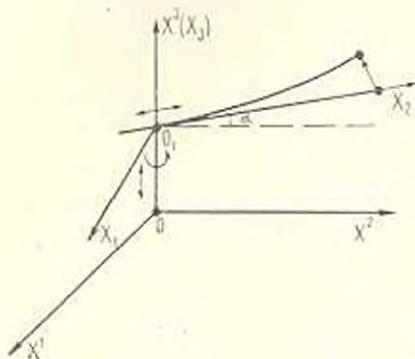


## ИССЛЕДОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМЫХ ДВИЖЕНИЙ УПРУГОГО МАНИПУЛЯТОРА С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ ПОДВИЖНОСТИ

ГУКАСЯН А. А.

1. *Исходные предположения и постановка задачи.* При исследовании динамики манипуляторов их звенья обычно считаются абсолютно твердыми телами. Однако, при движении управляемых систем, в частности, роботов и манипуляторов, в ряде случаев существенную роль играет упругая податливость конструкций. Упругость системы приводит к дополнительным колебательным степеням свободы. Исследование динамики упругого манипулятора было в общем случае проведено в работе [1], где рассмотрен многозвенный манипулятор с произвольным числом шарниров. В данной работе на основе методики, описанной в [1], исследуется динамика упругого манипулятора, схема которого приведена на фиг. 1. Манипулятор имеет три управляемых степени подвижности (две поступательные и одна вращательная), соответствующие изменению длины рабочей части звена манипулятора, его вертикальному перемещению и повороту вокруг неподвижной оси. В качестве механической модели рабочего органа (руки)



Фиг. 1.

манипулятора принимается тонкий нерастяжимый стержень, подверженный слабым изгибным деформациям. На конце стержня находится груз  $m$ , который предполагается абсолютно твердым телом. В недеформированном состоянии стержень имеет прямолинейную форму.

Для описания движения манипулятора введем две правые прямоугольные системы координат  $O X^1 X^2 X^3$  и  $O_1 X^1_1 X^2_1 X^3_1$ . Ось  $O X^3$  инерциальной системы  $O X^1 X^2 X^3$  направлена по вертикали и является осью вращения стержня. Система  $O_1 X^1_1 X^2_1 X^3_1$  является неинерциальной системой координат, которая связана с перемещающимся стержнем. Начало координат совпадает с точкой пересечения стержня с осью вращения. Ось  $O_1 X^3_1$  направлена по вертикали и совпадает с осью вращения  $O X^3$ . Ось  $O_1 X^1_1$  направлена по касательной к упругой линии стержня в точке  $O_1$ . Ось  $O_1 X^2_1$  дополняет систему до правой прямоугольной системы координат. Точку  $O_1$  будем называть основанием рабочей части звена манипулятора.

Управление манипулятором осуществляется силой  $F_2$ , приложенной в точке  $O_1$  и направленной вдоль оси  $O_1X_2$ , силой  $F_1$ , приложенной в точке  $O_1$  и направленной вдоль вертикальной оси  $O_1X_3$ , и моментом сил  $M$ , приложенным к оси вращения.

Введем следующие обозначения:  $\alpha$  — угол поворота касательной к упругой оси стержня в точке  $O_1$  вокруг оси вращения  $O_1X_3$  (для краткости величину  $\alpha$  будем называть углом поворота стержня),  $l$  — длина рабочей части звена манипулятора (от точки  $O_1$  до нагруженного конца стержня),  $h$  — высота основания рабочей части звена манипулятора над горизонтальной плоскостью  $O_1X_1X_2$ ,  $U(l, l)$  — вектор смещения нагруженного конца упругого стержня,  $x_1$  — проекция вектора смещения на ось  $O_1X_1$ ,  $x_2$  — проекция вектора смещения на ось  $O_1X_2$ . В силу нерастяжимости стержня и малости упругой деформации можно в рамках линейной теории упругости считать, что вектор  $U(l, l)$  ортогонален радиусу-вектору нагруженного конца недеформированного стержня. Массу  $m_0$  звена манипулятора будем считать пренебрежимо малой по сравнению с массой груза  $m$  ( $m_0 \ll m$ ) и полагать  $m = 0$ . Такое предположение позволяет рассматривать динамику манипулятора в квазистатическом приближении [1]. В этом случае координаты  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $l$ ,  $h$ ,  $\alpha$  вполне определяют конфигурацию деформированного стержня (стрелы манипулятора).

