

ВХОД ТЕЛА В ВОДУ ЧЕРЕЗ СЛОЙ ЛЬДА

САГОМОНИН А. Я., ГАЕВСКАЯ Н. С.

Пусть тело имеет форму тонкого конуса с углом раствора 2γ , переходящего на высоте h в цилиндр. Рассмотрим вертикальное проникание такого тела в полупространство, заполненное водой, на поверхности которой лежит слой льда толщиной l . До начала проникания лед и вода неподвижны, начальная скорость проникания V_0 перпендикулярна свободной поверхности льда. Будем считать, что скорость V_0 меньше скорости звука в воде.

При движении тонкого тела во льду возникает присоединенная ударная волна, на фронте которой происходит разрушение льда. Плавления льда на фронте волны не будет, так как в работе [1] экспериментально показано, что плавление льда на фронте волны наблюдается только при интенсивности волны большей $22 \cdot 10^9$ Па. В нашей задаче на рассматриваемом диапазоне скоростей удара такое давление не достигается. Перед фронтом разрушения распространяются акустические волны, под действием которых напряжения в среде достигают предела прочности P_* , составляющего для льда $2 \div 5 \cdot 10^9$ Па. При прохождении ударной волны по льду за ее фронтом происходят необратимые объемные деформации, связанные с разрушением материала, в том числе пор, содержащих пузырьки воздуха, поэтому лед за ударной волной можно рассматривать как пластически сжимаемую среду. Сделаем допущение о том, что плотность льда меняется только на ударной волне и определяется интенсивностью волны, а тензор напряжения в среде за фронтом волны шаровой.

Для расчета движения тела во льду воспользуемся моделью, предложенной в работе [2] для решения задачи о проникании тонкого тела в пластически сжимаемую среду. В модели предполагается, что при описании движения среды вблизи тела можно применять гипотезу плоских сечений.

Задачу будем рассматривать в цилиндрической системе координат r, z , ось z направлена по оси тела вниз (фиг. 1). Пусть в момент времени t вершина конуса находится на глубине $H(t)$, а его скорость равна $\dot{H}(t)$. Исследуем движение среды в некотором произвольном сечении z . В момент, когда вершина конуса коснулась плоскости z , в плоскости в соответствии с используемой гипотезой плоских сечений возникла цилиндрическая ударная волна. В последующие моменты времени область возмущенного движения среды в плоскости z будет заключена между двумя окружностями: радиус внешней окружности равен координате фронта ударной волны $r = r^*$, внутренней границей области будет окружность радиуса

$R(t)$, являющаяся линией пересечения поверхности тела с рассматриваемой плоскостью z

$$R(t) = [H(t) - z] \gamma$$

Уравнения движения и неразрывности среды в сечении z имеют следующий вид:

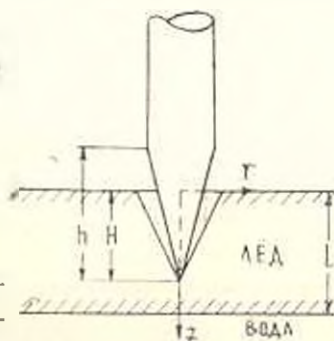
$$\begin{aligned} \rho_0 r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (r + u) \frac{\partial P}{\partial r} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (r + u)^2 &= \frac{\rho_0}{\rho} r \end{aligned} \quad (1.1)$$

где r — координата Лагранжа, u — перемещение частицы, ρ_0, ρ — начальная и текущая плотность льда, P — давление.

Законы сохранения массы и импульса на фронте ударной волны при $r = r^*$ в сечении z запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \rho D &= \rho (D - u^*) \\ \rho_0 D u^* &= P^* - P_0 \end{aligned}$$

здесь D — скорость ударной волны, u^* — скорость частиц на ударной волне, P_0 — давление перед фронтом волны, P^* — давление на ударной волне.



Фиг. 1.

Граничные условия для системы (1.1) будут следующие:

$$\begin{aligned} \text{при } r &= 0 & u(0, t) &= R(t) \\ \text{при } r &= r^* & P &= P^*, \quad u = u^*, \quad u = 0 \end{aligned}$$

Решая полученную систему уравнений, найдем давление $P_*(z)$, действующее на коническую поверхность проникающего тела

$$P_*(z) = \frac{\rho_0}{2b} \left(\ln \frac{1}{1-b} \right) (H-z) H \gamma^2 + \frac{\rho_0}{2b} \left(\ln \frac{1}{1-b} + b \right) H \gamma^2 + P_0$$

Параметр $b = \rho_0/\rho$ определяется по значению плотности за ударной волной в начальный момент проникания. В этот момент давление на фронте волны равно

$$P^* = P_0 + \rho_0 v_{01}^2$$

Из динамической кривой сжатия льда по вычисленному значению P^* находят значение плотности ρ . Экспериментальная динамическая кривая сжатия льда с начальной плотностью $\rho_0 = 920 \text{ кг/м}^3$ приведена в работе [1].

