

НЕКОТОРЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СТАТИЧЕСКОЙ АЭРОУПРУГОСТИ ДЛЯ КРЫЛЕВ ИЗ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

БАНИЧУК Н. В., ИВАНОВА С. Ю.

Сформулированы задачи минимизации веса прямых крыльев большого удлинения из хаотически армированных изотропных композитных материалов при ограничениях по критическим скоростям дивергенции и реверса. Выведены необходимые условия экстремума и с их помощью найдены оптимальные распределения концентрации армирующих включений по размаху крыльев. Оценены выигрыши по весу, получаемые за счет оптимизации.

Ранее задачи оптимизации рассматривались, в основном, для крыльев из однородных материалов [1—5]. Решение задач с учетом ограничений по дивергенции и реверсу получено в [1, 2, 6—8]. Оптимальному проектированию балок, колонн и оболочек вращения из композитных материалов посвящена работа [9].

1. Рассматриваются задачи минимизации веса прямых крыльев большого удлинения при ограничениях, наложенных на критические скорости дивергенции крыла и реверса элеронов. Материал крыла представляет собой упругий изотропный композит, хаотически армированный жесткими включениями. Эффективный модуль сдвига $G(x)$ (x — координата, изменяемая вдоль размаха крыла) композитного материала связан с концентрацией армирующих включений $\eta(x)$ соотношением [10]

$$G(x) = G_0 (1 + \alpha \eta(x)) \quad (1.1)$$

$$\alpha = \frac{E_a}{25 \mu_m} - 1, \quad G_0 = \mu_m$$

где E_a — модуль упругости армирующего материала, а μ_m — модуль сдвига матрицы. Функция $\eta(x)$, описывающая распределение концентрации армирующих включений по размаху крыла, выбирается в качестве искомой управляющей переменной, подлежащей определению из условия минимума функционала веса

$$J = A \int_0^l \eta(x) dx + B \quad (1.2)$$

$$A = g l^{-1} V (\rho_a - \rho_m), \quad B = g \rho_m V$$

Здесь l — размах крыла, где V — объем, занимаемый силовым материалом, g — ускорение свободного падения, ρ_1 и ρ_m — соответственно плотности армирующего материала и матрицы.

На концентрацию $\eta(x)$ армирующего материала наложены ограничения

$$0 < \eta_{\min} \leq \eta(x) \leq \eta_{\max} \leq 1 \quad (1.3)$$

Для описания деформаций применяется балочная модель крыла. Ось x считается совмещенной с упругой осью крыла. Деформации крыла характеризуются в рассматриваемой модели углом закручивания $\Theta = \Theta(x)$. Аэродинамические силы, действующие на крыло, вычисляются согласно теории несущей полосы.

2. Рассмотрим задачу минимизации веса крыла за счет оптимального распределения концентрации армирующих включений по размаху крыла при заданной критической скорости дивергенции. Запишем уравнение равновесия и граничные условия для упругого крыла в потоке газа [11, 12]

$$\begin{aligned} (G/\Theta_x)_x + C_y^* q c c^2 \Theta &= 0 \\ \Theta(0) = (G/\Theta_x)_{x=l} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где c — хорда, ec — расстояние между линиями аэродинамических центров и центров кручения (упругой осью), C_y^* — коэффициент подъемной силы, $q = \rho v^2/2$ — скоростной напор, v — скорость, ρ — плотность. Нижним индексом x обозначается дифференцирование по этой координате. Для определенности рассматриваются прямоугольные крылья и поэтому считается, что величины c и ec не меняются по размаху крыла. Граничные условия (2.1) соответствуют жесткому закреплению в точке $x = 0$ и отсутствию сосредоточенного момента у свободного края, то есть при $x = l$.