Кинематику движения упругого манипулятора в рамках линейной теории тонких прямолинейных стержней, считая упругие смещения малыми, можно задать следующими соотношениями:

$$q_1 = \alpha + x_2/l, \quad q_2 = l, \quad q_3 = h + x_1 \quad (1.1)$$

С точностью до бесконечно малых высшего порядка обобщенные координаты  $q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) суть:  $q_1$  — угол между осью  $O_1X_2$  инерциальной системы отсчета и отрезком прямой, соединяющим основание рабочей части стрелы манипулятора (точка  $O_1$ ) с нагруженным ее концом,  $q_2$ ,  $q_3$  — проекции радиуса-вектора (относительно точки  $O$ ) нагруженного конца стержня, соответственно на оси  $O_1X_1$ ,  $O_1X_2$  вращающейся системы координат.

В случае абсолютно жесткого звена манипулятора имеем  $x_1 = x_2 = 0$  (деформации отсутствуют) и величины  $q_1 = q_1^0 = \alpha$ ;  $q_2 = q_2^0 = l$ ;  $q_3 = q_3^0 = h$  есть обобщенные координаты, описывающие кинематику движения жесткого манипулятора.

При сделанных предположениях и  $m_0 \ll m$  следует отметить, что собственные упругие колебания системы (стрелы) можно разделить на две группы. Если обозначить через  $C = EJ/l^3$  изгибную жесткость стрелы манипулятора ( $E$  — модуль Юнга материала стержня,  $J$  — момент инерции поперечного сечения), то частота колебаний первой группы будет порядка  $(C/m)^{1/2}$ , а второй группы — порядка  $(C/m_0)^{1/2}$ . Для колебаний первой группы перемещение груза существенно, а стрела манипулятора деформируется квазистатически. Вторая группа состоит из бесконечного числа мод колебаний высоких частот, отвечающих упругим волнам в конструкции манипулятора. Перемещения груза  $G$ , обусловленные этими колебаниями, малы, а в силу их более высоких частот они затухают намного быстрее, чем

колебания первой группы. Поэтому колебаниями второй группы можно пренебречь. Учитывая лишь колебания первой группы, энергию упругих деформаций системы можно вычислять, считая смещения квазистатическими.

Кинетическая энергия движения манипулятора с грузом на конце равна [4]

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + \dot{q}_2^0 \dot{q}_1^0) \quad (1.2)$$

Потенциальная энергия манипулятора с грузом в поле сил тяжести  $\Pi$  и потенциальная энергия упругих деформаций звена манипулятора  $\Pi_1$  равны

$$\Pi = -mgq_3 \quad (1.3)$$

$$\Pi_1 = 3EJ(x_1^2 + x_2^2)/2l^3 \quad (1.4)$$

Кинетическая  $T$  и потенциальная энергия  $\Pi$  в соответствии с предположением  $m_0 \ll m$  включает лишь кинетическую и потенциальную энергию груза  $G$ . Потенциальная энергия  $\Pi_1$  есть энергия малых упругих смещений стрелы манипулятора.

Функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{q}_2^0 + \dot{q}_3^0 + \dot{q}_2^0 \dot{q}_1^0) + mgq_3 - 3EJ(x_1^2 + x_2^2)/2q_3^0 \quad (1.5)$$

Обобщенные непотенциальные силы, соответствующие обобщенным координатам  $q_1^0, q_2^0, q_3^0$ , равны  $Q_{q_1^0} = M, Q_{q_2^0} = F_2, Q_{q_3^0} = F_1$ . Этот факт непосредственно следует из выражения для работы  $\delta W$  потенциальных сил на виртуальных перемещениях:

$$\delta W = F_1 \delta q_3^0 + F_2 \delta q_2^0 + M \delta q_1^0$$

Уравнения Лагранжа, описывающие движение рассматриваемой системы в обобщенных координатах  $q_1, q_2, q_3, q_1^0, q_2^0$ , согласно (1.5) принимают следующий вид (см. [1], [3])

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt} (q_2^0 q_1) &= -C_2(q_2^0) x_1, \quad m \frac{d}{dt} q_2 - m q_2 q_1^2 = F_2 \\ m \frac{d}{dt} q_3 - mg &= C_1(q_2^0) x_2, \quad M = -C_2(q_2^0) x_1 \\ F_1 &= C_1(q_2^0) x_2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $C_1(q_2^0) = 3EJ/q_2^0, C_2(q_2^0) = 3EJ/q_2^2$

Последние два уравнения системы (1.6) являются вырожденными и описывают условия равновесия безынерционного манипулятора.

