ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 2, 1983 Механика

О ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ КОНСОЛИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

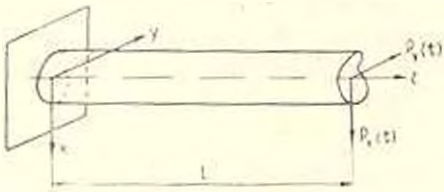
СИМОНЯН А. М., АВЕТИСЯН Г. А.

Вопросы распределения напряжений в брусьях при чистом изгибе рассматривались в ряде работ, например, в [1—5]. Учет поперечных сил при изгибе, согласно линейной теории наследственности, осуществлен в работе [6]. В работе [7] исследовался вопрос о поперечном изгибе призматического бруса с сечением, имеющим ось симметрии, при действии поперечной силы, направленной по оси симметрии сечения, в условиях ползучести, описываемой теорией течения [8].

В настоящей работе строится решение о действии сосредоточенной поперечной силы на конце призматического бруса произвольного сечения, материал которого деформируется, согласно нелинейной теории наследственности [9] в постановке [10] с некоторыми видоизменениями. Исследуется положение центра изгиба с учетом ползучести.

1. *Постановка задачи*

Рассмотрим заделанный одним торцом призматический брус длины l произвольного односвязного сечения, на другой торец которого действует поперечная сосредоточенная сила, определяемая проекциями $P_x(t)$ и $P_y(t)$ на центральные оси x и y поперечного сечения бруса (фиг. 1).



Фиг. 1.

Принимается, что

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0 \qquad (1.1)$$

а также условие объемной несжимаемости материала

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0 \qquad (1.2)$$

Для описания ползучести, описываемой нелинейной зависимостью от напряжений, обычно принимается тезис о пропорциональности и соосности девиаторов напряжений и деформаций [9]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}(\sigma_x - \sigma) \qquad (x, y, z) \\ \gamma_{xy} &= \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}(\tau_{xy}) \qquad (x, y, z) \end{aligned} \qquad (1.3)$$

где

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + 3/2(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}$$

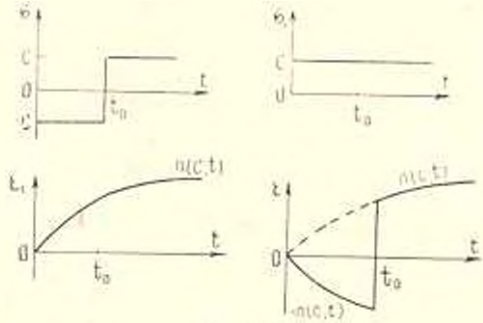
причем σ_i и ε_i связаны друг с другом посредством некоторого временного оператора П, независимо от вида напряженного состояния

$$\varepsilon_i(t) = \Pi[\sigma_i(t), t] \tag{1.4}$$

Однако уравнения (1.3) вкупе с (1.4) содержат в себе недостатки, которые можно проиллюстрировать, в частности, на примере нижеследующей программы изменения осевого напряжения $\sigma_x(t)$:

$$\sigma_x(t) = \begin{cases} -c & \text{при } 0 < t < t_0 \\ c & \text{при } t \geq t_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Согласно (1.3) — (1.5), легко видеть (фиг. 2), что деформации ползучести $\varepsilon(t)$ при $t > t_0$ будут точно такими же, какими они были бы при $\sigma(t) \equiv c$ (показаны штриховыми линиями), независимо от t_0 и от вида оператора П, при этом в точке $t = t_0$ они претерпевают разрыв, в два раза превосходящий накопившуюся деформацию ползучести до момента t_0, что не имеет смысла. В связи с тем, что в задачах изгиба брусьев преобладающими напряжениями являются σ_x, естественным представляется здесь в уравнениях (1.3) значения интенсивностей напряжений σ_i и деформаций ε_i заменить соответственно σ_x и ε_x, которые, в отличие от интенсивностей, могут быть знакопеременными. Вместо (1.3) будем иметь



Фиг. 2.