С использованием безразмерных переменных и обозначений $x' = x/l$, $\eta' = \eta/\eta_{\max}$, $\eta'_{\min} = \eta_{\min}/\eta_{\max}$, $l^2 = C_y^* q e c^2 \rho / IG_0$, $J = (J - B)/A$ основными соотношениями задачи оптимизации можно придать вид (штрихи опускаются)

$$((1 - a\eta) \Theta_x)_x - l^2 \Theta = 0 \quad (2.2)$$

$$\Theta(0) = ((1 - a\eta) \Theta_x)_{x=1} = 0 \quad (2.3)$$

$$0 < \eta_{\min} \leq \eta \leq 1 \quad (2.4)$$

$$J = \int_0^1 \eta(x) dx \rightarrow \min \quad (2.5)$$

Требуется определить распределение концентрации $\eta = \eta(x)$, минимизирующее функционал (2.5) при ограничениях (2.4) и такое, что дивергенция крыла реализуется при заданной критической скорости λ . Заметим, что критическая скорость дивергенции дается минимальным собственным значением задачи (2.2), (2.3). Задача на собственные значения (2.2), (2.3) является самосопряженной и положительно определенной.

Это обстоятельство вносит известные упрощения при получении необходимых условий оптимальности. Проводя стандартные выкладки, получим выражение, связывающее вариации минимизируемого функционала с вариацией управляющей функции

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} (1 - \lambda a H^2) \delta \eta dx \quad (2.6)$$

Через λ обозначена некоторая неизвестная константа. Из условия минимума $\delta J \geq 0$ получим необходимые условия оптимальности

$$\lambda a H^2 = 1 \quad \text{при} \quad \eta_{\min} < \eta < 1 \quad (2.7)$$

$$\lambda a H^2 \geq 1 \quad \text{при} \quad \eta = 1 \quad \text{и} \quad \lambda a H^2 < 1 \quad \text{при} \quad \eta = \eta_{\min}$$

В точках выхода функции $\eta(x)$ на ограничения должны выполняться условия Вейерштрасса-Эрмана, сводящиеся в рассматриваемом случае к требованию непрерывности функции $\eta(x)$ в этих точках.

Построение аналитического решения основывается на использовании основных соотношений задачи (2.2)–(2.4) и необходимых условий оптимальности (2.7). Из условия оптимальности (2.7) вытекает, что на участке наменения переменной x , где $\eta_{\min} < \eta < 1$, зависимость H от x дается выражением

$$H = \frac{x}{\sqrt{\lambda a}} + C_1 \quad (2.8)$$

Подставив (2.8) в уравнение (2.2) и выполнив интегрирование, получим

$$\eta = -\frac{\lambda^2}{2a} x^2 - \frac{\lambda^2}{a} \left(\frac{1}{\lambda a} C_1 x - C_2 \right) \quad (2.9)$$

Формула (2.9) справедлива при $\eta_{\min} < \eta < 1$. При проведении дальнейших рассмотрений положим $\eta_{\min} = 0$ и через x_1 , x_2 будем обозначать соответственно координаты точек, в которых функция $\eta(x)$, определяемая согласно (2.9), достигает своего нижнего ($\eta = 0$) и верхнего ($\eta = 1$) предельного значения. С использованием этих обозначений и приведенных формул (2.8), (2.9) оптимальное решение может быть представлено в виде

$$H = C_3 \sin \left(\sqrt{\frac{\lambda}{a-1}} x + C_4 \right), \quad \eta = 1, \quad 0 < x < x_1 \quad (2.10)$$

$$H = \frac{x}{\sqrt{\lambda a}} + C_1, \quad \eta = -\frac{\lambda^2}{2a} x^2 - \frac{\lambda^2}{a} \left(\frac{1}{\lambda a} C_1 x - C_2 \right), \quad x_1 < x < x_2$$

$$H = C_3 \sin(\nu x + C_5), \quad \eta = 0, \quad x_2 < x < 1$$

В выражения (2.10) для H и η входят 9 неизвестных констант: α , x_1 , x_2 , C_i ($i=1, \dots, 6$). Константу C_3 определим из условия нор-

мировки $\mu(1) = 1$. Получим $C_3 = 1$. Для отыскания остальных восьми констант используем два граничных условия (2.3) и шесть соотношений, выражающих условие непрерывности функций $\varphi(x)$, $\mu(x)$, $\mu_1(x)$ в точках $x = x_+$, $x = x_-$. С использованием граничных условий получим $C_1 = 0$, $C_2 = 1/2\pi - \lambda$. Определение остальных неизвестных сводится к отысканию x_+ , x_- из решения системы двух трансцендентных уравнений

$$\frac{\lambda^2}{a} (x_+ - x_-) \left[\frac{\sqrt{a+1}}{\lambda} \operatorname{tg} \frac{\lambda x_-}{\sqrt{a+1}} - x_- \right] + \frac{\lambda^2}{2a} (x_+^2 - x_-^2) - 1 = 0 \quad (2.11)$$

