

## ПРОНИКАНИЕ ТОНКОГО КОНУСА В ВЕСОМУЮ ЖИДКОСТЬ С ПУЗЫРЬКАМИ

АВАГЯН С. Г.

§ 1. Газожидкостные смеси встречаются в технике в разном виде. В данной статье рассматривается задача проникания тонкого конуса в весомую жидкость с пузырьками. Найден потенциал скоростей, давление внутри жидкости и сила сопротивления. Построены графики зависимости силы сопротивления от параметра  $\psi = t/\sqrt{r}$ , где параметр  $r$  характеризует пузырьки.

Для получения уравнения движения газожидкостной смеси использованы основные уравнения движения идеального газа в предположении, что термодинамические изменения в пузырьках являются изотермическими и что пузырьки движутся локально вместе с жидкостью [5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g, \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) = 0, \quad \rho \approx \rho_f (1 - \alpha) \\ p = p_r - \rho_f \left[ R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 \right] \\ \frac{\rho_f (1 - \alpha)}{\rho_r} = \text{const}, \quad \rho_r R^3 = \text{const} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $u, v, p, \rho$  — возмущения компонент вектора скорости в направлении осей  $z, r$ , давление и плотность,  $t$  — время,  $\alpha$  — объемная концентрация газа,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $p_r$  — давление пузырька,  $\rho_f$  — плотность жидкой фазы,  $R$  — радиус пузырька. Поверхностным натяжением пренебрегается. Уравнения (1.1) можно свести к одному уравнению для функции  $\varphi$  (где  $u = \partial \varphi / \partial z, v = \partial \varphi / \partial r$ ), если обозначим возмущения параметров  $\rho, R, p_r, \alpha$  через  $\rho_0, R_0, p_r, \alpha_0$  соответственно. В силу малости концентрации  $\alpha_0$  в шестом уравнении (1.1) в формуле для плотности пренебрегается слагаемое, соответствующее газовой фазе. Тогда линеаризованные уравнения примут вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho_0 \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) = 0 \quad (1.2)$$

$$p = p_r - \rho_0 R_0 \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

Из (1.3) и соотношения  $p_r R^2 = p_{r_0} R_0^2$  следует, что

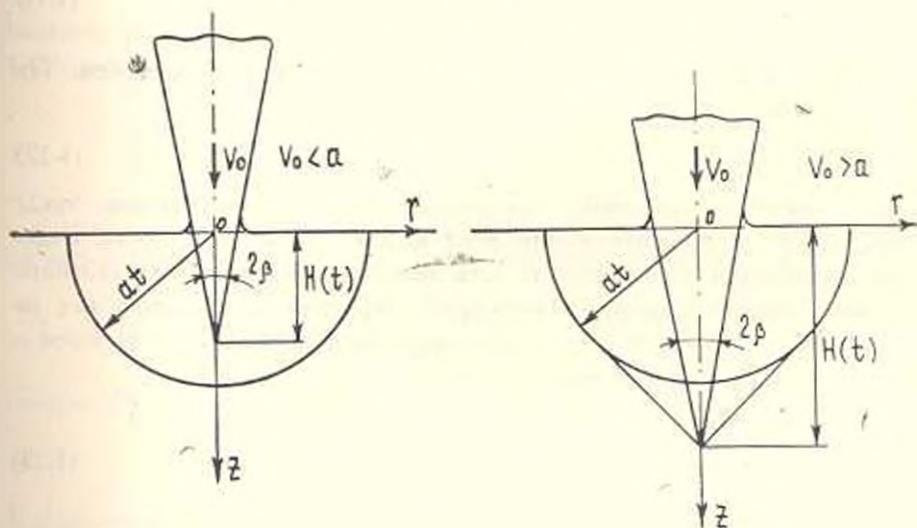
$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p_r}{\partial t} + \frac{\rho_0 R_0^2}{3 p_{r_0}} \frac{\partial^3 p_r}{\partial t^3} \quad (1.4)$$

Согласно (1.1)  $\partial \varphi / \partial t = -\rho_f (\partial x / \partial t)$ , и уравнение (1.2) примет вид

$$-\rho_f \frac{\partial x}{\partial t} + \rho_0 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0 \quad (1.5)$$

