c_1(t, s)(\cos\theta, \sin\theta) + c_2(t, s)(-\sin\theta, \cos\theta)]\, \chi(r) +$$

$$+ r^{1/2}\Big\{\sum_{j=1}^{2} C_j(t, s)(U_r^j(t, s, \theta), U_\theta^j(t, s, \theta)) + A_1(t, s)\Big(\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}\Big) +$$

$$+ A_2(t, s)\Big(\cos\frac{\theta}{2}, -\sin\frac{\theta}{2}\Big)\Big\}\chi(r) + (u_r^*, u_\theta^*) \quad (5.2)$$

$$u_s = [c_3(t, s) + r^{1/2} C_3(t, s)\, U_s^3(\theta)]\, \chi(r) + u_s^*$$

$$\sigma_{hl} = 2G^0(t, s)\, r^{-1/2}\sum_{j=1}^{2} B_j(t, s)\sum\nolimits_{hl}^{j}(\theta)\,\chi(r) + \sigma_{hl}^*, \quad h, l = r, \theta$$

$$\sigma_{\theta s} = -\frac{1}{2}G^0(t, s)\, r^{-1/2} B_3(t, s)\sin\frac{\theta}{2}\chi(r) + \sigma_{\theta s}^*$$

$$\sigma_{rs} = \frac{1}{2}G^0(t, s)\, r^{-1/2} B_3(t, s)\cos\frac{\theta}{2}\chi(r) + \sigma_{rs}^* \quad (5.3)$$

$$\sigma_{ss} = 2G^0(t, s)\, r^{-1/2}\Big[B_1(t, s)\sin\frac{\theta}{2} + B_2(t, s)\cos\frac{\theta}{2}\Big]\chi(r) + \sigma_{ss}^*$$

Здесь аргументами функций u_h, σ_{hl} являются переменные (t, y, s), угловые части $\sum_{hl}^{j}(\theta)$ задаются формулами (4.15), а функции $U_h^j(t, s, \theta)$ определяются по соответствующей функции $U_h^j(s, \theta)$ заменой в (4.10) величины $k(s)$ на $k^0(t, s)$; коэффициенты A_1 и A_2 в (5.2) при каждом s определяются через C_1 и C_2 из уравнения Вольтерра второго рода

$$A_j(t, s) + \frac{2(1 + \nu^0(t, s))}{3}\int_0^t [R_1^0(t, \tau, s) - R_2^0(t, \tau, s)]\, A_j(\tau, s)\, d\tau -$$

$$- \int_0^t R_1^0(t, \tau, s)\, A_j(\tau, s)\, d\tau + \frac{8(1 + \nu^0(t, s))}{3}\int_0^t [R_1^0(t, \tau, s) -$$

$$- R_2^0(t, \tau, s)]\, C_j(\tau, s)\, d\tau -$$

$$- 8\int_0^t R_1^0(t, \tau, s)[\nu^0(t, s) - \nu^0(\tau, s)]\, C_j(\tau, s)\, d\tau = 0$$

коэффициенты интенсивности B_1, B_2, B_3 *выражаются через* C_1, C_2, C_3 *формулами*

$$B_j(t, s) = C_j(t, s) - \int_0^t R_1^0(t, \tau, s)\, C_j(\tau, s)\, d\tau, \quad j = 1, 2, 3;$$

коэффициенты интенсивности B_4, B_5 *связаны с* C_1, C_2, A_1, A_2 *равенствами*

$$B_j(t, s) = \frac{E_*^0(t, s) - 2G^0(t, s)}{6G^0(t, s)} \{C_{j-3}(t, s)\, 2[k^0(t, s) - 1] + A_{j-3}(t, s)\} +$$

$$+ \frac{1}{3}\int_0^t R_1^0(t, \tau, s)\{C_{j-3}(\tau, s)\, 2[k^0(t, s) - 1] + A_{j-3}(\tau, s)\}\, d\tau -$$

$$- \frac{E_*^0(t, s)}{6G^0(t, s)} \int_0^t R_2^0(t, \tau, s)\{c_{j-3}(\tau, s)\, 2[k^0(t, s) - 1] + A_{j-3}(\tau, s)\}\, d\tau, \quad j = 4, 5.$$

Остатки $\overset{*}{u}_k$, $\overset{*}{\sigma}_{kl}$ *в представлениях* (5.2), (5.3) *малы по сравнению с асимптотическими слагаемыми в следующем смысле: при любом* $\beta > 0$ *справедливы оценки*

$$\sum_{n=0}^{N} \left\| \sum_{j=1}^{q+2} r^{\beta-2+j}\, \nabla_q^j \frac{\partial^n \overset{*}{u}}{\partial s^n};\ L_2(D \setminus M),\ T \right\| +$$

$$+ \sum_{j=0}^{q+1} \left\| r^{\beta-1+j}\, \nabla_q^j \frac{\partial^n \overset{*}{\sigma}}{\partial s^n};\ L_2(D \setminus M),\ T \right\| \leqslant \mathrm{const}\, \Pi(f, g^-, g;\ T) \qquad (5.4)$$

$$\Pi(f, g^-, g;\ T) = \| f;\ V_q^q(\Omega),\ T\| + \|g^-;\ V_q^{q+1/2}(M^-),\ T\| +$$

$$+ \|g;\ W_2^{q+1/2}(\partial\Omega_0),\ T\| + \|f^{(N+1)};\ V_2^q(D \setminus M),\ T\| + \|g^{-(N+1)};\ V_2^{q+1/2}(D \cap M^-)\| +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \|f^{(j)},\ V_q^q(D \setminus M),\ T\| + \|g^{-(j)};\ V_q^{q+1/2}(D \cap M^-),\ T\|.$$