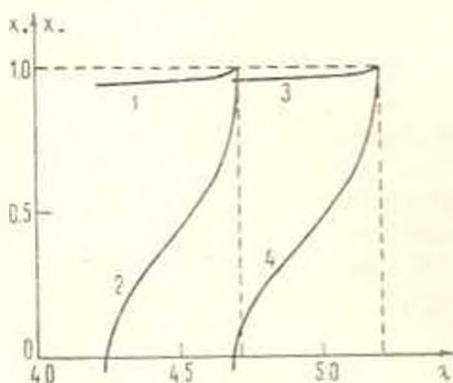
$$\operatorname{tg}(\pi(1-x_+)) \left(\frac{\sqrt{a+1}}{\lambda} \operatorname{tg} \frac{\lambda x_-}{\sqrt{a+1}} + x_+ - x_- \right) - 1 = 0$$

и численно a , C_1 , C_2 , C_3 по формулам

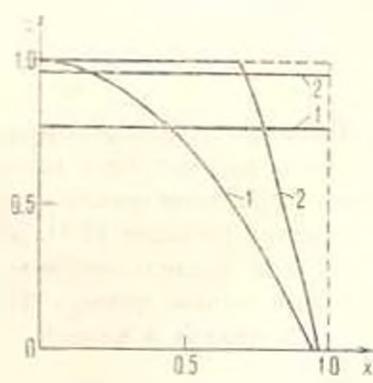
$$a = 1/\alpha \sin^2(\lambda(1-x_+)), \quad C_1 = \cos^2(1-x_+) - \frac{x_+}{\sqrt{a}}$$

$$C_2 = 1 + \frac{\lambda^2}{2a} x_+^2 + \frac{\lambda^2}{a} \sqrt{2a} C_1 x_+, \quad C_3 = \sqrt{a+1}/\lambda \sqrt{a} \cos\left(\frac{\lambda x_-}{\sqrt{a+1}}\right)$$

Система уравнений (2.11) решалась численно методом Ньютона. Расчеты проводились для значений параметра $a = 8$ и $a = 10$. Вариант с $a = 8$ соответствует углепластику, а вариант с $a = 10$ — боропластику. На фиг. 1 показаны полученные в результате расчетов зависимости величины x_+ и x_- от параметра λ соответственно для случаев $a = 8$ (кривые 1, 2) и $a = 10$ (кривые 3, 4). На фиг. 2 кривыми 1, 2 показаны опти-



Фиг. 1.



Фиг. 2.

мальные распределения концентрации $\varphi(x)$ при $a = 8$ для случаев $\lambda = 4.240$ и $\lambda = 4.665$. Для сравнения прямыми линиями 1, 2 показаны постоянные распределения φ , соответствующие тем же значениям λ и параметра a . Значению $\lambda = \pi/2 = 1.57$ соответствует решение с $\varphi(x) = 0$ ($0 \leq x \leq 1$). Для всех рассчитанных решений с $\lambda > \pi/2$, как это видно на фиг. 1 и 2, реализуется выход на нижнее ограничение.

Выход распределения концентрации $\tau(x)$ на верхнее ограничение $\tau=1$ происходит для значений $\lambda > 4,24$. Допустимые значения параметра λ , для которых проводились расчеты, не превышают величины $\lambda_{\max} = 1/2 + \sqrt{a+1}$, определенной из условия, что $\tau(x) = 1$ при $0 \leq x \leq 1$.