$$\varepsilon_x = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}(\sigma_x - \sigma) \qquad (x,\ y,\ z)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{xy} \qquad (x,\ y,\ z) \tag{1.6}$$

Присовокупим сюда соотношение, аналогичное (1.4), записанное для нелинейной теории наследственности

$$\varepsilon_x(t) = (1 + K^*) f[\sigma_x(t)] \tag{1.7}$$

где принято обозначение [10]

$$K^* f[\sigma(t)] = \int_{\tau_0}^{t} f[\sigma(\tau)] K(t, \tau)\, d\tau$$

$$K(t, \tau) = -\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \tag{1.8}$$

$C(t, \tau)$ — мера ползучести материала, загруженного в возрасте τ [11]

$$f(\sigma) = A\,|\sigma|^n \operatorname{sign} \sigma \tag{1.9}$$

где A и n — параметры, определяемые из испытания на одноосную ползучесть.

Отметим, что уравнения (1.6) вкупе с (1.7) не имеют вышеуказанных недостатков, присущих (1.3) вкупе с (1.4).

Согласно принимаемой здесь гипотезе плоских сечений, имеем также

$$\sigma_z(x, y, z, t) = a(z, t)\,x + b(z, t)\,y + s(z, t) \tag{1.10}$$

§ 2. *Сведение задачи к разрешающим уравнениям*

Выпишем уравнения и граничные условия, которые должны соблюдаться:

дифференциальные уравнения равновесия, которые с учетом (1.1) запишутся в виде

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \tag{2.2}$$

интегральные условия

$$\iint_{\Omega} \sigma_z\, d\Omega = 0 \tag{2.3}$$

$$\iint_{\Omega} \sigma_z x\, d\Omega = -P_x(t)(l - z) \tag{2.4}$$

$$\iint_{\Omega} \sigma_z y\, d\Omega = -P_y(t)(l - z) \tag{2.5}$$

где Ω — площадь поперечного сечения бруса, а также условия совместности деформаций, которые с учетом (1.1) и (1.3) запишутся в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} \tag{2.7}$$

Поскольку поперечные размеры малы по сравнению с длиной, то естественно принять $\partial\varepsilon_z/\partial z \ll \partial\varepsilon_z/\partial x$ и $\partial\varepsilon_z/\partial z \ll \partial\varepsilon_z/\partial y$, вследствие чего, а также с учетом (1.10), (1.2) и (1.6), остальные условия совместности деформаций можно снять из рассмотрения. Используя (1.7), (1.9), (1.10), (2.3), (2.4), (2.5), получим

$$\varepsilon_z(x, y, z, t) = [\alpha(t)x + \beta(t)y + \delta(t)](l - z)^n \tag{2.8}$$

$$\sigma_z(x, y, z, t) = [(1 - R^*)[\alpha(t)x + \beta(t)y + \delta(t)]]^{1/n-1} \times$$
$$\times (1 - R^*)[\alpha(t)x + \beta(t)y + \delta(t)]A^{-1/n}(l - z) \tag{2.9}$$

где при обозначении (1.8) $R(t, \tau)$ — резольвента вольтерровского ядра $K(t, \tau)$, а введенные здесь функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\delta(t)$ при произвольных фиксированных t определяются из уравнений

$$\iint_\Omega [(1 - R^*)[\alpha(t)x + \beta(t)y + \delta(t)]]^{1/n} x\,d\Omega = -A^{1/n}P_x$$

$$\iint_\Omega [(1 - R^*)[\alpha(t)x + \beta(t)y + \delta(t)]]^{1/n} y\,d\Omega = -A^{1/n}P_y \tag{2.10}$$

$$\iint_\Omega [(1 - R^*)[\alpha(t)x + \beta(t)y + \delta(t)]]^{1/n} d\Omega = 0$$

где степенная функция для отрицательных аргументов понимается в смысле нечетного продолжения.

Уравнения (2.1) и (2.2) при использовании (2.9) решаются путем введения функции напряжений $F(x, y, t)$ по формулам

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} + A^{-1/n}\frac{n}{n+1}[(1 - R^*)[\alpha(t)x + \beta(t)y + \delta(t)]]^{1/n+1} + f_1(y, t)$$
$$\tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x} + f_2(x, t) \tag{2.11}$$

где $f_1(y, t)$ и $f_2(x, t)$ — произвольные функции.

