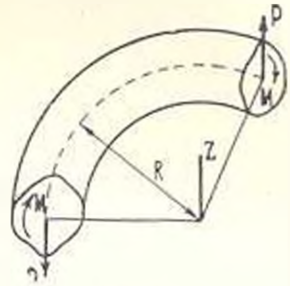
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVI, № 3, 1983 Механика

КРУЧЕНИЕ СЕКТОРА КРУГОВОГО КОЛЬЦА С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

ПОЛАДЯН Ф. М.

Рассматривается задача о кручении стержня с круговой осью и постоянным поперечным сечением, материал которого обладает свойством нелинейной наследственной ползучести [1].

Пусть рассматриваемый стержень находится под воздействием перерезывающих сил P и крутящих моментов PR (R-радиус оси стержня), приложенных на торцевых сечениях (фиг. 1).



Фиг. 1.

Впервые такая задача в постановке теории упругости рассматривалась в работе [2], а затем — в [3—6]. Аналогичная задача за пределом упругости для неупрочняющегося материала исследована в [7—9]. Для упрочняющегося материала эта задача исследована в работах [10—12].

Кручение кривых стержней при нелинейной наследственной ползучести исследовано в работах [13—15].

§ 1. *Основные уравнения задачи.* В случае пространственного напряженного состояния связь между компонентами деформации ползучести и напряжения при нелинейной теории наследственности с учетом старения материала, согласно Н. Х. Арутюняну [1], имеет вид

$$2G(t)\,\varepsilon_{ij}(t) = s_{ij}(t) - \int_{\tau_1}^{t} s_{ij}(\tau)\,K_1(t,\tau)\,d\tau - \int_{\tau_1}^{t} s_{ij}(\tau)\,f[\sigma_0(\tau)]\,K(t,\tau)\,d\tau \tag{1.1}$$

где $G(t)$ – модуль мгновенной деформации сдвига, $\varepsilon_{ij}(t)$ — компоненты деформаций, $s_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t) - \delta_{ij}\,\sigma(t)$, $\sigma_{ij}(t)$ — компоненты напряжения, δ_{ij} — символ Кронекера, $\sigma(t)$ — среднее давление, $f[\sigma_0(t)]$ — некоторая функция, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести для данного материала, $\sigma_0(t)$ — интенсивность касательных напряжений,

$$K_1(t,\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{G(t)}{G(\tau)}\right], \quad K(t,\tau) = 3G(t)\,\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}$$

$C(t, \tau)$ — мера ползучести при одноосном напряженном состоянии, τ_1 — возраст материала в момент приложения нагрузки, t — время.

Воспользуемся цилиндрическими координатами.

Для компонентов деформации будем иметь [16]

$$
\varepsilon_r(t) = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta(t) = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}
$$

$$
\varepsilon_z(t) = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{r\theta}(t) = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{1.2}
$$

$$
2\varepsilon_{z\theta}(t) = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad 2\varepsilon_{zr}(t) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}
$$

Перемещения представим в виде

$$
u = u_0 + \int \left[2r\varepsilon_{r\theta}(t) - r\frac{\partial v}{\partial r} + v\right] d\theta
$$

$$
v = v_0 + \int \left[r\varepsilon_\theta(t) - u\right] d\theta \tag{1.3}
$$

$$
w = w_0 + \int \left[2r\varepsilon_{\theta z}(t) - r\frac{\partial v}{\partial z}\right] d\theta
$$

где u_0, v_0, w_0 — произвольные функции r, z и t.

Положим, что все компоненты напряжения, за исключением $\sigma_{r\theta}(t)$ и $\sigma_{z\theta}(t)$, в любой момент времени t равны нулю, тогда из уравнений равновесия [16] остаются

$$
\frac{\partial \sigma_{r\theta}(t)}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{z\theta}(t)}{\partial \theta} = 0
$$

$$
\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \sigma_{r\theta}(t)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[r^2 \sigma_{z\theta}(t)\right] = 0 \tag{1.4}
$$

Из двух первых уравнений (1.4) следует, что напряженное состояние стержня не зависит от полярного угла θ. Тогда из соотношения (1.1) следует, что тензор деформации также не зависит от θ.