Исключая  $C_1(q_2^0) x_2$  и  $C_2(q_2^0) x_1$  из системы уравнений (1.6), получим

$$m \frac{d}{dt} (q_2^* q_1) = M, \quad m \frac{d}{dt} q_2 - m q_2 q_1^* = F_2 \quad (1.7)$$

$$m \frac{d}{dt} q_3 - mg = F_3$$

Для абсолютно жесткой модели, когда  $x_1 = x_3 = 0$ , система (1.7) принимает следующий вид:

$$m \frac{d}{dt} (q_2^0 q_1^0) = M, \quad m \frac{d}{dt} q_1^0 - mg = F_1^0 \quad (1.8)$$

$$m \frac{d}{dt} q_2^0 - m q_2^0 (q_2^0)^* = I_2^0$$

Так как  $x_1$  и  $x_3$  — малые величины, а  $M$  и  $F_1$  конечны, то из  $M = -C_2(q_1^0)x_1$  и  $F_1 = C_1(q_2^0)x_3$  следует, что коэффициент жесткости должен быть велик. Следовательно, получим

$$C_1(q_2^0) = \varepsilon^{-2} K_1(q_2^0); \quad x_3 = \varepsilon^2 X_3 \quad (1.9)$$

$$C_2(q_1^0) = \varepsilon^{-2} K_2(q_1^0); \quad x_1 = \varepsilon^2 X_1; \quad \varepsilon \ll 1 \quad (1.10)$$

Здесь  $\varepsilon$  — малый параметр, а  $K_1, K_2, X_1, X_3$  — величины порядка единицы.

При сделанных предположениях динамика упругого манипулятора описывается уравнениями (1.5)–(1.7), (1.9), (1.10). Основываясь на этих уравнениях, можно решить различные задачи динамики управляемого движения упругого манипулятора.

2. *Кинематическое управление.* Пусть задан закон изменения  $q_1^*(t), q_2^*(t), q_3^*(t)$ , который реализуется двигателями. Требуется найти движение груза  $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$ , а также силы  $F_1, F_2$  и момент  $M$ , обеспечивающие заданное движение для упругого манипулятора.

Подставив формулы  $q_1 = q_1^*(t) + \varepsilon^2 X_1/q_2^0$ ,  $q_2 = q_2^*(t)$  и  $q_3 = q_3^*(t) - \varepsilon^2 X_3$  в первое и третье уравнения системы (1.6), получим для  $X_1(t)$  и  $X_3(t)$  следующие уравнения:

$$m \frac{d}{dt} [(q_1^* + \varepsilon^2 X_1/q_2^0) q_2^*] = -C_2(q_2^*) \varepsilon^2 X_1 \quad (2.1)$$

$$m \frac{d}{dt} (q_3^* - \varepsilon^2 X_3) - mg = C_1(q_2^*) \varepsilon^2 X_3 \quad (2.2)$$

Уравнения (2.1) и (2.2) содержат малый параметр при старших производных. Их решение в первом приближении ищем в виде [1]:

$$X_1(t) = y_1(t) + z_1(\tau) \quad (2.3)$$

$$X_3(t) = y_3(t) + z_3(\tau) \quad \tau = t/\varepsilon \quad (2.4)$$

где  $\tau$  — «быстрое» время. Слагаемые  $y_1(t)$  и  $y_3(t)$  описывают медленное (квазистатическое) смещение, характерное время которого является вели-

чиной порядка единицы (порядка времени процесса управления манипулятором). Быстро изменяющиеся слагаемые  $z_1(\tau)$  и  $z_3(\tau)$  описывают упругие колебания, период которых порядка  $\varepsilon^{-1}$ .