Учитывая условие  $\frac{\rho_f (1 - \alpha)}{\rho_{c_0}} = \text{const}$ , имеем

$$\frac{1}{\rho_{c_0}} \frac{\partial p_r}{\partial t} + \frac{1}{\alpha_0 (1 - \alpha_0)} \frac{\partial x}{\partial t} = 0 \quad (1.6)$$



Фиг. 1

Решая совместно уравнения (1.5) и (1.6), получим

$$\frac{\rho_f (1 - \alpha_0) \alpha_0}{\rho_{c_0}} \frac{\partial p_r}{\partial t} + \rho_0 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0 \quad (1.7)$$

Используя интеграл Коши-Лагранжа  $p = -\rho (\partial \varphi / \partial t) + \rho g z$ , будем иметь

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (1.8)$$

Из (1.4), (1.7) и (1.8) получим уравнение

$$\left( 1 + \frac{\rho_0 R_0^2}{3 p_{r_0}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{\rho_f (1 - \alpha_0) \alpha_0}{\rho_{c_0}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

Обозначим [2]  $\frac{\gamma_f(1-\alpha_0)\alpha_0}{\rho_{\infty}} = \frac{1}{a^2}$ , где  $a$  — скорость звука в невозмущенной жидкости. Обозначая еще  $\kappa = \frac{\gamma_0 R_0^2}{3\rho_{\infty}}$ , причем  $\frac{1}{\sqrt{\kappa}}$  есть частота свободных пульсаций пузырька [5], получим

$$\left(1 + \kappa \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \Delta \varphi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.9)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа. Для нахождения потенциала скоростей  $\varphi$ , кроме уравнения (1.9), имеем еще следующие граничные условия на свободной поверхности и на теле соответственно:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \dot{H}(t) \xi \quad (1.11)$$

где  $\dot{H}(t)$  — скорость проникания конуса,  $\xi$  — угол полураствора. Так как задача линеаризована, то можно полагать

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \quad (1.12)$$

где  $\varphi_0$  соответствует решению о движении тела в безграничной среде  $-\infty < z < \infty$ , а  $\varphi_1$  — отражению волны от свободной поверхности. Задачу решаем методом источников, то есть действие конуса на воду заменяем действием концентрированных импульсов давления, прикладываемых по оси тела. Метод сочетаем с интегральными преобразованиями.  $\varphi_0$  ищем в виде потенциала запаздывающих источников

$$\varphi_0 = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{q(z_1, t')}{R^*} dz_1 \quad (1.13)$$

где  $t' = t - R^*/a$  — запаздывающее время,  $R^* = \sqrt{(z_1 - z)^2 + r^2}$ . Применяя преобразование Лапласа, из (1.9) получим

$$(1 + \kappa S^2) \Delta \bar{\varphi} - (S^2/a^2) \bar{\varphi} = 0 \quad (1.14)$$

Рассматриваем решение для отдельных источников  $\varphi^0$ , то есть

$$\bar{\varphi} = \int_0^{\infty} \varphi^0 dz_1 \quad (1.15)$$

Имея в виду (1.14), для изображения  $\varphi_0^0$  имеем

$$\bar{\varphi}_0^0 = -\frac{q(z_1, t) \exp(i\theta R^*)}{4\pi R^*} \quad (1.16)$$

где

$$\theta = -S/a(1 + \kappa S^2)$$

В силу известного равенства

$$\frac{\exp(iR^*)}{R^*} = \int_0^{\infty} \frac{k \exp[-|z_1 - z|\lambda]}{\lambda} J_0(kr) dk$$

Тогда для  $\bar{\varphi}_0^0$  будем иметь

$$\bar{\varphi}_0^0 = -\frac{q(z_1, t)}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{k \exp[-|z_1 - z|\lambda]}{\lambda} J_0(kr) dk \quad (1.17)$$

Изображение отраженных поля  $\bar{\varphi}_1^0$  ищем в виде

$$\bar{\varphi}_1^0 = \int_0^{\infty} \frac{k \exp[-(z_1 + z)\lambda]}{\lambda} A J_0(kr) dk \quad (1.18)$$