Подставляя (1.3) в (1.2) и учитывая указанное обстоятельство, получим

$$
\varepsilon_r(t) = \frac{\partial u_0}{\partial r}, \quad \varepsilon_z(t) = \frac{\partial w_0}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{rz}(t) = \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial r} \tag{1.5}
$$

и

$$
2\varepsilon_{r\theta}(t) = \frac{\partial v_0}{\partial r} - \frac{v_0}{r}, \quad 2\varepsilon_{z\theta}(t) = \frac{\partial v_0}{\partial z} - \frac{D(t)}{r} \tag{1.6}
$$

где $D(t)$ — произвольная функция от t.

Из соотношения (1.6), исключая v_0, получим уравнение совместности деформаций

$$
\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\varepsilon_{z\theta}(t)}{r}\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\varepsilon_{r\theta}(t)}{r}\right] = \frac{D(t)}{r^3} \tag{1.7}
$$

Полагая в (1.5) равными нулю все компоненты деформаций, получим систему относительно u_0, w_0. Решая эту систему и пользуясь (1.3), для перемещения получим

$$u = a(t)\, z \sin\theta, \quad v = v_0 + a(t)\, z \cos\theta, \quad w = -D(t)\,\theta - a(t)\, r \sin\theta$$

где $a(t)$ — функция от t, определяемая из условия закрепления стержня.

Вводя функцию напряжений

$$\tau_{r\theta}(t) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \quad \tau_{z\theta}(t) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial r} \tag{1.8}$$

при помощи соотношения (1.1) и уравнения (1.7) получим основное уравнение задачи

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) - \int_{\tau_1}^{t}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right] K_1(t,\tau)\, d\tau - \int_{\tau_1}^{t}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{f(\tau_0)}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right] +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{f(\tau_0)}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right]\right\} K(t,\tau)\, d\tau = -\frac{D(t)\, G(t)}{r^3} \tag{1.9}$$

где

$$\tau_0 = \tau_0(t) = \frac{1}{r^2}\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2} \tag{1.10}$$

Так как боковая поверхность сектора кольца свободна от внешних сил, то $\Phi(r, z, t) = \mathrm{const}$ на контуре. Для односвязной области без нарушения общности можно принять $\Phi(r, z, t) = 0$ на контуре. В случае многосвязной области на каждом контуре Φ принимает различные значения, зависящие только от t.

Таким образом, задача о кручении стержня с круговой осью в условиях нелинейной ползучести приводится к определению функции Φ из нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1.9) при граничном условии

$$\Phi(r, z, t) = 0 \quad \text{на } \Gamma \tag{1.11}$$

Крутящий момент выражается формулой

$$M = \iint_{\Omega} \left[(r - R)\, \tau_{z\theta}(t) - z\tau_{r\theta}(t)\right] d\Omega \tag{1.12}$$

Подставляя (1.8) в (1.12) и применяя формулу Грина-Остроградского, получим

$$M = -\oint_{\Gamma} \Phi\, d\left(\frac{z}{r}\right) + R\oint_{\Gamma}\frac{\Phi}{r^2}dz + 2R\iint_{\Omega}\frac{\Phi}{r^3}\, d\Omega \tag{1.13}$$

Принимая $\Phi = 0$ на внешнем контуре, найдем

$$M = -\sum_{k=1}^{n} R\Phi_k(t) \oint_{\Gamma_k} \frac{dz}{r^2} + 2R \iint_{\Omega} \frac{\Phi}{r^3} d\Omega \tag{1.14}$$

Здесь $\Phi_k(t)$ — значение Φ на внутренних контурах Γ_k. Для односвязной области имеем [5, 11, 15]

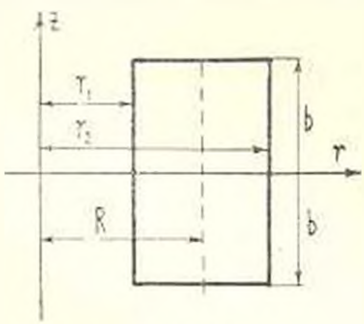
$$M = 2R \iint_{\Omega} \frac{\Phi}{r^3} d\Omega \tag{1.15}$$