Уравнения (2.6) и (2.7) могут быть сведены к следующему:

$$\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} = (l - z)^{n-1}\{[\beta(t)x - \alpha(t)y]n + B(t)\} \tag{2.12}$$

где $B(t)$ — функция времени, определяющая поворот поперечного сечения.

Подставляя (1.6), (2.8), (2.9) и (2.11) в (2.12), получим основное уравнение относительно функции напряжения $F(x, y)$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \mu(x, y)\frac{\partial F}{\partial y} + \nu(x, y)\frac{\partial F}{\partial x} = \lambda(x, y) \tag{2.13}$$

где

$$\mu(x, y) = \frac{\beta(t)}{\Lambda(x, y, t)} - \frac{1}{n}\frac{(1-R^*)\beta(t)}{(1-R^*)\Lambda(x, y, t)} \tag{2.14}$$

$$\nu(x, y) = \frac{\alpha(t)}{\Lambda(x, y, t)} - \frac{1}{n}\frac{(1-R^*)\alpha(t)}{(1-R^*)\Lambda(x, y, t)} \tag{2.15}$$

$$\lambda(x, y) = \frac{2}{3} nA^{-1/n}[\Lambda(x, y, t)]^{-1}\left[\beta(t)x - \alpha(t)y + \frac{B(t)}{n}\right] \times$$

$$\times |(1-R^*)\Lambda(x, y, t)|^{1/n-1}(1-R^*)\Lambda(x, y, t) -$$

$$-\frac{n}{n+1}A^{-1/n}(1-R^*)\beta(t)|(1-R^*)\Lambda(x, y, t)|^{1/n+1}(1-R^*)\Lambda(x, y, t) -$$

$$-\frac{n}{n+1}A^{-1/n}\frac{\beta(t)}{\Lambda(x, y, t)}|(1-R^*)\Lambda(x, y, t)|^{1/n+1} +$$

$$+\frac{\partial f_2(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial f_1(y, t)}{\partial y} + \left[\frac{\alpha(t)}{\Lambda(x, y, t)} -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n}\frac{(1-R^*)\alpha(t)}{(1-R^*)\Lambda(x, y, t)}\right] f_2(x, t) -$$

$$-\left[\frac{\beta(t)}{\Lambda(x, y, t)} - \frac{1}{n}\frac{(1-R^*)\beta(t)}{(1-R^*)\Lambda(x, y, t)}\right] f_1(y, t) \tag{2.16}$$

$$\Lambda(x, y, t) = \alpha(t)x + \beta(t)y + \delta(t)$$

$$(1-R^*)f(t) = f(t) - \int_0^t R(t, \tau)f(\tau)\,d\tau$$

Поскольку на контуре сечения не имеется внешних нагрузок, то краевое условие запишется так:

$$\tau_{xz}\cos(\bar{n}, \bar{x}) + \tau_{yz}\cos(\bar{n}, y) = 0 \tag{2.17}$$

где $\bar{n}$ — внешняя нормаль к точке контура сечения.

Подставляя (2.11) в (2.17), получим следующее краевое условие для функции $F(x, y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = -A^{-1/n}\frac{n}{n+1}|(1-R^*)[\alpha(t)x + \beta(t)y + \delta(t)]|^{1/n+1}\frac{dy}{ds} +$$

$$+ f_2(x, t)\frac{\partial x}{\partial s} - f_1(y, t)\frac{\partial y}{\partial s} \tag{2.18}$$

где ds — элемент контура сечения.

Таким образом, задача определения касательных напряжений сведена к уравнению (2.13) при краевом условии (2.18).