Для распределения выигрыша, получаемого за счет оптимизации, сравним по весу (по функционалу J) оптимальное крыло с эталонным крылом тех же размеров и с тем же значением параметра λ , но для которого распределение армирующего материала по размаху крыла является постоянным $\eta(x) = \text{const}$. Относительный выигрыш в весе δ оценивается по формуле

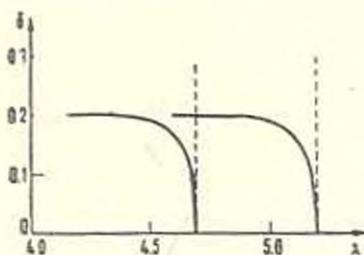
$$\delta = 1 - \frac{a\pi^2}{4\lambda^2 - \pi^2} \left(x - \frac{\lambda^2}{6a}(x_+^2 - x_-^2) - \frac{\lambda^2}{2a} \sqrt{2a} C_1 (x_+^2 - x_-^2) + C_2 (x_+ - x_-) \right) \quad (2.12)$$

Найденные в результате расчетов зависимости $\delta = \delta(\lambda)$ показаны на фиг. 3 кривыми 1 и 2 соответственно для случаев $a = 8$ и $a = 10$.

При изменении λ в диапазоне $4,3 \leq \lambda \leq 4,4$ выигрыш в весе, оцененный по формуле (2.12), составляет 19—18%. Существенная зависимость δ от λ проявляется в окрестности точки $\lambda = \lambda_{\max}$.

3. Рассмотрим задачу минимизации веса прямого крыла большого удлинения с элероном при заданной критической скорости реверса элерона. Как и в предыдущем параграфе, в качестве искомой

управляющей функции примем распределение концентрации $\tau(x)$, а ось x совместим с упругой осью крыла. Угол $\Theta(x)$ закручивания крыла относительно этой оси и угол $\beta(x)$ отклонения элерона представим в виде $\Theta(x) = \Theta_0 \gamma(x)$, $\beta(x) = \beta_0 \chi(x)$. Функция $\chi(x)$ на участке расположения элерона $x \in [\xi_1, \xi_2]$ считается заданной (для жесткого элерона $\chi(x) = 1$). На остальной части крыла $\chi(x) = 0$. Размах крыла l и параметры ξ_1, ξ_2 удовлетворяют неравенствам $0 < \xi_1 < \xi_2 < l$. Интегро-дифференциальное уравнение упругого равновесия крыла в потоке газа и граничные условия имеют вид [7, 11, 12]



Фиг. 3.

$$(G/\varphi_x)_x + C_y e^{\alpha} q \varphi = \frac{C_y e^{\alpha} \chi q \left[\frac{\partial C_y}{\partial \beta} e + \frac{\partial C_m}{\partial \beta} \right] \int_0^l x c \tau dx}{\int_0^l \frac{\partial C_y}{\partial \beta} \chi c x dx}$$

$$\varphi(0) = (G/\varphi_x)_{x=0} = 0$$

где $\partial C_y / \partial \beta$ и $\partial C_m / \partial \beta$ — заданные аэродинамические коэффициенты. В дальнейшем рассматривается случай прямоугольного крыла с жестким

алероном, расположенным по всему размаху крыла. В этом случае $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$, а e и c не зависят от x . Приведенные соотношения (3.1) представляют собой несамосопряженную краевую задачу на собственные значения, причем роль собственного значения играет скоростной напор q . Наименьшее собственное значение q определяет критическую скорость реверса $v = \sqrt{2q/\rho}$. Если приравнять правую часть в уравнении нулю, то получим краевую задачу, совпадающую с (2.1) и описывающую явление крутильной дивергенции крыла.

В безразмерных переменных, введенных в предыдущем параграфе, и с учетом обозначения $d = 1 + (\partial C_{m0}/\partial \beta)/(e C_{y0}/\partial \beta)$, $\mu = \frac{C_{y0} e c^2 q l^2}{16 G_0}$ (μ — приведенный скоростной напор) основные соотношения задачи оптимизации примут вид

$$((1 - a\eta) \varphi_x)_x + \mu \varphi = 2\mu d \int_0^1 x \varphi dx \quad (3.1)$$

$$\varphi(0) = ((1 + a\eta) \varphi_x)_{x=1} = 0 \quad (3.2)$$

$$0 \leq \eta_{\min} \leq \eta \leq 1 \quad (3.3)$$

$$J = \int_0^1 \eta(x) dx \rightarrow \min \quad (3.4)$$

Задача оптимизации (3.1) — (3.4) заключается в отыскании распределения концентрации $\eta(x)$, доставляющего минимум функционалу веса крыла и такого, что критическое значение приведенного скоростного напора μ , являющегося минимальным собственным значением краевой задачи (3.1) — (3.2), равно заданной величине.