§ 2. *Обобщение теоремы Бредта.* Пусть Γ_* — замкнутая кривая, целиком лежащая в поперечном сечении скручиваемого сектора кольца. Область, ограниченную контуром Γ_*, обозначим Ω_*. Интегрируя обе части уравнения (1.9) в области Ω_* и переходя к контурному интегралу, получим (при условии $G(t) = G = \mathrm{const}$)

$$\int_{\Gamma_*} \frac{1}{r^3} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \int_{\tau_1}^{t} f[\tau_0(\tau)] \frac{\partial \Phi}{\partial n} K(t, \tau)\, d\tau \right\} ds = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_*} \frac{dz}{r^2} \tag{2.1}$$

где n — направление внешней нормали к контуру Γ_*, а s — дуга этого контура. Формула (2.1) представляет собой обобщение теоремы Бредта о циркуляции деформации сдвигов при кручении стержня с круговой осью при произвольном законе нелинейной связи между деформациями ползучести и напряжениями.

§ 3. *Прямоугольное сечение.* Рассмотрим случай, когда поперечное сечение представляет прямоугольник (фиг. 2). Тогда граничные условия (1.11) примут следующий вид:



Фиг. 2.

$$\Phi(r_1, z, t) - \Phi(r_2, z, t) = \Phi(r, b, t) = \\ = \Phi(r, -b, t) = 0 \tag{3.1}$$

Полагаем, что $f(\tau_0)$ содержит физический параметр λ, нулевое значение которого соответствует линейной ползучести, то есть $f(\tau_0) = 1$ при $\lambda = 0$. Закон нелинейности возьмем в виде

$$f[\tau_0(t)] = 1 + \lambda [\tau_0(t)]^2 \tag{3.2}$$

Предположим, что решение уравнения (1.9) является аналитической функцией параметра λ и попытаемся определить коэффициенты его разложения в ряд Тейлора по степеням λ. Положим

$$\Phi(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(r, z, t) \tag{3.3}$$

где $\Phi_0(r, z, t)$ соответствует случаю идеально упругого материала.

Для упрощения дальнейших выкладок принимаем

$$G(t) = G = \mathrm{const}$$

Подставляя (3.3) в (1.9) и (1.10), после некоторых преобразований приходим к системе рекуррентных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial r^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial \Phi_n}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial z^2} = -\varphi_n \quad (n=0, 1, \cdots) \tag{3.4}$$

где

$$\varphi_0 = \varphi_0(t) = G\left[D(t) + \int_{\tau_1}^{t} D(\tau)\, R(t, \tau)\, d\tau\right]$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_{n+1}(r, z, t) = \sum_{k=0}^{n} \int_{\tau_1}^{t} N(t, \tau)\,(\operatorname{grad}\Phi_k \operatorname{grad}\omega_{n-k} - \omega_k\,\varphi_{n-k})\, d\tau$$

$$(n = 0, 1, \cdots)$$

$$N(t, \tau) = K(t, \tau) + \int_{\tau}^{t} R(t, \xi)\, K(\xi, \tau)\, d\xi$$

$$\omega_n = r^{-4} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{grad}\Phi_k \operatorname{grad}\Phi_{n-k}$$

$R(t, \tau)$ — резольвента ядра $K(t, \tau)$. При

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau)\left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right]$$

$$R(t, \tau) = \gamma - \eta'(\tau) + [\eta''(\tau) + \eta'^2(\tau) -$$

$$- \gamma\,\eta'(\tau)]\, e^{\eta(\tau)} \int_{\tau}^{t} e^{-\eta(x)}\, dx$$

$$\eta(t) = \gamma \int_{\tau_1}^{t} [1 + 3G\varphi(\tau)]\, d\tau$$

$$\varphi(\tau) = C_0 + \frac{A_1}{\tau} \tag{3.5}$$

здесь γ, C_0, A_1 — некоторые постоянные, характеризующие свойство ползучести материала, определяемые из опыта для данного материала.