Рассмотрим теперь вопрос, будет ли брус закручиваться и где следует приложить силы $P_x(t)$ и $P_y(t)$ для изгиба без кручения, то есть, где на-

ходится центр изгиба. Поскольку для несимметричных сечений, вообще говоря, суждение об отсутствии кручения затруднительно, то будем считать кручение отсутствующим, если

$$\iint_{\Omega} \omega_z(x, y)\, d\Omega = 0 \tag{2.19}$$

где ω_z — поворот элемента площади в окрестности точки x, y относительно оси z. Легко видеть из формул Ламе, выражающих деформации через перемещения, что

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \tag{2.20}$$

Подставляя (2.20) и (2.12) в (2.19), получим, что кручение отсутствует при условии

$$B(t) = 0 \tag{2.21}$$

что конкретизирует правую часть уравнения (2.13).

Определим теперь местоположение центра изгиба. Для этого воспользуемся следующим интегральным условием:

$$\iint_{\Omega} (y\tau_{xz} - x\tau_{yz})\, d\Omega = -M_{кр} \tag{2.22}$$

где $M_{кр}$ — крутящий момент, вызванный силами P_x и P_y. Подставляя сюда $M_{кр} = P_x y_0 - P_y x_0$, а также (2.11), для определения условия отсутствия кручения получим уравнение прямой линии

$$P_y(t)\, x_0 - P_x(t)\, y_0 - \iint_{\Omega} \Big\{ y \frac{\partial F(x, y, t)}{\partial y} + x \frac{\partial F(x, y, t)}{\partial x} + y f_1(y, t) -$$

$$- x f_2(x, t) + \frac{ny}{n+1} A^{-1/n} \left[(1 - R^*) [\alpha(t) x + \beta(t) y + \delta(t)] \right]^{1/n+1} \Big\}\, d\Omega = 0 \tag{2.23}$$

то есть при действии силы с составляющими $P_x(t)$ и $P_y(t)$ кручение не будет иметь места, если точка приложения (x_0, y_0) этой силы находится на прямой линии, определяемой уравнением (2.23).

Вышеприведенные уравнения можно использовать и для случая наличия кручения, если задан поворот сечения на некотором расстоянии от защемления.

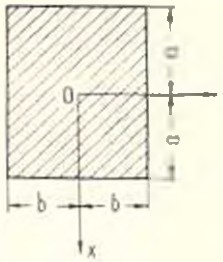
Для тонкостенных несимметричных и длинных брусьев определение центра изгиба приобретает особое значение. Таким образом, задача об изгибе брусьев сведена к решению системы (2.10) относительно $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\delta(t)$, где t играет роль параметра, и, следовательно, определению σ_z и ε_z по формулам (2.8) и (2.9), затем к решению уравнения (2.13) при краевом условии (2.18) и определению центра изгиба согласно (2.23), к

которому должны быть приложены внешние силы для отсутствия кручения. Функции $f_1(y, t)$ и $f_2(x, t)$, входящие в (2.16), (2.18) и (2.23), произвольны, приравнение их нулю не отражается на определении напряжений.

§ 3. *Изгиб консольного бруса прямоугольного сечения*

В качестве приложения рассмотрим задачу об изгибе бруса прямоугольного сечения, допускающую аналитическое решение.

Положим, что на брус (фиг. 3) вдоль оси x действует сила P. Из системы (2.10) получим



Фиг. 3.

$$\alpha(t) = -A\left(\frac{2+1/n}{4b}\right)^n a^{1/n(1+2n)}(1+K^*)[|P|^{n-1}P]$$

$$\xi(t) = \zeta(t) = 0 \tag{3.1}$$

Условие (2.18) запишется так

$$\frac{\partial F}{\partial s} = -A^{-1/n}\frac{n}{n+1}|(1-R^*)\alpha(t)|^{1/n+1}x^{1/n+1}\frac{\partial y}{\partial s} +$$

$$+ f_2(x, t)\frac{\partial x}{\partial s} - f_1(y, t)\frac{\partial y}{\partial s} \tag{3.2}$$

Принимая

$$f_2(x, t) = 0$$

$$f_1(y, t) = -A^{-1/n}\frac{n}{n+1}|(1-R^*)\alpha(t)|^{1/n+1}a^{1/n+1} \tag{3.3}$$