Подставляя соотношения (2.3), (2.4) в уравнения (2.1) и (2.2), вычисляя производные и опуская члены  $O(\varepsilon^2)$ , получаем для относительно медленно и быстро изменяющихся слагаемых следующие уравнения:

$$[2m\ddot{q}_2^0 \dot{q}_1^0 + m\ddot{q}_1^0 \dot{q}_2^0 - \dot{y}_1(t)/q_2^0 + |mz_1(\tau) \dot{q}_2^0 + \dot{z}_1(\tau)/q_2^0|] = 0 \quad (2.5)$$

$$[m\ddot{q}_3^0 - mg - \dot{y}_3(t)/q_3^0 - |mz_3(\tau) + \dot{z}_3(\tau)/q_3^0|] = 0 \quad (2.6)$$

где  $\lambda = 3\varepsilon^2 E / \sim 1$ .

Первые фигурные скобки в (2.5) и (2.6) заключают выражения, характеризующие квазистатические изменения, не зависящие от  $\tau$ , а вторые скобки объединяют быстрые слагаемые, зависящие от  $\tau$ . Потребуем, чтобы каждое из выражений в фигурных скобках (2.5) и (2.6) равнялось нулю. При этом используется произвол, который содержится в представлении решения в виде суммы (2.3) и (2.4).

Приравняв нулю медленные слагаемые в (2.5) и (2.6), получим

$$X_{1,M} = \varepsilon^2 y_1(t) = \dot{q}_2^0 (-m\ddot{q}_1^0 \dot{q}_2^0 - 2m\ddot{q}_2^0 \dot{q}_1^0) / 3EJ \quad (2.7)$$

$$X_{3,M} = \varepsilon^2 y_3(t) = \dot{q}_3^0 (m\ddot{q}_3^0 - mg) / 3EJ \quad (2.8)$$

Соотношения (2.7) и (2.8) определяют квазистатические упругие смещения.

Приравняв нулю быстрые слагаемые в (2.5) и (2.6), для  $z_1(\tau)$  и  $z_3(\tau)$  получим следующие уравнения:

$$\frac{d}{d\tau} \left[ \alpha(t) \frac{d}{dt} z_i(\tau) \right] + \beta(t) z_i(\tau) = \gamma R(t) \frac{d}{dt} z_i(\tau) \quad (2.9)$$

где

$$\alpha(t) = m\dot{q}_i^0(t), \quad \beta(t) = 1/q_i^0(t), \quad R(t) = \dot{q}_i^0(t) m; \quad i = 1; 3$$

Дифференциальные уравнения (2.9) описывают колебания механической системы с медленно изменяющимися параметрами. Такие уравнения исследуются при помощи асимптотических методов [2].

Общее решение уравнения (2.9) ищем в виде

$$z_i(\tau) = a_i(t) \cos \psi_i(t) \quad (i = 1; 3) \quad (2.10)$$

Величины  $a_i(t)$  и  $\psi_i(t)$  как функции времени определяются следующими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{d}{dt} a_i(t) = -\frac{1}{2} \frac{\alpha \dot{\alpha}(t)}{\alpha(t) \omega(t)} \frac{d}{dt} (z(t) \omega(t)) + \frac{\varepsilon}{2\pi \alpha(t) \omega(t)} \int_0^{2\pi} R_1^i(t) \sin^2 \psi_i d\psi_i \quad (2.11)$$

$$\frac{d}{dt} \psi_i(t) = \omega(t) - \frac{\varepsilon}{2\pi \alpha(t) \omega(t) a_i(t)} \int_0^{2\pi} R_1^i(t) \sin \psi_i \cos \psi_i d\psi_i$$

где

$$\omega(t) = \sqrt{\beta(t)/\alpha(t)}, \quad R_i^t(t) = R(t) a_i(t) \omega(t); \quad i=1; 3 \quad (2.12)$$

После вычисления интегралов при постоянном  $t$  получим следующие соотношения для  $a_i(t)$  и  $\psi_i(t)$ :

$$a_i(t) = a_i(t_0) [\omega(t_0)/\omega(t)]^{1/2} \quad (2.13)$$

$$\psi_i(t) = \varepsilon^{-1} \int_{t_0}^t \omega(t_1) dt_1 + \psi_i(t_0)$$

Для определения произвольных постоянных  $a_i(t_0)$  и  $\psi_i(t_0)$  в решении (2.13) следует воспользоваться начальными данными. Пусть при  $t = t_0$  заданы упругие смещения  $x_i(t_0)$  и скорость их изменений  $\dot{x}_i(t_0)$ . Приравняв эти величины соответственно решению  $\varepsilon^2 X(t)$  и его производной при  $t = t_0$ , получим

$$\begin{aligned} y_i(t_0) + a_i(t_0) \cos \psi_i(t_0) &= \varepsilon^{-2} x_i(t_0) \\ -\varepsilon^{-1} a_i(t_0) \omega(t_0) \sin \psi_i(t_0) &= \varepsilon^{-2} \dot{x}_i(t_0), \quad (i=1; 3) \end{aligned} \quad (2.14)$$