Пользуясь (3.1) и (3.3), получим граничные условия для Φ_n:

$$\Phi_n(r_1, z, t) = \Phi_n(r_2, z, t) = \Phi_n(r, b, t) = \Phi_n(r, -b, t) = 0 \tag{3.6}$$

Решение уравнения (3.4) при условии (3.6) ищем в виде ряда

$$\Phi_n(r, z, t) = -\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}(r, t)\cos\mu_k z, \quad \text{где} \quad \mu_k = \frac{2k-1}{2b}\pi \tag{3.7}$$

Тогда для коэффициентов этого ряда получим уравнения

$$\frac{\partial^2 A_{nk}(r, t)}{\partial r^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial A_{nk}(r, t)}{\partial r} - \mu_k^2 A_{nk}(r, t) = a_{nk}(r, t) \tag{3.8}$$

где

$$a_{nk}(r, t) = \frac{2}{b}\int_0^b \varphi_{nk}(r, \eta, t)\cos\mu_k \eta\, d\eta \tag{3.9}$$

Вводя новую функцию $B_{nk}(r, t)$ при помощи подстановки

$$A_{nk}(r, t) = r^2 B_{nk}(r, t) \tag{3.10}$$

уравнение (3.8) приведем к дифференциальному уравнению Бесселя [17]

$$r^2 \frac{\partial^2 B_{nk}(r, t)}{\partial r^2} + r\frac{\partial B_{nk}(r, t)}{\partial r} - [(r\mu_k)^2 + 4]\, B_{nk}(r, t) = a_{nk}(r, t) \tag{3.11}$$

а из (3.6), (3.7) и (3.10) получим граничные условия для новых функций $B_{nk}(r, t)$:

$$B_{nk}(r_1, t) = B_{nk}(r_2, t) = 0 \tag{3.12}$$

Решая уравнение (3.11) при граничных условиях (3.12) и переходя к $A_{nk}(r, t)$, получим

$$A_{nk}(r, t) = r^2 \int_{r_1}^{r_2} a_{nk}(\xi, t)\, \xi \Gamma_k(r, \xi)\, d\xi \tag{3.13}$$

где

$\Gamma_k(r, \xi) = B_k(r, \xi)$ при $\xi \leqslant r$, $\Gamma_k(r, \xi) = B_k(\xi, r)$ при $\xi \geqslant r$

причем

$$B_k(r, \xi) = V_k^2(r, r_2)\, V_k^2(\xi, r_1)[V_k^2(r_2, r_1)]^{-1}$$

Здесь

$$V_k^2(r, z) = I_2(\mu_k r)\, K_2(\mu_k z) - I_2(\mu_k z)\, K_2(\mu_k r)$$

где $I_2(x)$ и $K_2(x)$—функции Бесселя мнимого аргумента [17].

Далее, подставляя (3.13) в (3.7) и пользуясь (3.9), после некоторых преобразований окончательно получим

$$\Phi_n(r, z, t) = -\frac{r^2}{b}\iint_{\Omega} \varphi_n(\xi, \eta, t)\, \Gamma(\xi, \eta; r, z)\, d\Omega \tag{3.14}$$

где $\Gamma(\xi, \eta; r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k(r, \xi)\cos\mu_k\eta\cos\mu_k z$ — функция Грина рассматриваемой задачи.

Для доказательства сходимости ряда (3.3) в области поперечного сечения стержня введем норму

$$\|X\| = \max|X| + \sup\left|\frac{X(M) - X(N)}{|MN|^{\alpha}}\right|$$

где M и N—произвольные точки внутри области $0<\alpha<1$. Применяя априорные оценки Шаудера и принцип максимума [18], которые в данном случае запишутся в виде $\|D^2\Phi_n\| \leqslant c\|\varphi_n\|$, где c — некоторая постоянная, зависящая от геометрии области, аналогично [11, 13—15] показано, что ряд (3.3) и ряды, составленные из производных $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n D\Phi_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n D^2\Phi_n$, сходятся абсолютно и равномерно с некоторым радиусом сходимости.