получим, что как на сторонах $y = \pm b$, так и $x = \pm a$, то есть на всем контуре $\partial F/\partial s = 0$, и, не умаляя общности, можно принять

$$F(\pm a, y) = 0$$

$$F(x, \pm b) = 0 \tag{3.4}$$

Учитывая (3.1) и (3.3), уравнение (2.13) перепишем так

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{(1+2n)P}{6}\,\frac{y|x|^{1/n-1}}{ba^{1/n+2}} \tag{3.5}$$

Решение уравнения (3.5), удовлетворяющее второму условию (3.4), ищем в виде ряда

$$F(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varkappa_k(x, t)\sin\frac{k\pi}{b}y \tag{3.6}$$

Разлагая в аналогичный ряд Фурье правую часть (3.5) и приравнивая коэффициенты при $\sin(k\pi y)/b$, получим

$$\frac{\partial^2 \varkappa_k(x, t)}{\partial x^2} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{x}\frac{\partial \varkappa_k(x, t)}{\partial x} - \frac{\pi^2 k^2}{b^2}\varkappa_k(x, t) =$$

$$= \frac{1+2n}{3k\pi}(-1)^{k+1}\frac{x^{1/n-1}P}{a^{1/n+2}} \tag{3.7}$$

Осуществляя замену переменных

$$x = \frac{b\xi_k}{ik\pi}; \qquad \psi_k = \varphi_k x^{1/2n}; \qquad \nu = \frac{1}{2n} \tag{3.8}$$

уравнение (3.7) сводится к неоднородному уравнению Бесселя

$$\xi^2 \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial \xi^2} + \xi \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi} + (\xi^2 - \nu^2)\varphi_k = \frac{(-1)^{k-1}(1+2n)}{3k\pi a^{1/n+2}} \left(\frac{b\xi}{ik\pi}\right)^{1+1/2n} P \tag{3.9}$$

Общее решение уравнения (3.9) при обозначениях (3.8) запишется в виде [12]

$$\varphi_k(x) = C_{1k}(t) I_\nu\left(\frac{k\pi x}{b}\right) + C_{2k}(t) I_{-\nu}\left(\frac{k\pi x}{b}\right) + \chi(x, t) \tag{3.10}$$

где I_ν и $I_{-\nu}$ — функции Бесселя мнимого аргумента порядка ν и $-\nu$ соответственно, $C_{1k}(t)$ и $C_{2k}(t)$ — произвольные функции интегрирования, $\chi(x, t)$ — частное решение уравнения (3.9). Используя результаты [13], для функции $\chi(x, t)$ получим выражение

$$\chi(x, t) = (-1)^k \left(\frac{b}{k\pi}\right)^{\nu+1} P \frac{(1+2n)\, 2^{\nu-1}\Gamma(\nu+1/2)}{3k\sqrt{\pi}\, a^{2+1/n}} L_\nu\left(\frac{k\pi x}{b}\right) \tag{3.11}$$

где $L_\nu\left(\frac{k\pi x}{b}\right)$ — функция Струве, представляемая в виде нижеследующего ряда:

$$L_\nu\left(\frac{k\pi x}{b}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{k\pi x}{2b}\right)^{2m+\nu+1}}{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+m+\frac{3}{2}\right)} \tag{3.12}$$

Используя (3.6), (3.8), (3.10) и (3.11), для функции напряжений $F(x, y, t)$ получим выражение

$$F(x, y, t) = x^{\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \left| C_{1k}(t) I_\nu\left(\frac{k\pi x}{b}\right) + C_{2k}(t) I_{-\nu}\left(\frac{k\pi x}{b}\right) + \right.$$

$$\left. + \lambda_k(t) L_\nu\left(\frac{k\pi x}{b}\right) \right| \sin\frac{k\pi y}{b} \tag{3.13}$$

где

$$\lambda_k(t) = (-1)^k \left(\frac{b}{k\pi}\right)^{\nu+1} \frac{(1+2n)\, 2^{\nu-1}\Gamma(\nu+1/2)}{3k\sqrt{\pi}\, a^{1/n+2}} P \tag{3.14}$$