Определим силу сопротивления, действующую в вертикальном направлении на коническую часть тела, расположенную выше линии раздела лед-вода.

При глубине проникания $H < h$ сила сопротивления равна

$$F_A = 2\pi\gamma^2 \int_0^H (H-z) P_s(z) dz = \gamma_A H^3 + \alpha_A H^2 \dot{H}^2 + \beta H^2$$

$$\gamma_A = \pi\gamma^2 \frac{p_0}{3b} \ln \frac{1}{1-b}; \quad \alpha_A = \pi\gamma^2 \frac{p_0}{2b} \left(\ln \frac{1}{1-b} + b \right); \quad \beta = \pi\gamma^2 P_0/2$$

При дальнейшем проникании, когда H становится больше длины конической части проникающего тела, происходит отрыв среды от боковой поверхности в точке $z = H - h$, и поверхность контакта конуса со льдом не меняется до того момента, пока вершина тела не коснется линии раздела лед-вода. Сила сопротивления на этом участке определяется по формуле

$$F_A = 2\pi\gamma^2 \int_{H-h}^H (H-z) P_s(z) dz = \gamma_A h^3 H + \alpha_A h^2 H^2 + \beta h^2$$

При глубине проникания $H > l$ сила сопротивления со стороны льда действует только на ту часть конуса, которая находится ниже линии раздела, на нижнюю часть конуса действует сила сопротивления воды. Сила F_A будет равна

$$F_A = 2\pi\gamma^2 \int_{H-l}^l (H-z) P_s(z) dz = \gamma_A [h^2 - (H-l)^2] H + \alpha_A [h^2 - (H-l)^2] H^2 + \beta [h^2 - (H-l)^2]$$

Перейдем к рассмотрению движения тела в воде и определим силу сопротивления воды. Как показывают исследования, влиянием сжимаемости воды при проникании тонких тел в первом приближении можно пренебречь, поэтому будем в качестве модели воды использовать модель идеальной несжимаемой жидкости.

Пусть в момент времени t_1 , когда вершина конуса достигла линии раздела лед-вода, скорость тела равна V_1 . До момента $t = t_1$ жидкость покоилась. Движение, возникшее в жидкости при $t > t_1$, будет потенциальным. Потенциал скорости $\varphi(r, z, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0$$

Поскольку для модели проникания тела в лед была принята гипотеза плоских сечений, то граничное условие на поверхности раздела $z = l$ для любого момента времени будет иметь вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

Граничное условие на поверхности тела в силу малости угла γ запишется так

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \begin{cases} H\gamma, & \eta \leq z \leq \bar{H} \\ 0, & 0 \leq z < \eta \end{cases} \quad (1.2)$$

Здесь $\bar{H} = H - l$, а функция η задается в виде

$$\eta = \begin{cases} 0, & \bar{H} \leq h \\ \bar{H} - h, & \bar{H} > h \end{cases}$$

Продолжим потенциал скорости на основании принципа симметрии четным образом на верхнюю полуплоскость и представим его в виде

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\bar{H}}^{\bar{H}} \frac{q(\xi)}{V(\xi - z)^2 + r^2} d\xi \quad (1.3)$$

Задача свелась к определению функции $q(\xi)$. В работе [3] показано, что на образующей тонкого тела справедливо соотношение

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=0} = \frac{1}{2\pi} \frac{q(z)}{r}$$

Используя граничные условия (1.2) в рамках линейного приближения можно записать

$$q(z) = \begin{cases} 0, & z > H \\ 2\pi\gamma^2(H - z)H, & \eta \leq z \leq H \\ 0, & -\eta < z < \eta \\ 2\pi\gamma^2(H + z)H, & -H \leq z \leq -\eta \\ 0, & z < -H \end{cases} \quad (1.4)$$

Для упрощения знак « $\sim$ » над величиной H временно опустим.