§ 4. *Тонкостенный стержень открытого профиля.* Пусть поперечное сечение тонкостенного кривого стержня — узкий прямоугольник, вытянутый по направлению оси z. В этом случае в уравнении (1.9) можно пренебречь производной по z и заменить его уравнением вида

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)-\int_{\tau_1}^{t}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{f(\sigma_0)}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right]K(t,\tau)\,d\tau=-\frac{D(t)\,G}{r^1} \tag{4.1}$$

где

$$\sigma_0=\sigma_0(t)-\sigma_{zs}(t)=\frac{1}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial r} \tag{4.2}$$

Интегрируя уравнение (4.1) и принимая во внимание, что $\sigma_0(t)=0$ при $r=R$ и пользуясь (4.2), получим

$$\sigma_0(t)-\int_{\tau_1}^{t} f[\sigma_0(\tau)]\,\sigma_0(\tau)\,K(t,\tau)\,d\tau=D(\tau)\,Gg \tag{4.3}$$

где

$$g=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{r^2}\right)$$

Если к этому уравнению применить вышеизложенный метод и удовлетвориться только первыми двумя приближениями, то для $\sigma_0(t)$ получим

$$\sigma_0(t)=Gg\Big\{H_0(t,\tau_1)+\lambda Gg\Big[H_1(t,\tau_1)+\int_{\tau_1}^{t}H_1(\tau,\tau_1)\,R(t,\tau)\,d\tau\Big]\Big\}+O(\lambda^2) \tag{4.4}$$

где

$$H_0(t,\tau_1)=D(t)+\int_{\tau_1}^{t}D(\tau)\,R(t,\tau)\,d\tau$$

$$H_1(t,\tau_1)=\int_{\tau_1}^{t}[H_0(\tau,\tau_1)]^2\,K(t,\tau)\,d\tau \tag{4.5}$$

здесь приняли $f(\sigma_0)=1+\lambda\sigma_0$.

Пользуясь (1.12) и (4.4), получим

$$H_0(t, \tau_1) + \lambda k_1 \int_{\tau_1}^{t} \Big\{ [H_0(\tau, \tau_1)]^2 +$$

$$+ \int_{\tau_1}^{\tau} [H_0(x, \tau_1)]^2 R(\tau, x)\, dx \Big\} K(t, \tau)\, d\tau = k_2 \qquad (4.6)$$

где $k_1 = -G/2R$, $k_2 = M(2\,bh\,G)^{-1}$ ($2h$ — ширина прямоугольника).

Если к уравнению (4.6) применить вышеизложенный метод и удовлетвориться только первыми двумя приближениями, то для неизвестной функции $H_0(t, \tau_1)$ получим

$$H_0(t, \tau_1) = k_2 \Big\{ 1 - \lambda k_1 k_2 \Big[3\,GC(t, \tau_1) -$$

$$- \int_{\tau_1}^{t} \int_{\tau_1}^{\tau} R(t, x)\, K(t, \tau)\, dx d\tau \Big] \Big\} + O(\lambda^2)$$

Таким образом, значение $H_0(t, \tau_1)$ известно.

Решая интегральное уравнение (4.5) относительно $D(t)$, будем иметь

$$D(t) = H_0(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^{t} H_0(\tau, \tau_1)\, K(t, \tau)\, d\tau$$

Рассмотрим задачу релаксации напряжений. В начальный момент стержню сообщим крутку $D(\tau_1)$, оставляя ее во времени неизменной. Тогда интегральное уравнение (4.3) примет вид

$$\sigma_0(t) - \int_{\tau_1}^{t} f[\sigma_0(\tau)]\,\sigma_0(\tau)\, K(t, \tau)\, d\tau = D(\tau_1)\, G\varrho \qquad (4.7)$$

Если к этому уравнению применить вышеизложенный метод и удовлетвориться соответственно первыми двумя и первыми тремя приближениями, пользуясь (1.15), для определения релаксации крутящего момента получим следующие формулы:

$$\frac{M(t)}{M(\tau_1)} = H_0^*(t, \tau_1) + \lambda k_1 \Big[H_1^*(t, \tau_1) +$$

$$+ \int_{\tau_1}^{t} H_1^*(\tau, \tau_1)\, R(t, \tau)\, d\tau \Big] + O(\lambda^2) \qquad (4.8)$$

$$\frac{M(t)}{M(\tau_1)} = H_0^*(t, \tau_1) + \lambda k_1 \Big[H_1^*(t, \tau_1) +$$

$$+ \int_{\tau_1}^{t} H_1^*(\tau, \tau_1) R(t, \tau)\, d\tau \Big] + \varepsilon^2 k_4 \Big[H_2^*(t, \tau_1) +$$

$$+ \int_{\tau_1}^{t} H_2^*(\tau, \tau_1) R(t, \tau)\, d\tau \Big] + O(\varepsilon^3) \qquad (4.9)$$

