ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXV, № 6, 1982 Механика

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

АЛПАИДЗЕ З. Г., ОГАНЕСЯН Э. К., ПОГОСЯН М. З., ТОНОЯН В. С.

В работе рассматривается несимметричная деформация двухслойного в радиальном направлении полого цилиндра конечной длины, когда один торец цилиндра полностью закреплен, боковые поверхности и другой торец цилиндра свободны от напряжений и цилиндр деформируется только под действием собственного веса, действующего перпендикулярно к оси цилиндра.

Для исследования напряженно-деформированного состояния этого цилиндра используется метод конечных элементов с кольцевыми элементами треугольного сечения.

О возможности применения кольцевых элементов треугольного сечения для исследования деформации тел вращения, находящихся под действием несимметричной нагрузки, отмечается в работе Вильсона [1]. В этой работе методом конечных элементов численные результаты получены только для нескольких осесимметричных задач.

Теория и техника применения метода конечных элементов для решения различных задач механики деформируемой среды дается в работах [2—9].

Решению пространственных задач теории упругости методом конечных элементов посвящены также работы [10—11] и другие.

1. *Постановка задачи и основные уравнения.* Допускается, что при несимметричной деформации тела вращения деформации остаются симметричными относительно некоторой плоскости, проходящей через ось вращения. Тогда перемещения и напряжения могут быть представлены в виде рядов Фурье и в цилиндрической системе координат (r, z, θ) будем иметь

$$u_r(r, z, \theta) = \sum_n u^{(n)}(r, z)\cos n\theta$$

$$u_z(r, z, \theta) = \sum_n v^{(n)}(r, z)\cos n\theta \qquad (1.1)$$

$$u_\theta(r, z, \theta) = \sum_n w^{(n)}(r, z)\sin n\theta$$

$$\sigma_r(r, z, \theta) = \sum_n \sigma_r^{(n)}(r, z)\cos n\theta$$

$$\sigma_z(r, z, \theta) = \sum_n \sigma_z^{(n)}(r, z)\cos n\theta \qquad (1.2)$$

$$\sigma_\theta(r, z, \theta) = \sum_n \sigma_\theta^{(n)}(r, z)\cos n\theta$$

$$\tau_{rz}(r, z, \theta) = \sum_n \tau_{rz}^{(n)}(r, z)\cos n\theta$$

$$\tau_{r\theta}(r, z, \theta) = \sum_n \tau_{r\theta}^{(n)}(r, z)\sin n\theta \qquad (1.3)$$

$$\tau_{z\theta}(r, z, \theta) = \sum_n \tau_{z\theta}^{(n)}(r, z)\sin n\theta$$

Отметим, что для рассмотрения задачи об изгибе слоистого полого цилиндра конечной длины под действием только собственного веса, достаточно пользоваться в выражениях (1.1)—(1.3) только первыми гармониками.

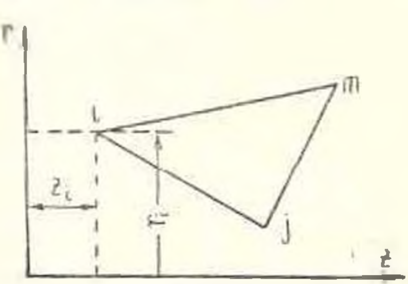
Для применения метода конечных элементов коэффициенты разложений n-ой гармоники для перемещений представляются в виде

$$u^{(n)}(r, z) = \sum_s N_s^{(n)} u_s$$

$$v^{(n)}(r, z) = \sum_s N_s^{(n)} v_s \qquad (1.4)$$

$$w^{(n)}(r, z) = \sum_s N_s^{(n)} w_s$$

где $N_s^{(n)}$ — функции формы сечения кольцевого элемента $(s = i, j, m)$ с треугольным сечением (фиг. 1)



Фиг. 1

$$N_i^{(n)} = \frac{a_i + b_i z + c_i r}{2\Delta} \qquad (1.5)$$

$N_j^{(n)}$ и $N_m^{(n)}$ определяются аналогичными выражениями.