На основании (1.4) потенциал скорости (1.3) представится формулой

$$\varphi = -\frac{1}{2}\gamma^2 H \left\{ \int_{\eta}^H \frac{(H - \xi) d\xi}{V(\xi - z)^2 + r^2} + \int_{-H}^{-\eta} \frac{(H + \xi) d\xi}{V(\xi - z)^2 + r^2} \right\}$$

Из линейризованного уравнения Коши-Лагранжа определим давление, действующее на коническую поверхность тела

$$P_s(z) = -\rho_s \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Рассмотрим два случая в зависимости от глубины проникания тела в воду.

а) глубина проникания в воду меньше l , то есть в воде находится только коническая часть тела. В этом случае давление и сила сопротивления соответственно равны

$$\begin{aligned}
P_*(z) &= \frac{1}{2} \rho_* \gamma^2 H \left[(H-z) \left(\ln \frac{4}{\gamma^2} - 2 \right) + H \ln \frac{H+z}{H-z} + \right. \\
&\quad \left. + z \ln \frac{H^2 - z^2}{z^2} \right] + \frac{1}{2} \rho_* \gamma^2 H^3 \left(\ln \frac{L}{\gamma^2} + \ln \frac{H+z}{H-z} \right) \\
F_* &= 2\pi \gamma^2 \int_0^H (H-z) P_*(z) dz = \gamma_* H^3 H + \alpha_* H^2 H^2 \\
b_* &= \pi \gamma_*^2 \left(-\frac{2}{3} \ln \gamma + 2 \ln 2 - 1 \right) \\
\sigma_* &= \pi \gamma_*^2 (-\ln \gamma - 3 \ln 2 - 1)
\end{aligned}$$

б) глубина проникания в воду больше h

$$\begin{aligned}
P_*(z) &= \frac{1}{2} \rho_* \gamma^2 H \left[(H-z) \left(\ln \frac{4}{\gamma^2} - 2 \right) + H \ln \frac{H+z}{H-z} \frac{z-\eta}{z+\eta} + \right. \\
&\quad \left. + z \ln \frac{H^2 - z^2}{z^2 - \eta^2} \right] + \frac{1}{2} \rho_* \gamma^2 H^3 \left[\ln \frac{4}{\gamma^2} + \ln \frac{H+z}{H-z} \frac{z-\eta}{z+\eta} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{h}{V(z-\eta)^2 + (H-z)^2 \gamma^2} - \frac{h}{V(z+\eta)^2 + (H-z)^2 \gamma^2} \right]
\end{aligned}$$

Следует отметить, что вершина тела и линия стыка конической части с цилиндрической являются особыми точками. Около вершины конуса давление стремится к бесконечности, а вблизи линии стыка возникает область разрежения. Нижнюю границу области разрежения можно определить из решения уравнения

$$P_*(z) = 0 \quad (1.5)$$

Расчеты показывают, что основной вклад в величину давления составляет член, пропорциональный H^3 , поэтому членом H можно пренебречь, и тогда уравнение (1.5) сводится к виду

$$\begin{aligned}
\ln \frac{4}{\gamma^2} + \ln \frac{H+z}{H-z} \frac{z-\eta}{z+\eta} - \frac{h}{V(z-\eta)^2 + (H-z)^2 \gamma^2} - \\
- \frac{h}{V(z+\eta)^2 + (H-z)^2 \gamma^2} = 0
\end{aligned}$$

Сила сопротивления, действующая на тело, определяется по формуле

$$F_* = 2\pi \gamma^2 \int_0^H (H-z) P_*(z) dz = H f(H, \eta) + H^2 g(H, \eta)$$

$$\begin{aligned}
g(H, z) = & (H - z)^2 \ln \frac{2}{\gamma} + \frac{(H - z)^2}{2} \ln \frac{H + z}{H - z} \frac{z - \gamma}{z + \gamma} + \\
& + 2H^2 \ln \frac{2H}{H + z} + \frac{1}{2} h^2 \ln \frac{h}{z - \gamma} - (H + \gamma) \left(H + \frac{h}{2} \right) \ln \frac{H + \gamma}{z + \gamma} + \\
& + h^2 - h^2 \ln \frac{2h}{z - \gamma + \sqrt{(z - \gamma)^2 + (H - z)^2 \gamma^2}} \\
f(H, z) = & \frac{2}{3} (H - z)^2 \left(\ln \frac{2}{\gamma} - 1 \right) + H \left[-h(H - z) + \right. \\
& + \frac{(H - z)^2}{2} \ln \frac{H + z}{H - z} \frac{z - \gamma}{z + \gamma} - \frac{1}{2} (H + \gamma)^2 \ln \frac{H + \gamma}{z + \gamma} + \\
& + h^2 \ln \frac{h}{z - \gamma} + 2H^2 \ln \frac{2H}{H + z} \left. \right] + \\
& + \frac{1}{3} \left[H^3 \ln \frac{H^2 - \gamma^2}{4H^2} \frac{H + z}{H - z} + \gamma^2 \ln \frac{H - \gamma}{H + \gamma} \frac{z - \gamma}{z + \gamma} - \right. \\
& - z^3 \ln \frac{z^2 - \gamma^2}{H^2 - z^2} + 2(H^2 - \gamma^2)(H - z) \left. \right] + \\
& + \frac{H}{2} \left[H^2 \ln \frac{H^2 - z^2}{H^2 - \gamma^2} + (z^2 - \gamma^2) \ln \frac{z^2 - \gamma^2}{H^2 - z^2} \right]
\end{aligned}$$