Получим необходимое условие оптимальности. С этой целью, вводя сопряженную функцию $\psi(x)$, составим расширенный функционал Лагранжа

$$J_L = \int_0^1 \eta(x) dx + \int_0^1 \psi(x) \left[((1 + a\eta) \varphi_x)_x + \mu \varphi - 2\mu d \int_0^1 x \varphi dx \right]$$

Выражение для первой вариации функционала, обусловленной вариациями функций η и φ , при помощи выполнения элементарных операций и применения интегрирования по частям может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \delta J_L = & \int_0^1 (1 - a\varphi_x \psi_x) \delta \eta dx + \int_0^1 \left[((1 + a\eta) \varphi_x)_x + \mu \varphi - 2\mu d \int_0^1 x \varphi dx \right] \delta \psi dx - \\ & - [\psi^2 ((1 + a\eta) \varphi_x)]_{x=0} - [(1 + a\eta) \psi_x \delta \varphi]_{x=1} \end{aligned}$$

В дальнейшем будем считать, что сопряженная переменная ψ является решением следующей краевой задачи на собственные значения:

$$((1 + a\eta) \psi_x)_x + w_2 = 2\mu dx \int_0^1 \psi dx \quad (3.5)$$

$$\psi(0) = ((1 + a\eta) \psi_x)_{x=1} = 0 \quad (3.6)$$

Тогда в выражении для вариации функционала J_1 все слагаемые, кроме первого, обратятся в нуль. Будем иметь

$$\delta J_1 = \int_0^1 (1 - a\varphi_x \psi_x) \delta \eta dx \quad (3.7)$$

Для функции η , доставляющей минимум функционалу J при ограничениях (3.3), должно выполняться неравенство $\delta J_1 \geq 0$. Данное неравенство с учетом соотношений (3.3), (3.7) приводит к следующим необходимым условиям оптимальности:

$$\begin{aligned} a\varphi_x \psi_x < 1, \quad \eta &= \eta_{\min} \\ a\varphi_x \psi_x = 1, \quad \eta_{\min} < \eta < 1 \\ a\varphi_x \psi_x > 1, \quad \eta &= 1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

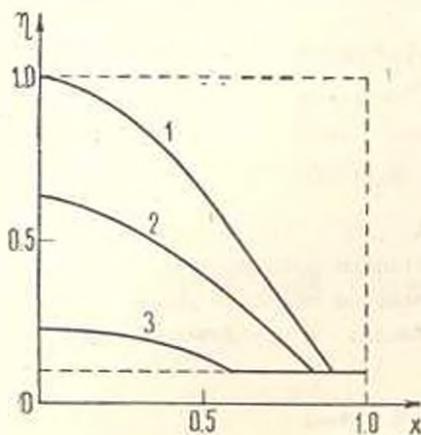
В точках выхода функции η на ограничения и в точках ξ_1, ξ_2 должны выполняться условия непрерывности величин ψ и $(1 + a\eta) \psi_x$.

В работе [7] показано, что для прямоугольного крыла при отрицательных значениях параметра d активным является ограничение по скорости реверса, то есть что для крыла минимального веса, найденного при условии $\mu = \mu_0$ ($\mu > 0$ — заданная константа), величина критического скоростного напора дивергенции удовлетворяет неравенству $\lambda^2 \geq \mu_0$. При положительных значениях d определяющим является ограничение по скорости дивергенции. В последнем случае нужно вместо уравнения (3.1) рассматривать уравнение дивергенции крыла (2.2). Доказательство, приведенное в [7], распространяется и на случай, рассматриваемый в данной работе. Поэтому ниже численное решение задачи минимизации веса приводится только для отрицательных значений параметра d .