В левой части второго равенства (2.14) опущены члены порядка  $\varepsilon^2$ . Из равенства (2.14) видно, что начальные данные должны иметь следующие порядки малости:  $x_i(t_0) \sim \varepsilon^2$ ;  $\dot{x}_i(t_0) \sim \varepsilon$  (в противном случае не будут выполнены сделанные предположения).

Из уравнения (2.14) получим

$$a_i(t_0) = [y_i(t_0) - \varepsilon^{-2} x_i(t_0)]^2 \omega^2(t_0) + \varepsilon^{-2} \dot{x}_i^2(t_0)]^{1/2} / \omega(t_0) \quad (2.15)$$

$$\psi_i(t_0) = \arctg \dot{x}_i(t_0) / [y_i(t_0) - \varepsilon^{-2} x_i(t_0)] \omega(t_0)$$

Подставляя соотношение (2.15) в (2.13), получим

$$a_i(t) = [\omega(t_0) (y_i(t_0) - \varepsilon^{-2} x_i(t_0))^2 / \omega(t) + \dot{x}_i^2(t_0) \varepsilon^2 \omega(t_0) \omega(t)]^{1/2}$$

$$\psi_i(t) = \varepsilon^{-1} \int_{t_0}^t \omega(t_1) dt_1 + \arctg \dot{x}_i(t_0) / [y_i(t_0) - \varepsilon^{-2} x_i(t_0)] \omega(t_0) \quad (2.16)$$

Управляющий момент  $M$  и силы  $F_1, F_2$ , необходимые для реализации заданных законов  $q_i^0(t)$  ( $i=1, 2, 3$ ), найдем, подставляя в  $M = -C_1(q_2^0)^2 x_1$  и  $F_1 = C_1(q_2^0)^2 x_2$  выражения (2.3) и (2.4). Получим соответственно

$$\begin{aligned} M^* &= -C_1(q_2^0)^2 \varepsilon^2 (y_2(t) + z_2(\tau)) = M_M + M_s \\ F_1^* &= C_1(q_2^0)^2 \varepsilon^2 (y_2(t) + z_2(\tau)) = F_{1M} + F_{1s} \\ F_2^* &= F_2 - F_2^* \end{aligned} \quad (2.17)$$

Следовательно, момент  $M$  и силы  $F_1, F_2$ , необходимые для реализации заданных законов  $q_i^0(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ), для упругого манипулятора равны:

$$F_1 = F_1^0 + F_1^1; \quad F_2 = F_2^0 + F_2^1; \quad M = M^0 + M^1$$

где  $F_1^0, F_2^0, M^0$  определяются из (1.8), а  $F_2^1$  равно

$$F_2^1 = -2mq_2^0 q_1^0 (x_1 | q_2^0)' - mq_2^0 [(x_1 | q_2^0)]^2 \quad (2.18)$$

Итак, в случае заданного кинематического управления  $q_i^0(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) определяются упругие смещения, а также управляющие силы  $F_1, F_2$  и момент  $M$ , обеспечивающие реализацию рассчитанного движения.

Смещения  $x_i$  ( $i = 1, 3$ ), момент  $M$  и силы  $F_1, F_2$  представляются в виде суммы двух слагаемых: медленных или квазистатических и быстрых, которые имеют один и тот же порядок.

3. *Динамическое управление.* Предположим теперь, что задан закон изменения управляющих сил  $F_1(q^0, t), F_2(q^0, t)$  и момента  $M(q^0, t)$ . Этот случай, который будем называть случаем динамического управления, включает как программное управление  $M^0(t), F_1^0(t), F_2^0(t)$ , так и управление с обратной связью  $M(q^0), F_1(q^0), F_2(q^0)$ .