В (1.5) a_i, b_i и c_i имеют следующие значения:

$$a_i = z_j r_m - z_m r_j$$

$$b_i = r_j - r_m \qquad (1.6)$$

$$c_i = z_m - z_j$$

$$2\Delta = z_i(r_j - r_m) + z_j(r_m - r_i) + z_m(r_i - r_j) = z_i b_i + z_j b_j + z_m b_m \qquad (1.7)$$

коэффициенты a_j, b_j, c_j и a_m, b_m, c_m определяются по выражениям (1.6) с заменой индексов в циклическом порядке.

Используя обозначения

$[N]=[N_i,\ N_j,\ N_m]$ — функция формы,

$\{\delta_i\}=\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}$ — смещения узловой точки i-го треугольного элемента,

$\{\delta\}^e=\begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix}^e$ — вектор перемещения треугольного элемента с номером e и узловыми точками $i,\ j,\ m$,

$\{f^{(n)}\}^e=\begin{Bmatrix} u^{(n)} \\ v^{(n)} \\ w^{(n)} \end{Bmatrix}^e$ — вектор перемещения произвольной точки элемента e,

будем вместо (1.4) иметь формулу

$$\{f^{(n)}\}^e=[N^{(n)}]^e\{\delta^{(n)}\}^e \tag{1.8}$$

Деформации в цилиндрической системе координат $(r,\ z,\ \theta)$ определяются соотношениями

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{z\theta} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \\ \dfrac{u_r}{r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial u_r}{\partial z}+\dfrac{\partial u_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}+\dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}-\dfrac{u_\theta}{r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial \theta}+\dfrac{\partial u_\theta}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{1.9}$$

Используя матричную форму записи и введя обозначения

$[B]=[B_i^{(n)},\ B_j^{(n)},\ B_m^{(n)}]$ — матрица деформаций

где

$$[B_i^{(n)}] = \begin{vmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r}\cos n\theta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z}\cos n\theta & 0 \\ \frac{N_i}{r}\cos n\theta & 0 & \frac{nN_i}{r}\cos n\theta \\ \frac{\partial N_i}{\partial z}\cos n\theta & \frac{\partial N_i}{\partial r}\cos n\theta & 0 \\ -\frac{nN_i}{r}\sin n\theta & 0 & \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} - \frac{N_i}{r}\right)\sin n\theta \\ 0 & -\frac{nN_i}{r}\sin n\theta & \frac{\partial N_i}{\partial z}\sin n\theta \end{vmatrix} \tag{1.10}$$

$[B_j^{(n)}]$ и $[B_m^{(n)}]$ записываются аналогично, для деформаций элемента „e“ будем иметь

$$\{\varepsilon\}^e = [B]^e\{\delta\}^e \tag{1.11}$$

Далее напряжения будут определены по формуле

$$\{\sigma\}^e = [D][B]\{\delta\}^e \tag{1.12}$$

где

$[D]$ — матрица упругости материала

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

Уравнения равновесия узловых окружностей приводятся к виду

$$[K''][\delta^{(1)}] + [F_p^{(1)}] = 0 \tag{1.14}$$

где $[K'']$ — матрица жесткости общей системы для первой гармоники,

$\{F_e^{(2)}\}$ — узловые силы от собственного веса,

$$[K^e]' = \begin{bmatrix} K_{ii}^{*} & K_{ij}^{**} & K_{im}^{**} \\ K_{ji}^{*} & K_{jj}^{*} & K_{jm}^{**} \\ K_{mi}^{*} & K_{mj}^{*} & K_{mm}^{**} \end{bmatrix} \text{— матрица жесткости треугольного элемента,} \tag{1.15}$$

где

$$[K_{ij}^{*}]^e = \pi \iint_{\Delta} \{[\bar{B}_i^{(1)}]^T [D][\bar{B}_j^{(1)}] + [\bar{\bar{B}}_i^{(1)}]^T [D][\bar{\bar{B}}_j^{(1)}]\}\, r\,dr\,dz \tag{1.16}$$

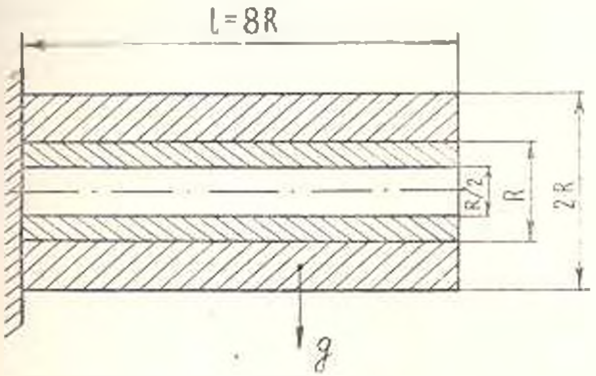
Здесь использовано обозначение

$$[B_i^{(1)}] = [\bar{B}_i^{(1)}] \sin\theta + [\bar{\bar{B}}_i^{(1)}] \cos\theta$$

$[B]^T$ — транспонированная матрица.