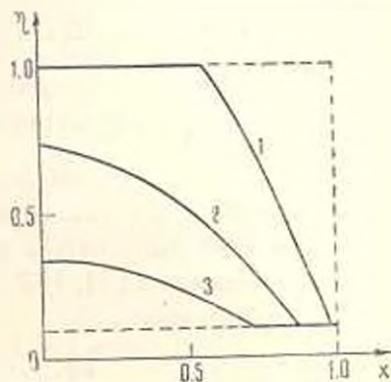
Численное решение оптимальной задачи проводилось при помощи алгоритма последовательной оптимизации. Решение «прямых» задач на собственные значения (3.1), (3.2) и (3.5), (3.6) для функций $\eta(x)$ и $\psi(x)$ (при заданном распределении концентрации $\eta(x)$) отыскивалось методом последовательных приближений [13]. Улучшающие вариации управляющей функции $\eta(x)$ выбирались по методу проектирования градиентов. При этом существенно использовалась формула для вариации функционала (3.7). Подробное описание применяемого алгоритма содержится в [14]. Опишем результаты расчетов для $a = 10$ (боропластик).

На фиг. 4 показаны полученные в результате расчетов концентрации включений для $\mu = 7$ и $\eta_{\min} = 0,1$. Кривыми 1, 2, 3 показаны соответственно распределения, отвечающие значениям параметра $d = 0, -1, -2$. Распределение армирующего материала оказывается наиболее эффективным

вблизи закрепленного края, причем во всех рассчитанных случаях вблизи свободного края концентрация η принимает минимальное допустимое значение. Представленные на фиг. 5 оптимальные распределения концентрации отвечают случаю $d = -0,5$, $\eta_{\min} = 0,1$. Кривыми с номерами 1, 2, 3 показаны



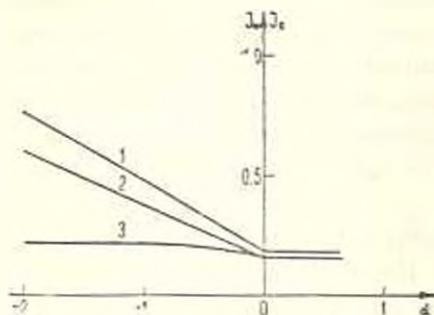
Фиг. 4.



Фиг. 5.

распределения $\eta(x)$, соответствующие значениям $\mu = 17,09; 10,53; 5,69$. С увеличением параметра μ увеличивается область максимально допустимой концентрации, поведение функции $\eta(x)$ в переходной зоне ($\eta_{\min} < \eta < 1$) становится менее плавным.

Зависимость оптимального веса J_0 от параметра d показана на фиг. 6 кривой 2. Для сравнения на этой же фигуре кривой 1 показана зависимость веса J_0 от параметра d для эталонного крыла с постоянным распределением

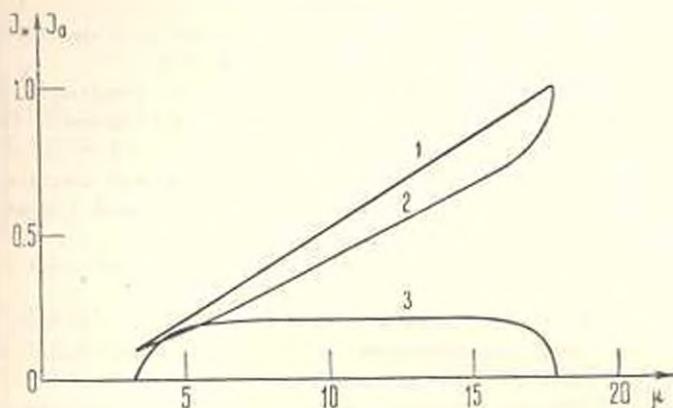


Фиг. 6.

концентрации $\eta(x) = \text{const}$. Размеры эталонного и оптимального крыльев, а также их аэродинамические характеристики предполагаются одинаковыми. Относительный выигрыш, получаемый за счет оптимизации, показан кривой 3. Для отрицательных d (в широком диапазоне изменения этого параметра) выигрыш составляет 20—21%. Для положительных d , как отмечалось выше, определяющим является ограничение по скорости дивергенции, а это означает, что рассматриваемые величины не зависят от d при $d > 0$ (фиг. 6).