Подставляя (3.13) во второе уравнение (2.11) и учитывая (3.3), получим

$$\tau_{yx}(x, y, t) = -\nu x^{\nu-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left| C_{1k}(t) I_\nu\left(\frac{k\pi x}{b}\right) + C_{2k}(t) I_{-\nu}\left(\frac{k\pi x}{b}\right) + \right.$$

$$+ i_k(t) L_\nu\left(\frac{k\pi x}{b}\right) \Bigg] \sin\frac{k\pi y}{b} - x^\nu \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg[C_{1k}(t) \frac{d}{dx} I_\nu\left(\frac{k\pi x}{b}\right) + \tag{3.15}$$

$$- C_{2k}(t) \frac{d}{dx} I_{-\nu}\left(\frac{k\pi x}{b}\right) + i_k(t) \frac{d}{dx} L_\nu\left(\frac{k\pi x}{b}\right) \Bigg] \sin\frac{k\pi y}{b}$$

Из условия, что τ_{xy} на линии $x = 0$ является конечной величиной, заключаем, что

$$C_{1k}(t) = 0 \tag{3.16}$$

Для того, чтобы удовлетворить первому условию (3.4), достаточно положить

$$C_{2k}(t) = -\frac{i_k(t) L_\nu\left(\frac{k\pi a}{b}\right)}{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi a}{b}\right)} \tag{3.17}$$

Используя (3.13), (3.14), (3.16) и (3.17), получим следующее выражение для функции напряжений $F(x, y, t)$:

$$F(x, y, t) = \frac{2^{\nu-1} b^{\nu+1} x^\nu (1+2n)\Gamma(\nu+1/2) P}{3\pi^{\nu+3/2} a^{2\nu+1/n}} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{\nu+2}} \left[-L_\nu\left(\frac{k\pi a}{b}\right) \frac{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi x}{b}\right)}{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi a}{b}\right)} + L_\nu\left(\frac{k\pi x}{b}\right) \right] \sin\frac{k\pi y}{b} \tag{3.18}$$

Можно показать, что, принимая в (3.18) $n = 1$ ($\nu = 1/2n = 1/2$), из формулы (3.18) получим известное решение задачи Сен-Венана об изгибе упругой консольной балки прямоугольного сечения [14].

Поскольку функции Бесселя протабулированы, целесообразным представляется выразить через них функцию Струве, согласно [12]:

$$L_\nu(x) = I_{-\nu}(x) - \frac{2(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\Gamma(1/2)} \int_0^\infty (1+y^2)^{\nu-1/2} \sin(xy)\, dy \tag{3.19}$$

После подстановки (3.19) в (3.18) и (2.11) и использования рекуррентных соотношений для $I_\nu(x)$ и $I_{-\nu}(x)$ после ряда преобразований получим нижеследующие выражения для τ_{xz} и τ_{yz}

$$\tau_{xz} = \frac{(1+2n)x^\nu P}{3\pi a^{\nu+2}} \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg\{ \frac{(-1)^k}{k} \Bigg[\frac{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi x}{b}\right)}{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi a}{b}\right)} \int_0^\infty \sin\left(\frac{k\pi a\xi}{b}\right)(1+\xi^2)^{\nu-1/2} d\xi -$$

$$- (x/a)^{\nu} \int_0^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x\xi}{b}\right)(1+\xi^2)^{\nu-1/2}\, d\xi \Bigg] \cos\frac{k\pi y}{b} \Bigg] + \tag{3.20}$$

$$+ \frac{P(\nu+1)(a^{2\nu+1}-x^{2\nu+1})}{2(2\nu+1)\, b a^{2(\nu+1)}}.$$

$$\tau_{yz} = -\frac{P(\nu+1)\, b x^{\nu-1}}{3\pi^2 a^{\nu+2}} \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg| \frac{(-1)^k}{k^2} \Bigg[\frac{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi x}{b}\right)}{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi a}{b}\right)} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi a\xi}{b}\right)(1+\xi^2)^{\nu-1/2}\, d\xi +$$