Применяя преобразование Лапласа к (1.10), (1.12) и имея в виду (1.17), (1.18), найдем значение  $A$ . Подставляя значение  $A$  в (1.18), будем иметь

$$\bar{\varphi}_1^0 = \int_0^{\infty} \frac{q(z_1, t)}{4\pi} \frac{k \exp[-(z_1 + z)\lambda]}{\lambda} \frac{S^2 - g\lambda}{S^2 + g\lambda} J_0(kr) dk \quad (1.19)$$

где через  $\lambda$  обозначено  $\lambda = \sqrt{k^2 + \theta^2}$ . Как известно [3], при  $r \rightarrow 0$  имеем

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=0} = \frac{1}{2\pi} \frac{q(z_1, t')}{r} \rightarrow 0(q)$$

Тогда из (1.11) получится

$$q(z_1, t') = 2\pi\beta^2 H(H - z_1) \quad (1.20)$$

Для простоты принимаем, что проникание происходит с постоянной скоростью. Для нахождения  $\bar{\varphi}_1^0$  разложим (1.19) в ряд по степеням  $g\lambda/S^2$ , тогда получим

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_1^0 = & \int_0^{\infty} \frac{q(z_1, t)}{4\pi} \frac{k \exp[-(z_1 + z)\lambda]}{\lambda} J_0(kr) dk + \\ & + \int_0^{\infty} \frac{2g(z_1, t)}{4\pi} \frac{k \exp[-(z_1 + z)\lambda]}{\lambda} J_0(kr) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{g\lambda}{S^2}\right)^n dk \end{aligned}$$

Обозначая значение  $\bar{\varphi}_1^0$  при  $g=0$  через  $\Phi_1^0$ , получим

$$\bar{\varphi}_1^0 = \Phi_1^0 + \frac{2g}{S^2} \frac{\partial \Phi_1^0}{\partial z} + \frac{2g^2}{S^4} \frac{\partial^2 \Phi_1^0}{\partial z^2} + \dots$$

где 
$$\bar{\Phi}_1^0 = \frac{q(z_1, t)}{4\pi} \frac{\exp(iR_0^*)}{R_0^*}, \quad R_0^* = \sqrt{(z_1 + z)^2 + r^2}$$

Начиная с некоторого момента времени, можно полагать  $t/\sqrt{x} \gg 1$ , отсюда  $xS^2 \ll 1$ , то есть время  $t$  значительно больше периода свободных пульсаций пузырька и

$$\begin{aligned} \exp(iR_0^*) &= \exp\left(-S \frac{R_0^*}{a}\right) \exp\left(-xS^2 \frac{R_0^*}{a}\right) \approx \\ &\approx \left(1 - xS^2 \frac{R_0^*}{a}\right) \exp\left(-S \frac{R_0^*}{a}\right) \end{aligned}$$

Значит

$$\bar{\Phi}_1^0 = \frac{q(z_1, t)}{4\pi R_0^*} \left(1 - xS^2 \frac{R_0^*}{a}\right) \exp\left(-S \frac{R_0^*}{a}\right)$$

Отсюда, после обратного преобразования, получим

$$\Phi_1^0 = \frac{\beta^2 v_0^2}{2R_0^*} \mu_0 + \frac{\beta^2 v_0^2}{2a} \cos \sqrt{\frac{1}{x}} \mu_0$$

где

$$\mu_0 = t - \frac{z_1}{v_0} - \frac{R_0^*}{a}$$

Из (1.16) следует

$$\varphi_0^0 = -\frac{\beta^2 v_0^2}{2R_0^*} \mu^0 - \frac{\beta^2 v_0^2}{2a} \cos \sqrt{\frac{1}{x}} \mu^0 \quad (1.21)$$