α — нижняя граница области разрежения.

Объединим полученные решения и найдем зависимость между скоростью тела и глубиной проникания. Закон движения тела массы m будет:

$$m\ddot{H} = -(F_v + F_n)$$

Выделим в процессе проникания четыре этапа в зависимости от глубины проникания (фиг. 2).

1. Глубина проникания $H \leq h$

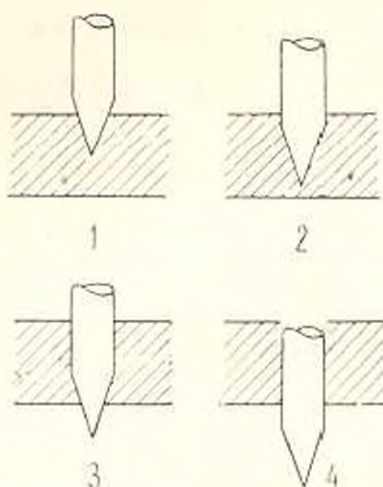
Уравнение движения тела имеет вид

$$m\ddot{H} = -(\rho_s H^3 \dot{H} + \rho_s H^2 \dot{H}^2 + \frac{\rho}{2} \dot{H}^3)$$

$$H(0) = V_0$$

Решение этого уравнения представляется формулой

$$\begin{aligned}
H = & \left[-\frac{\rho}{2\rho_s} + \left(V_0^2 + \frac{\rho}{\rho_s} \right) \times \right. \\
& \times \left(1 + \frac{\rho_s}{m} H^3 \right)^{-2\rho_s/3\rho_s - 1/2} \left. \right]^{1/2} \quad (1.6)
\end{aligned}$$



Фиг. 2.

2. Глубина $h < H \leq l$

$$m\dot{H} = -(\lambda_A h^3 \dot{H} + \lambda_A h^2 \ddot{H}^2 + \beta h^2)$$

$$H(h) = V_A$$

V_A — значение скорости тела на глубине $H = h$, вычисленное по формуле (1.6).

Решение уравнения:

$$H = \left\{ -\frac{\beta}{\lambda_A} + \left(V_A^2 + \frac{\beta}{\lambda_A} \right) \exp \left[-\frac{2\lambda_A h^2}{m + \lambda_A h^2} (H - h) \right] \right\}^{1/2} \quad (1.7)$$

3. Глубина $l < H \leq l + h$

В этом случае на нижнюю часть конуса действует сила сопротивления со стороны жидкости, а на верхнюю — сила сопротивления льда. Уравнение движения имеет вид

$$m\dot{H} = -[\lambda_A (h^2 - \bar{H}^2) \dot{H} + \dot{H}^2 \lambda_A (h^2 - \bar{H}^2) + \beta (h^2 - \bar{H}^2) + \lambda_A \bar{H}^2 \dot{H} + \lambda_A \bar{H}^2 \ddot{H}^2]$$

$$\bar{H}(l) = V_l, \quad \bar{H} = H - l$$

V_l — значение скорости, найденное по формуле (1.7) для $H = l$. В общем случае уравнение не имеет аналитического решения. Если скорость проникания достаточно велика, то, как показали расчеты, вклад члена, пропорционального величине β , мал на всех этапах и этим членом можно пренебречь. В этом случае уравнение имеет аналитическое решение:

$$H = V_l \exp[-Q(\bar{H})]$$

Функция $Q(x)$ задается в виде

$$Q(x) = \frac{\lambda_A - \lambda_B}{\lambda_A - \lambda_B} \left[\frac{1}{3} \ln \frac{a^2 - x^2}{a^2} - \frac{b}{6a^2} \ln \frac{(a-x)^2}{a^2 + ax + x^2} + \frac{b}{a^2} \frac{1}{3} \arctg \left(\frac{2x+a}{a\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} \right) \right]$$

$$a^2 = \frac{m + \lambda_A h^2}{\lambda_A - \lambda_B}; \quad b = \frac{\lambda_A h^2}{\lambda_A - \lambda_B}$$