На фиг. 7 сплошными линиями 1, 2, 3 представлены соответственно зависимости функционалов веса для эталонного и оптимального крыльев, а также получаемого относительного выигрыша от μ . Значение параметра d , отвечающее всем трем кривым, равно $d = -0,5$. Отметим, что линии, изображающие зависимости J_0 и $J_{\text{опт}}$ от μ , при постоянном d так же, как и линии, изображающие зависимость указанных величины от d , при постоянном

и мало отличаются от прямых. Сопоставление рассчитанных зависимостей J_0 и J_1 от μ позволяет сделать вывод, что за счет оптимального распределения армирующего материала и подбора параметра C можно значительно снизить вес крыла.



Фиг. 7.

В заключение заметим, что приведенные в данной работе решения дают возможность при помощи только перерастяжения и масштабирования переменных получать оптимальные решения некоторых задач минимизации веса за счет варьирования толщины обшивки $\mu(x)$ по размаху крыла (материал однородный) при двусторонних ограничениях, наложенных на допустимые значения толщины.

Авторы выражают благодарность В. И. Бирюку, В. В. Кобелеву, А. П. Сейраняну за полезные обсуждения и замечания.

ԿՈՄՊՈԶԻՏ ՆՅՈՒԹՆԵՐԻՑ ԹԻՎԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԱՆՐԱՆԱԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ
ՄԻ ՔԱՆԻ ՕՊՏԻՄԱԿԱՆ ՍՏԱՏԻԿ ԿՆԴԻՐՆԵՐ

Ն. Վ. ԲԱՆԻՉՈՒԿ, Ս. ԵՍ. ԻՎԱՆՈՎԱ

Ս. մ. փ. ո. փ. ո. լ. մ.

Հողվածում դիտարկված են կոմպոզիտ նյութերից թևերի կշռի մինիմալացման խնդիրները բառ սլորման կրիտիկական արագության և էլերոնի դարձիչի կրիտիկական արագության սահմանափակումներով:

Ստացված են օպտիմալության անհրաժեշտ պայմաններ, բերված է թվափն լուծում:

SOME OPTIMIZATION PROBLEMS OF STATIC AEROELASTICITY
FOR WINGS MADE FROM COMPOSITE MATERIALS

N. V. BANICHUK, S. Ju. IVANOVA

S u m m a r y

The weight minimization problems for wings made from composite materials are considered under the constraints on the critical divergence

speed and critical aileron reverse speed. Necessary optimality conditions are derived; a numerical solution is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *McIntosh S. C. and Eastop F. E.* Design of minimum mass structures with specified stiffness properties.—AIAA J., 1968, 6, 962—964.
2. *Ashley H., McIntosh S. C.* Applications of aeroelastic constraints in structural optimization. Proceeding of the 12-th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
3. *Украинцев Г. В., Фролов В. М.* Метод оптимизации силовой конструкции крыла жесткости при варьировании распределением относительной толщины профиля.—Учен. записки ЦАГИ, 1972, т. 3, № 4.
4. *Бирюк В. И., Липин Е. К., Фролов В. М.* Методы проектирования самолетов. М.: Машиностроение, 1977.
5. *Баничук Н. В., Бирюк В. И., Ковале И. И., Миронов А. А., Сейранян А. П.* Крыло минимального веса при ограничении по несущей способности.—Учен. записки ЦАГИ, 1979, т. X, № 1.
6. *Баничук Н. В.* Минимизация веса крыла при ограничении по скорости дивергенции.—Учен. записки ЦАГИ, 1978, т. IX, № 5.
7. *Сейранян А. П.* Оптимизация веса крыла при ограничениях по статической аэроупругости.—Изв. АН СССР, МТГ, 1978, № 4.
8. *Сейранян А. П.* Задача минимизации веса крыла с обратной стреловидностью при ограничении по скорости дивергенции.—Учен. записки ЦАГИ, 1979, № 6.
9. *Баничук Н. В., Кобелев В. В.* Оптимизация конструкций из хаотически армированных композитов. Механика композитных материалов, 1981, № 2.
10. *Аниин Б. Д.* Современные модели пластических тел. Новосибирск: 1975.
11. *Бисплингофф Р. А., Эшли Х., Халфмен Р. А.* Аэроупругость. М.: ИЛ, 1958.
12. *Фин Я. Ц.* Введение в теорию аэроупругости. М.: Физматгиз, 1959.
13. *Коллатц А.* Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968.
14. *Баничук Н. В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980.

Институт проблем механики АН СССР
Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию
12. VI. 198