где

$$\mu^0 = t - \frac{z_1}{v_0} - \frac{R_0^*}{a}$$

Для нахождения  $\varphi_1^0$  используем теорему о свертке. Имеем в виду (1.12) и обозначая  $\nu = 1/\sqrt{x}$ , найдем

$$\begin{aligned} \varphi^0 &= -\frac{\beta^2 v_0^2}{2R_0^*} \mu^0 - \frac{\beta^2 v_0^2}{2a} \cos(\nu \mu^0) + \frac{\beta^2 v_0^2}{2R_0^*} \mu_0 + \frac{\beta^2 v_0^2}{2a} \cos(\nu \mu_0) + \\ &+ \beta^2 v_0^2 g \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_0^*}\right) \left| \frac{1}{2} \mu_0^2 \left(t - \frac{z_1}{v_0}\right) - \frac{1}{3} \mu_0^3 \right| + \frac{\beta^2 v_0^2 g x}{a} \frac{\partial}{\partial z} [1 - \cos(\nu \mu_0)] \end{aligned} \quad (1.22)$$

Из (1.15) для  $\partial \tau / \partial t$  получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = & - \int_0^a \frac{\beta^2 v_0^2}{2R^*} dz_1 + \int_0^a \frac{\beta^2 v_0^2 \gamma}{2a} \sin(\gamma \mu) dz_1 + \int_0^1 \frac{\beta^2 v_0^2}{2R_0^*} dz_1 - \\ & - \frac{\beta^2 v_0^2 \gamma}{2a} \int_0^1 \sin(\gamma \mu_0) dz_1 + \frac{\beta^2 v_0^2 g}{2} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R_0^*} \right) \left[ \left( t - \frac{z_1}{v_0} \right)^2 - \right. \\ & \left. - \left( \frac{R_0^*}{a} \right)^2 \right] dz_1 + \frac{\beta^2 v_0^2 g}{a v} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z} \sin(\gamma \mu_0) dz_1 \end{aligned} \quad (1.23)$$

где  $a$  и  $\gamma$  — пределы интегрирования, даваемые соотношениями [3] для сжимаемой жидкости для дозвукового проникания

$$a = v_0 \frac{at + z}{a + v_0}, \quad \gamma = v_0 \frac{at - z}{a + v_0}$$

Из (1.23), обозначая  $q = a(v_0 t + z)/z(a + v_0)$ , получим на конусе

$$r = \beta(v_0 t - z)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = & - \frac{\beta^2 v_0^2}{2} \ln \frac{4az}{\beta^2 (a + v_0)(v_0 t - z)} + \frac{\beta^2 v_0^2}{2} \ln q + \\ & + \frac{\beta^2 v_0^2}{2(a + v_0)} \left[ \cos 2\gamma \left( t + \frac{z}{a} \right) - \cos \gamma \left( t + \frac{z}{a} \right) - \cos 2\gamma \left( t - \frac{z}{a} \right) + \right. \\ & \left. + \cos \gamma \left( t - \frac{z}{a} \right) \right] + \frac{\beta^2 v_0^2 g}{2} \left[ - \frac{2t}{v_0} \ln q - \frac{(t - z/a)^2}{\sqrt{z^2 + \beta^2 (v_0 t - z)^2}} + \right. \\ & \left. + \frac{t}{a} \ln q^2 - \frac{2(at - z)}{v_0(a + v_0)} + \frac{2z}{v_0^2} \ln q - \frac{4(at - z)}{a(a + v_0)} - \frac{2v_0(at - z)}{a^2(a + v_0)} + \right. \\ & \left. + \frac{2z}{av_0} \ln q \right] + \frac{\beta^2 v_0^2 g}{a v} \left[ \sin 2\gamma \left( t - \frac{z}{a} \right) - \sin \gamma \left( t - \frac{z}{a} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.24)$$

Давление внутри жидкости найдется по формуле

$$\frac{p}{\rho_0} = - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + gz - \frac{\beta^2 v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0}$$

Сила сопротивления через давление  $P = p - p_0$  выражается по формуле

$$Q = \int_0^{v_0 t} P 2\pi \rho_0^2 (v_0 t - z) dz = -2\pi \rho_0^2 \int_0^{v_0 t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} - gz + \frac{\beta^2 v_0^2}{2} \right) (v_0 t - z) dz \quad (1.25)$$