4. Глубина проникания $H > l + h$

$$m\dot{H} = -[Hf(\bar{H}, \alpha) + H^2 g(\bar{H}, \alpha)]$$

$$H(l+h) = v_{l+h}$$

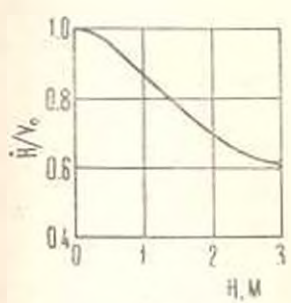
Решение уравнения

$$\bar{H} = v_{l+h} \exp \left(- \int \frac{g(\bar{H}, \alpha)}{m + f(\bar{H}, \alpha)} d\bar{H} \right)$$

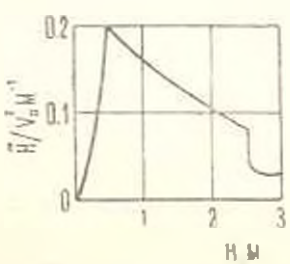
Расчеты показали, что величина $f(H, \alpha)$ значительно меньше массы тела m , а значения функции $g(H, \alpha)$ мало меняются при увеличении H . Полагая $g(H, \alpha) = \cos \alpha = G$ формулу можно упростить

$$\dot{H} = V_{\text{изл}} \exp \left[-\frac{G}{m} (H - h) \right]$$

Результаты расчетов для тела массы 10 кг, с углом полураствора $\alpha = 10^\circ$, высотой конической части $h = 0,5$ м и значением l , равным $4h$, представлены на графиках. На фиг. 3 показана зависимость скорости тела от глубины проникания. На фиг. 4 показано изменение ускорения тела



Фиг. 3.



Фиг. 4.

в процессе движения. Следует отметить, что максимальная величина ускорения достигается на глубине $H = h$, далее наблюдается монотонный спад ускорения до глубины $H = l + h$, после начала входа в воду цилиндрической части ускорение резко падает.

ԱՄԵՐԻՅԻ ՇԵՐՏԻ ՄԻՋՈՎ ՄԱՐԻՆԻ ԹԱՓԱՆՑՈՒՄԸ ՀԵՂՈՒՆԻ ՄԵՋ

Ա. ՅԱ. ԱՎԻՄՈՆՅԱՆ, Ի. Ս. ՊԱՆՈՍՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ս

Հողվածում ուսումնասիրվում է վերջավոր հաստությամբ սառույցի շերտի միջով պինդ, նեղ կանի ներթափանցումը իդեալական անսեղմելի հեղուկի մեջ, որը դրսևեցնում է կիսատարածությունը: Մանրուկյան ուժերը արհամարվում են: Անթադրվում է, որ սառույցի մեջ ներթափանցման պրոցեսը տեղի է ունենում բաշրայան մակերևույթի (աղիբի) առաջացումով, սառույցի հալում տեղի է ունենում: Վերջին ենթադրությունը հիմնված է գրականության ցանկի [1] աշխատանքի արդյունքների վրա: Ստացվում է ներթափանցման օրենքը որոշող անալիտիկ փակ բանաձևեր:

THE PENETRATION OF A BODY INTO WATER THROUGH A LAYER OF ICE

A. JA. SAGOMONIAN, I. S. GAEVSKAYA

S u m m a r y

In the paper the problem of vertical penetration of a rigid narrow cone through a layer of ice of finite thickness in ideal incompressible fluid occupying half the space is investigated. The gravitation forces are neglected. It is supposed that the process of penetration in a layer of ice is realized with the formation of the surface (wave) of fracture; the melting (thaw) of ice does not occur. The latter assumption is based on the results of paper [1] in the reference list. Closed analytical formulae, determining the law of penetration, are obtained.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Schroeder R. C., Mc. Master W. H.* Shock compression freezing and melting of water and ice — *J. Appl. Phys.* 1973, 44, No. 6, p. 2591—2594.
2. Согомонян А. Я. Проникание. М.: Изд. МГУ, 1974.
3. Багдасян А. Г. Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван: Изд. АН Арм.ССР, 1961.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
25. X. 1982