$$+ \frac{k\pi x}{2\nu b}\left(\frac{I_{-\nu-1}\left(\frac{k\pi x}{b}\right)}{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi a}{b}\right)} + \frac{I_{-\nu+1}\left(\frac{k\pi x}{b}\right)}{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi a}{b}\right)} \right) \int_0^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi a\xi}{b}\right)(1+\xi^2)^{\nu-1/2}\, d\xi +$$

$$+ 2(n-1)\left(\frac{x}{a}\right)^{\nu} \int_0^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x\xi}{b}\right)(1+\xi^2)^{\nu-3/2}\, d\xi \Bigg] \sin\frac{k\pi y}{b} \tag{3.21}$$

В табл. 1 при обозначении $p^* = P/h^2$ приведены значения τ_{xz}/p^* и τ_{yz}/p^*, вычисленные по формулам (3.20) и (3.21), в применении к изгибу бруса сечения $h \times 2h$ силой P при $n = 3$, в сравнении с соответствующими значениями при $n = 1$.

Таблица 1

Значения касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} при изгибе бруса прямоугольного сечения $h \times 2h$

	$2y/h$		x/h							
			0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	1,000
τ_{xz}/p^*	0	$n=3$	0,850	0,789	0,699	0,592	0,470	0,333	0,178	0
		$n=1$	0,558	0,530	0,484	0,421	0,338	0,236	0,111	0
τ_{yz}/p^*	1	$n=3$	0,741	0,623	0,507	0,386	0,263	0,140	0,031	0
		$n=1$	0,606	0,579	0,535	0,469	0,387	0,284	0,159	0
	x/h		$2y/h$							
			0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	1,000
τ_{xz}/p^*	0	$n=3$	0,874	0,874	0,875	0,875	0,876	0,876	0,877	0,877
		$n=1$	0,567	0,570	0,573	0,578	0,585	0,594	0,604	0,614
τ_{yz}/p^*	0	$n=3$	0,0196	0,0388	0,0540	0,0703	0,0712	0,0705	0,0522	0
		$n=1$	0,0054	0,0102	0,0147	0,0181	0,0196	0,0194	0,0153	0

§ 4. *Изгиб консольного бруса тонкостенного швеллерного сечения*

Рассмотрим определение напряжений у консольного бруса, сечение которого показано на фиг. 4, при действии силы, параллельной оси x, при условии отсутствия закручивания. Из условия тонкостенности сечения имеем

$$\tau_{xz} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0 \quad \text{на полках}$$
$$\tau_{yz} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad \text{на стенке} \tag{4.1}$$

Вследствие симметрии поперечного сечения относительно оси y, получим, что условия (2.10) удовлетворяются при

$$\alpha(t) = -\frac{A}{a^{1+3n}}\left|\frac{1+2n}{2\delta(1+3n)}\right|^n (1+K^n)[P^n(t)]$$
$$\beta(t) = \delta(t) = 0 \tag{4.2}$$

где степенная функция от отрицательных аргументов понимается в смысле нечетного ее продолжения.

Согласно (2.9) и (4.2), нормальные напряжения σ_z определяются по формулам

$$\sigma_z = \pm\frac{P(1+2n)(l-z)}{2(1+3n)\delta a^2} \quad \text{на полках } x = \pm a$$
$$\sigma_z = -\frac{|x|^{1+n}\,x P(l-z)(1+2n)}{2(1+3n)\delta a^{1+3n}} \quad \text{на стенке} \tag{4.3}$$

Фиг. 4.