Соотношения (1.24) и (1.25) дают

$$Q = -2\pi \rho_0^2 \beta^4 v_0^4 t^2 \left\{ \frac{1 + \ln 4\beta^2}{4} + \frac{\gamma}{4} \left[ (M + 2) \ln \frac{16}{1 + M} + \frac{8}{3} - 2 \ln \frac{2}{\beta} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{3}(1+M) \ln \frac{2}{1+M} - \frac{5}{3}(2+M) \ln 2 + \frac{M^2 + 4M^3 - 3M - 6}{3(1+M)} - \\
& - \frac{2}{3\beta^2} \left| + \frac{1}{2\beta^2(1+M)} \left[ 2M\psi \sin \psi - M\psi \sin 2\psi - \frac{1}{4} \cos 2\psi (1+M) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \cos \psi (1+M) + \frac{1}{4} \cos 2\psi (1-M) - \cos \psi (1-M) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\gamma}{M\beta^2} \left[ \frac{1}{4} \sin 2\psi - \frac{M\psi}{2} \cos 2\psi - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{4} \sin 2\psi (1-M) + M\psi \cos \psi + \sin \psi (1-M) - \sin \psi \right] \right| \quad (1.26)
\end{aligned}$$

где

$$M = \frac{v_0}{a}, \quad \gamma = \frac{g t^2}{v_0}, \quad \psi = \frac{t}{\sqrt{x}}$$

Подставляя в (1.26)  $M = 0$ , получим силу сопротивления для несжимаемой жидкости

$$Q = -2\pi\rho_0\beta^2 v_0^4 t^2 \left[ \frac{1 + \ln 4\beta^2}{4} - \frac{\gamma}{2} \left( \ln \frac{2}{\beta} - \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3\beta^2} \right) \right]$$

§ 2. Рассмотрим проникание со сверхзвуковой скоростью. Для  $z < v_0 t$  давление можно вычислить по той же формуле, что и для дозвукового проникания. Для  $at < z < v_0 t$  в связи с тем, что свободная поверхность не влияет на этот участок, пренебрегаем слагаемыми, содержащими  $g$ , и предполагаем, что также можно пренебречь  $\gamma$ . На этом участке давление на теле вычисляется по формуле

$$p = \frac{1}{2} \rho_0 v_0^2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dz_1}{V(z_1 - z)^2 + r^2} = \frac{1}{2} \rho_0 v_0^2 \ln \frac{4}{\beta^2(M^2 - 1)}$$

где [3]

$$\xi_1 = v_0 \frac{z - at}{v_0 - a}, \quad \xi_2 = v_0 \frac{at + z}{v_0 + a}$$

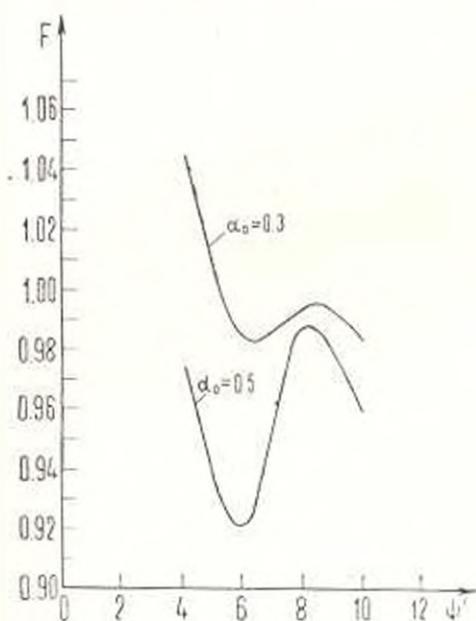
Для силы сопротивления будем иметь

$$\begin{aligned}
Q &= -2\pi\rho_0\beta^2 \left\{ \int_0^{at} (v_0 t - z) \frac{\partial p}{\partial t} dz - \int_{at}^{v_0 t} \frac{\beta^2 v_0^2}{2} (v_0 t - z) \ln \frac{4}{\beta^2(M^2 - 1)} dz - \right. \\
& \quad \left. - \frac{g v_0^2 t^2}{6} + \frac{v_0^2 t^2 \beta^2}{4} \right\} = -2\pi\rho_0\beta^2 v_0^4 t^2 \left\{ \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln \frac{2}{\beta} + \frac{1}{2} \ln \frac{(1+M)^2}{M} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\gamma}{2} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3\beta^2} - \frac{M}{6} \right) + \frac{1}{2M\beta^2(1+M)} \left( \frac{M\psi}{2} \sin 4\psi - \frac{\psi}{2} \sin 4\psi - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 2M\psi \sin 2\psi - \frac{1}{4} \cos 4\psi + \cos 2\psi + \psi \sin 2\psi + \\
 & + 2M\psi \sin \psi - \frac{3}{4} \Big) + \frac{\eta}{M\psi^2} \left[ -\frac{\psi}{2} (M-1) - \frac{M\psi}{2} \cos 2\psi + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{4} \sin 2\psi + M\psi \cos \psi - \sin \psi \right]
 \end{aligned}$$