Коэффициенты c_j, C_j, A_j, B_j в (5.2), (5.3) удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{j=1}^{3} \{\|c_j;\ W_2^N(\partial M),\ T\| + \|C_j;\ W_2^N(\partial M),\ T\|\} + \sum_{j=1}^{2} \|A_j;\ W_2^N(\partial M),\ T\| +$$

$$+ \sum_{j=1}^{5} \|B_j;\ W_2^N(\partial M),\ T\| \leqslant \mathrm{const}\, \Pi(f, g^-, g;\ T)$$

Замечание 3. Выделенные в (5.2), (5.3) асимптотические слагаемые не принадлежат при $\beta \in (0, 1/2)$ пространствам, содержащим $\overset{*}{u}_k$ и $\overset{*}{\sigma}_{kl}$.

Замечание 4. Из формул (5.3) и (4.14) следует, что асимптотика перемещений u_r, u_θ, u_* и напряжения σ_{**} в задаче теории ползучести отличается от асимптотики в задаче теории упругости.

ԵՐԿՉԱՓ ՃԱՔՈՎ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԾԵՐԱՑՈՂ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿԱՆ

Ն. Խ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Ս. Ա. ՆԱԶԱՐՈՎ, Բ. Ա. ՇՈՅԽԵՏ

Ա մ փ ո փ ու մ

Առաձգականության տեսության և անհամասեռ ծերացող սողքի տեսության մեջ եռաչափ մարմնում երկչափ ճաքի եզրի շրջակայքի լարումների և տեղափոխումների համար ստացված են և հիմնավորված ասիմպտոտիկ ներկայացումներ։ Դիտարկվում է մարմնի եզրի վրա և ճաքում տրված մակերևույթներին ուժերի դեպքը։ Ասիմպտոտիկայի արտածումը հիմնված է որոշ կշռային տարածություններում առաձգականության և սողքի տեսության խնդիրների լուծումների կոէրցիտիվ գնահատականների և հարթ խնդրի լուծումների ասիմպտոտիկ ներկայացման և ճաքով տիրույթների ոլորման խնդիրների վրա։

ASYMPTOTIC FORMULAE FOR THE SOLUTION OF PROBLEMS OF CREEP THEORY OF NONHOMOGENEOUSLY AGING MEDIA

N. Kh. ARUTUNIAN, S. A. NAZAROV, B. A. SHOIKHET

S u m m a r y

An asymptotic behaviour of stresses and strains near the edge of the crack in the three-dimensional body in the theory of elasticity or in the creep theory of non-homogeneously aging media is obtained and proved. The case of action of surface loading is investigated. The inference of asymptotic formulae is based on the asymptotic formulae for solutions concerning the plane problems and the problems of torsion in the domain weakened by an infinite crack. The basis of the formulae in question is the use of the coercive estimates for weighed functional spaces of solutions concerning the problems of the theory of elasticity and the creep theory.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров С. А., Шойхет Б. А.* Коэрцитивные оценки в весовых пространствах решений трехмерных задач теории упругости и ползучести в области с двумерной трещиной.— Изв. АН АрмССР, Механика, 1983, т. 36, № 4.
2. *Williams M. L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension.— J. Appl. Math., 1952, vol. 19, № 4. p. 526–528.
3. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 2. М., Наука, 1976. 376 с.
4. *Журавлев В. П., Назаров С. А., Шойхет Б. А.* Асимптотика вблизи вершины трещины напряженно-деформированного состояния неоднородно стареющих тел.— Докл. АН АрмССР, 1982, т. 74, № 1, с. 26–29.
5. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.

6. *Арутюнян Н. Х., Назаров С. А., Шойхет Б. А.* Оценки и асимптотика напряженно-деформированного состояния трехмерного тела с трещиной в теории упругости и теории ползучести.— Докл. АН СССР, 1982, т. 266, № 6, с. 1365—1369.
7. *Арутюнян Н. Х.* О теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих сред.— Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 3, с. 569—571.
8. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations, satisfying general boundary conditions.— Comm. Pure Appl. Math., 1964, vol. 17, p. 35—92.
9. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.— Тр. Московского матем. общества, 1967, т. 16, с. 219—292.
10. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками.— Math. Nachr., 1977, Bd. 76, s. 29—60.
11. *Морозов Н. Ф.* Избранные двумерные задачи теории упругости. Л.: изд-во ЛГУ, 1980. 184 с.
12. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
13. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи ребра.— Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 1, с. 33—36.
14. *Никишкин В. А.* Особенности решений задачи Дирихле для уравнений второго порядка в окрестности ребра.— Вестник МГУ, сер. мат., мех., 1979, № 2, с. 51—62.
15. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* Об эллиптических краевых задачах в областях с кусочно гладкой границей.— Тр. симпозиума по механике сплошных сред и родственным проблемам математического анализа (Тбилиси, 1971), т. 1. Тбилиси: Мецниереба, 1973, с. 171—181.
16. *Арутюнян Н. Х., Шойхет Б. А.* Асимптотическое поведение решения краевой задачи теории ползучести неоднородно стареющих тел с односторонними связями.— Изв. АН СССР, МТТ, 1981, № 3, с. 31—48.
17. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 160 с.
18. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.

Институт проблем механики АН СССР
Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Всесоюзный научно-исследовательский институт
гидротехники им. Б. Е. Веденеева

Поступила в редакцию
19. XI. 1982