Требуется найти движение упругого манипулятора с грузом, то есть в конечном случае  $q_i^1(t)$  и  $q_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Считая  $M(q^0, t)$  и  $F_1(q^0, t)$  заданными, выразим  $x_1$  и  $x_2$  из  $M = -C_2(q_2^0)x_1, F_1 = C_1(q_2^0)x_2$  и подставим в соотношение (1.1), при этом получим

$$q_1 = q_1^0 - \varepsilon^2 M(q^0, t) / q_2^0 K_2(q_2^0); \quad q_2 = q_2^0; \quad q_3 = q_3^0 - \varepsilon^2 F_1(q^0, t) / K_1(q_2^0) \quad (3.1)$$

Здесь использованы также представления (1.9) и (1.10). Подставив (3.1) в (1.7) и разложив правые части уравнений (1.7) в ряд по  $\varepsilon^2$ , получим

$$m \frac{d^2}{dt^2} (q_2^0 | q_1) = M(q^0, t) - \varepsilon^2 \mu_1; \quad m \frac{d}{dt} q_3 - mg - F_1(q^0, t) - \varepsilon^2 \mu_2 \quad (3.2)$$

$$m \frac{d}{dt} q_2 - mq_2 q_1^0 = F_2(q^0, t) - \varepsilon^2 \mu_3$$

где

$$\begin{aligned} \mu_1 &= M(q^0, t) \frac{\partial M}{\partial q_1^0} \bigg|_{q_2^0 K_2(q_2^0)} + F_1(q^0, t) \frac{\partial M}{\partial q_2^0} \bigg|_{K_1(q_2^0)} \\ \mu_2 &= M(q^0, t) \frac{\partial F_1}{\partial q_1^0} \bigg|_{q_2^0 K_2(q_2^0)} + F_1(q^0, t) \frac{\partial F_1}{\partial q_2^0} \bigg|_{K_1(q_2^0)} \\ \mu_3 &= M(q^0, t) \frac{\partial F_2}{\partial q_1^0} \bigg|_{q_2^0 K_2(q_2^0)} + F_1(q^0, t) \frac{\partial F_2}{\partial q_2^0} \bigg|_{K_1(q_2^0)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Величины  $\varepsilon^2 \mu_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) рассматриваются как малые добавки к  $M(q^0, t), F_1(q^0, t), F_2(q^0, t)$ .

В случае, когда  $\varepsilon^2 \mu_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) равняются нулю, уравнение (3.2) совпадает с уравнением абсолютно жесткого манипулятора.

Решая уравнение (3.2) при определенных  $F_1^0$ ,  $F_2^0$  и  $M^0$ , можно в конечном итоге получить закон изменения  $q_i(t)$  или  $q_i^0(i=1, 2, 3)$ .

Итак, влияние упругости в случае заданных  $M(q^0, t)$ ,  $F_1(q^0, t)$ ,  $F_2(q^0, t)$  учитывается, если в уравнения движения жесткой модели, взятые в любой форме, ввести дополнительные малые силовые слагаемые, которые определяются равенствами (3.3). В этом случае решение для переменных  $q_i(t)$  и  $q_i^0(t)$  не будет содержать в отличие от п. 2 быстрых упругих колебаний. Движение будет отличаться от движения жесткой модели малыми медленно меняющимися добавочными смещениями.

4. *Заданное движение груза.* Рассмотрим теперь случай, когда желаемое движение груза задано в виде  $q_i = q_i^*(t)$  ( $i=1, 2, 3$ ), где  $q_i^*(t)$  — известные функции. Требуется определить программный закон изменения  $M(t)$ ,  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$  для упругого манипулятора. Предполагаем, что начальные данные отвечают заданному движению, то есть  $q_i(0) = q_i^*(0)$ ,  $\dot{q}_i(0) = \dot{q}_i^*(0)$  ( $i=1, 2, 3$ ). Воспользуемся уравнениями движения в форме (3.2). В этих соотношениях следует положить  $q_i = q_i^*(t)$  ( $i=1, 2, 3$ ) и отождествить  $M^0$ ,  $F_1^0$ ,  $F_2^0$  с искомыми  $M(t)$ ,  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$ .