При  $M = 1$

$$\begin{aligned}
 Q = & - 2\pi\rho_0\beta^2 v_0^2 \left\{ \frac{1 + \ln 4\psi^2}{4} + \frac{\eta}{2} \left( \ln 2\psi + 1 - \frac{1}{3\psi^2} \right) + \right. \\
 & + \frac{1}{4\psi^2} \left( 2\psi \sin \psi + \cos 2\psi - \psi \sin 2\psi - \frac{1}{4} \cos 4\psi - \frac{3}{4} \right) + \\
 & \left. + \frac{\eta}{\psi^2} \left( \frac{1}{4} \sin 2\psi - \frac{\psi}{2} \cos 2\psi + \psi \cos \psi - \sin \psi \right) \right\}
 \end{aligned}$$



Фиг. 2.

На фиг. 2 для разных  $\alpha_0$  и для  $M = 1$  приведены графики зависимости  $F(\psi')$ , где  $\psi' = t/\sqrt{x'}$ ,  $x' = x/(1 - \alpha_0)$ ,  $\psi = \psi'/\sqrt{1 - \alpha_0}$ . Из фиг. 2 следует, что с увеличением  $\alpha_0$  безразмерная сила сопротивления

$F' = \frac{Q}{2\pi\rho_0\beta^2 v_0^2}$  уменьшается. Как видно из фиг. 2, для больших  $\psi'$

имеет место колебательное изменение силы от времени проникания.

Автор выражает глубокую благодарность А. Г. Багдоеву за помощь и обсуждение работы.

ԲԱՐԱԿ ԿՈՆԻ ԹԱՓԱՆՑՈՒՄԸ ԿՇՈՒՌ ՈՒՆԵՑՈՂ  
ՊՂՊՋԱԿԱՍՎՈՐ ՀԵՂՈՒԻԻ ՄԵՋ

Ա. Գ. ԱՎԱԳՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Գրառակվում է բարակ կոնի թափանցման խնդիրը կշիռ ունեցող պղպղակավոր հեղուկի մեջ: Որոշված են արագության պատկերացումը, ճնշումը հեղուկի մեջ և դիմադրության ուժը: Թերված են պիմադրության ուժի  $\gamma = t/\sqrt{x}$  պարամետրից կախվածության դրաճիկները, որտեղ  $t$ -ն ժամանակն է, պարամետր  $x$ -ն բնութագրում է պղպղակները:

PENETRATION OF A THIN CONE IN PONDERABLE FLUID  
WITH BUBBLES

S. G. AVAGIAN

S u m m a r y

The problem of penetration of a thin cone in ponderable fluid with bubbles is considered. The velocity potential, pressure in fluid and resistance force are determined.

The graphs of resistance force are given depending on the parameter  $\gamma = t/\sqrt{x}$ , where  $t$  is time while parameter  $x$  characterises the bubbles.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдас А. Г., Оганян Г. Г. Распространение модулированных нелинейных волн в релаксирующей газожидкостной смеси. Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 1.
2. Ван Вейларден А. Некоторые проблемы составления уравнений для газожидкостных течений. Тр. XIV Международного конгресса. М.: Мир, 1979.
3. Сагомонян А. Я. Проникание. Изд-во Моск. ун-та, 1974.
4. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М.: Изд-во Наука, 1965.
5. Ван Вейларден А. Одномерное течение жидкостей с пузырьками газа. Реология суспензий. М.: Мир, 1975.

Институт механики  
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию  
20. X. 1981