Используя (4.1), (2.2) и (4.3), а также очевидные условия $\tau_{yz}(3/4\,a) = 0$ и $\int_{-a}^{a}\tau_{yz}(x)\,\delta dx = P$, получим

$$\tau_{yz}(\pm a, y) = \pm\frac{P(1+2n)}{2(1+3n)\delta a}\left(\frac{3}{4}-\frac{y}{a}\right)$$
$$\tau_{xz}(\pm a, y) = 0 \quad \text{на полках} \tag{4.4}$$

$$\tau_{xz}\left(x, -\frac{a}{4}\right) = \frac{P(1+2n)}{2\delta a(1+3n)(1+n)}\left|1+2n-n\left(\frac{|x|}{a}\right)^{1/n+1}\right| \quad \text{на стенке}$$

$$\tau_{yz}\left(x, -\frac{a}{4}\right) = 0$$

При $n = 1$ из (4.4) получим

$$\tau_{xz}\left(x, -\frac{a}{4}\right) = \frac{3}{16}\frac{P}{\delta a}\left[3-\left(\frac{|x|}{a}\right)^2\right] \tag{4.5}$$

что совпадает с формулой Журавского для швеллерных сечений.

Центр изгиба определяется значением y_0 при $P_y = 0$, согласно (2.22), (4.4) и (4.5), по формуле

$$y_0 = -\frac{5n^2 + 7n + 2}{12n^2 + 16n + 4}\,a$$

Отметим, что зависимость y_0 от показателя нелинейности n весьма мала. Действительно, для линейно-деформируемых тел ($n = 1$) имеем $y_0 = -0{,}4375\,a$, в то время как при $n = 3$ $y_0 = -0{,}425\,a$, а при $n \to \infty$ $y_0 = -0{,}4167\,a$.

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ԿՈՆՍՈԼԻ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ԾՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ, Հ. Ա. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

Ամփոփում

Ոչ գծային ժառանգական սողքի տեսության հիման վրա կառուցվում է կամայական լայնական հատվածքի կոնսոլային չորսուի վրա ազդող կենտրոնացված լայնական ուժի ազդեցության խնդրի լուծումը։ Խնդիրը բերված է մասնակի ածանցյալներով երկրորդ սեռի դիֆերենցիալ հավասարման լուծման։ Ուղղանկյուն լայնական հատվածքի դեպքում ստացված են լարումների համար արտահայտություններ։ Ստացված են բանաձևերը լարումների և ծռման կենտրոնի որոշման համար շվելերային հատվածքի բարակապատ չորսուի դեպքում։

ON THE CROSS-SECTION BENDING OF THE CONSOLE IN THE NONLINEAR THEORY OF CREEP

A. M. SIMONIAN, G. A. AVETISSIAN

Summary

On the basis of the nonlinear hereditary theory of creep, the solution of the problem concerning the action of concentrated shear force on a cantilever beam with an arbitrary cross-section is built.

The problem is reduced to the second order differential equation. In the case of a right-angled cross-section, the expressions for stresses are received. The formulas for the determination of stresses and the center of bending, in the case of a thin-walled beam with a horizontal cross-section, are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малинин Н. Н.* Некоторые одномерные задачи неустановившейся ползучести.— Инж. сб., 1951, т. 10.
2. *Малинин Н. Н.* Основы расчета на ползучесть. М.: Машгиз, 1948.
3. *Ptechnik S., Chrzanowski M.* Time of total creep rupture of a beam under combined tension and bending.—Int. journal solids and structure, 1970, v. 6, No. 4.
4. *Александрян Р. А., Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Релаксационная задача об изгибе призматического стержня.— Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 1.
5. *Работнов Ю. Н.* Некоторые вопросы теории ползучести.— Вестник МГУ, 1948, № 10.
6. *Арутюнян Н. Х., Чобанян К. С.* Изгиб призматических стержней, составленных из различных материалов, с учетом ползучести.— Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 1957, т. 10, № 5.
7. *Аветисян Г. А.* Поперечный изгиб однородного призматического стержня, находящегося в условиях неустановившейся ползучести.— Изв. АН АрмССР, Механика, 1977, т. 30, № 5.
8. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960.
9. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
10. *Simonian A. M.* Calculation of thermal stresses in thick-walled cylinders taking account of non-linear creep.—International Journal of Engineering Science, 1979, v. 17, No. 5.
11. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.: Гостехтеориздат, 1952.
12. *Ватсон Дж. Н.* Теория бесселевых функций, ч. 1. М.: ИЛ, 1975.
13. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
14. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975.

СКТБ Института механики АН АрмССР
Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Поступила в редакцию
8.IX.1981