Разрешая полученные равенства относительно  $M(t)$ ,  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$ , найдем

$$M(t) = M^*(t) + \epsilon^2 \mu_1; F_1(t) = F_1^*(t) + \epsilon^2 \mu_2; F_2(t) = F_2^*(t) + \epsilon^2 \mu_3 \quad (4.1)$$

где  $\mu_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) оказываются равными нулю:

$$\mu_1 = M(q^*, t) \frac{\partial M}{\partial q_1} \Big|_{q_2^* K_2(q_2^*) + F_1(q^*, t)} \frac{\partial M}{\partial q_3} \Big|_{K_3(q_3^*)} = 0 \quad (4.2)$$

$$\mu_2 = M(q^*, t) \frac{\partial M}{\partial q_1} \Big|_{q_2^* K_2(q_2^*) + F_1(q^*, t)} \frac{\partial F_1}{\partial q_2} \Big|_{K_1(q_1^*)} = 0$$

$$\mu_3 = M(q^*, t) \frac{\partial M}{\partial q_1} \Big|_{q_2^* K_2(q_2^*) + F_1(q^*, t)} \frac{\partial F_2}{\partial q_3} \Big|_{K_1(q_1^*)} = 0$$

$$M^*(t) = m \frac{d}{dt} (q_2^* q_1^*), F_1^*(t) = m \frac{d}{dt} q_2^* - mg \quad (4.3)$$

$$F_2^*(t) = m \frac{d}{dt} q_2^* - m q_2^* (q_1^*)^2$$

Здесь  $M^*(t)$ ,  $F_1^*(t)$ ,  $F_2^*(t)$  — законы изменения силы  $F_1$ ,  $F_2$  и  $M$ , обеспечивающие заданное движение  $q_i^*(t)$  ( $i=1, 2, 3$ ). Дополнительный малый момент и сила, компенсирующие  $\epsilon^2 \mu_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), определяемые равенствами (4.2), в этом случае равны нулю.

Соотношения (4.1) и (4.3) дают решение поставленной задачи. Итак, для решения задачи управления с упругим элементом, в отличие от жесткой модели, надо учитывать те дополнительные силы и моменты, которые обусловлены упругой податливостью звена манипулятора.

Автор благодарит Ф. А. Черноусько за постановку задачи, а также  
А. Д. Акуленко и Н. Н. Болотина за полезные замечания.

ՂԵԿԱՎԱԲՈՂ ԵՐԵՔ ՇԱՐԺՈՐՆԱԿՈՒԹՅԱՆ ԱՍՏԻՃԱՆ ՈՐՆԵՑՈՂ  
ԱԽԱԶԳԱԿԱՆ ՄԱՆԻՊՈՒԼՅԱՏՈՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Ա. Ա. ՂՈՒԿԱՅԱՆ

Ս. մ փ ո փ ո լ մ

Գիտարկվում է շարժունակության երեք ղեկավարվող աստիճան ունեցող միջուկային մանիպուլյատորի դինամիկական օղակի առաձգական ընկերակերտության հաշվառումով, որը բերում է լրացուցիչ տատանողական աղատության աստիճաններին: Մանիպուլյատորի օղակը ենթարկվում է թայլ ղեֆորմացվող շփվող առաձգական ուղիղ ձող, որի ծայրին դրվում է բեռ, որը ենթարկվում է բացարձակ կոշտ մարմին: Մանիպուլյատորի օղակի ղանդվածք ենթարկվում է արձամարկիորեն փոքր համեմատած բեռի ղանդվածի հետ: Ղեկավարումը իրականացվում է ղեֆորմացված օղակի երկայնությամբ ազդող  $F_2$ , ուղղաձիղ ազդող  $F_1$  ուժերով և  $M$  ուժազույգով, կիրառված պտտման առանցքին:

THE INVESTIGATION OF CONTROLLED MOTIONS OF AN  
ELASTIC MANIPULATOR WITH THREE DEGREES OF FREEDOM

A. A. GUKASIAN

S u m m a r y

The dynamics of a single-link manipulator with three controlled degrees of freedom is investigated, the elastic stiffness of the link giving rise to additional oscillatory degrees of freedom being taken into account. The link of the manipulator is suggested to be a weakly deformable rectilinear rod loaded by the rigid body on one of its ends. The mass of the link is neglected with respect to the mass of the load. The control of the manipulator is carried out by force  $F_2$ , directed along the link, vertically directed force  $F_1$ , and a torque  $M$ , applied to the axis of rotation.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф. А. Динамика управляемых движений упругого манипулятора.—Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1981, № 5.
2. Мигропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1960.
3. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1964.
4. Айлерман М. А. Классическая механика. М.: Наука, 1980.

Институт проблем механики  
АН СССР

Поступила в редакцию  
22. VI. 1982