где

$$H_0^*(t, \tau_1) = 1 - 3G\gamma \left(C_0 + \frac{A_1}{\tau_1} \right) e^{s\tau_1} \tau_1^{p} s^{1-p} \Big[\Phi_*(st, p) - \Phi_*(s\tau_1, p) \Big]$$

$$H_1^*(t, \tau_1) = \int_{\tau_1}^{t} [H_0^*(\tau, \tau_1)]^2 K(t, \tau)\, d\tau$$

$$H_2^*(t, \tau_1) = \int_{\tau_1}^{t} H_0^*(\tau, \tau_1) \Big[H_1^*(\tau, \tau_1) +$$

$$+ \int_{\tau_1}^{\tau} H_1^*(x, \tau_1) R(\tau, x)\, dx \Big] K(t, \tau)\, d\tau$$

$$p = 3GA_1\gamma, \quad s = \gamma (1 + 3GC_0), \quad k_3 = -D(\tau_1)\, G/2R$$

$k_4 = -1{,}5\, [GD(\tau_1)]^2/R^2$, $\Phi_*(z, p) = \int_0^{z} e^{\tau} \tau^{-p}\, d\tau$ — неполная гамма-функция.

Для старого материала в (3.5) можно положить $\varphi(\tau) = C_0$. Тогда из (4.7) получим замкнутое решение

$$\sigma_0(t) = \frac{(\omega - x_2)\, x_1 - x_2 (\omega - x_1) \exp(-A_* (t - \tau_1)(x_1 - x_2))}{\omega - x_2 - (\omega - x_1) \exp(-A_* (t - \tau_1)(x_1 - x_2))}$$

где $\omega = D(\tau_1)\, Gg$, $A_* = 3GC_0\, g\gamma$, а x_1 и x_2 — корни уравнения

$$A_* x^2 + \gamma (1 + 3GC_0)\, x - \omega\gamma = 0$$

Аналогичным образом [14, 15], если принять $f(\sigma_0) = 1 + k\sigma_0^2$, то решение получается в квадратурах.

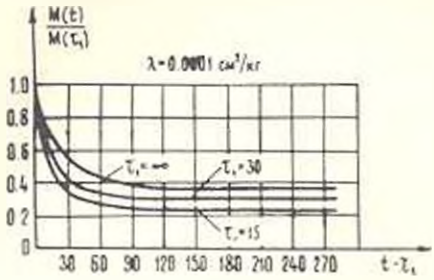
На ЭВМ «ЕС-1022» при значениях параметров

$$R = 6 \text{ см}; \; 2h = 1{,}5 \text{ см}; \; b = 5 \text{ см}; \; 3G = 2 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2$$

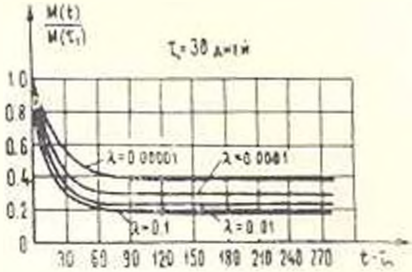
$$A_1 = 4{,}82 \cdot 10^{-5}; \; C_0 = 0{,}9 \cdot 10^{-3}; \; \gamma = 0{,}026; \; M(\tau_1) = 400 \text{ кг} \cdot \text{см}$$

дано решение задачи о релаксации крутящего момента тонкостенного стержня.

Вычисления показывают, что значения $M(t)/M(\tau_1)$, полученные при помощи формул (4.8) и (4.9), почти совпадают, следовательно, в общем решении основного уравнения можно ограничиться первыми двумя приближениями.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

На фиг. 3 и 4 показано изменение крутящего момента во времени при различных значениях τ_1 и λ.

ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔՈՎ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՕՂԱԿԻ ՍԵԿՏՈՐԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ֆ. Մ. ՓՈԼԱԴՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ուսումնասիրվում է ուղղանկյուն լայնական կտրվածքով շրջանային օղակի սեկտորի ոլորումը ոչ-գծային ժառանգական սողքի դեպքում։ Օգտագործելով գլանային կոորդինատները, կիսահակադարձային մեթոդով խնդիրը բերվում է լարումների ֆունկցիայի նկատմամբ ոչ-գծային ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարման, որի լուծումը փնտրվում է աստիճանային շարքի տեսքով և ապացուցվում է այդ շարքի զուգամիտությունը։

Բարակապատ ուղղանկյուն պրոֆիլով շրջանային օղակի սեկտորի համար լուծված են սողքի և ռելաքսացիայի խնդիրները։ Վերջինիս համար բերված թվային օրինակների հիման վրա կառուցված են ոլորող մոմենտի գրաֆիկները։

THE TORSION OF A RECTANGULAR CROSS-SECTION CIRCULAR RING SECTORS UNDER NON-LINEAR CREEP

F. M. POLADIAN

S u m m a r y

The torsion of a rectangular cross-section with circular ring sectors is considered under non-linear hereditary creep. By using cylindric coordinates and the semi-reverse method the problem is reduced to the nonlinear integro-differential equation with respect to the stress function. The solution of this equation is obtained in the form of a power series and the convergence of the series is proved.

For a thin-walled core of a rectangular section the problem of creep and relaxation is solved. Graphs for relaxation are plotted on the basis of numerical examples.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л.: ГИТТЛ, 1952.
2. *Göhner O.* Spannugsverteilung in einem an den Endquerschnitten belasteten Ringstabsektor. Ingr—Arch., 1931, Bd2.
3. *Freiberger W.* The uniform torsion of an incomplate tore. —Austral. J. Scient. Res. Ser. A, 1949, vol. 2, № 3.
4. *Larghaar H. L.* Torsion of curved beams of rectangular cross section.— J. Appl Mech., 1952, vol. 19, № 1.
5. *Рабинович А. Л.* Кручение элемента кругового кольца. Исследования по механике и прикладной математике.— Тр. Моск. физ.-техн. ин-та, 1958, вып. 1.
6. *Stein I.* Stress analysis of a helical coil.— Trans. ASME, ser. E. J. Appl. Mech., 1963, vol. 30, № 1. (Рус. перев.: Прикл. механ., Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е, 1963, т. 30, № 1)
7. *Freiberger W., Prager W.* Plastic twisting of thich — walled circular ring sectors.— J. Appl. Mech., 1956, vol. 23, № 3.
8. *Wang A. J., Prager W.* Plastic twisting of a circular ring sector.— J. Mech. and Phys. Solids, 1955, vol. 3.
9. *Freiberger W.* Elastic—plastic torsion of circular ring sectors.—Quart. Appl. Math., 1956, vol. 14, № 3.
10. *Задоян М. А.* Пластическое кручение неполного тора.— Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 2.
11. *Задоян М. А.* Пластическое кручение сектора кольца.— Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 1.
12. *Галпчян П. В., Задоян М. А.* Пластическое кручение кругового стержня с поперечным сечением в виде кольцевого сектора.— Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1979, т. 32, № 1.
13. *Задоян М. А., Поладян Ф. М.* Задача нелинейной ползучести кривого стержня при кручении.— Докл. АН Арм. ССР, 1980, т. 71, № 3.
14. *Поладян Ф. М.* Кручение кривой разностенной трубы при нелинейной ползучести.— Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1981, т. 34, № 2.
15. *Поладян Ф. М.* Кручение кривого полого стержня с криволинейными щелями при нелинейной ползучести.— Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1981, т. 34, № 3.
16. *Новожилов В. В.* Теория упругости. М.—Л.: Судстройиздат, 1962.
17. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Т. 1. М.: ИЛ, 1949.
18. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1965.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила в редакцию
10. 11. 1982