Значения интегралов типа (1.16) для матрицы (1.15) найдены численным интегрированием.

2. *Численный пример.* В качестве численного примера рассмотрена несимметричная деформация двухслойного полого цилиндра конечной длины (фиг. 2), который изгибается только под действием собственного веса.



Фиг. 2

Геометрические параметры даются на фиг. 2, а физико-механические параметры составных материалов приводятся в табл. 1.

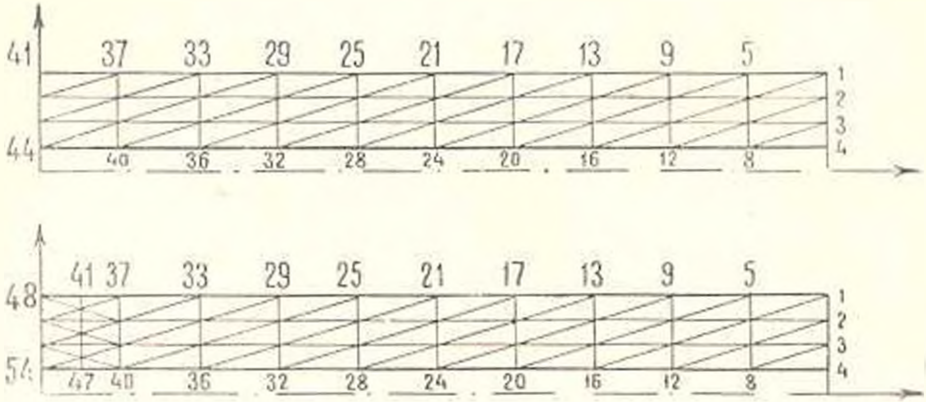
Таблица 1

Слой	Материал	Модуль упругости E кг/см²	ν	Удельный вес γ кг/см³
I	сталь	$2\cdot10^6$	0,3	$7{,}8\cdot10^{-3}$
II	стекло	$0{,}7\cdot10^6$	0,22	$2{,}48\cdot10^{-3}$

Схема разбиения осевого сечения двухслойного полого цилиндра конечной длины на треугольные элементы показана на фиг. 3, при этом разбиение представлено в двух вариантах.

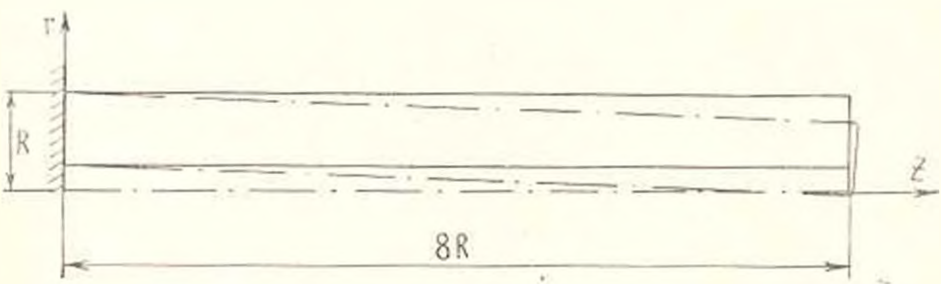
В одном варианте осевое сечение полого цилиндра содержит 60 треугольных элементов с 44 узловыми точками. Во втором варианте сечение содержит 75 треугольных элементов с 54 узловыми точками.

При помощи ЭВМ определены смещения точек осевого сечения цилиндра и компоненты напряжения.



Фиг. 3

Искривление осевого сечения при $\varphi = 0$ показано на фиг. 4. Следует отметить, что вычисления по двум различным вариантам разбиения отличаются незначительно.



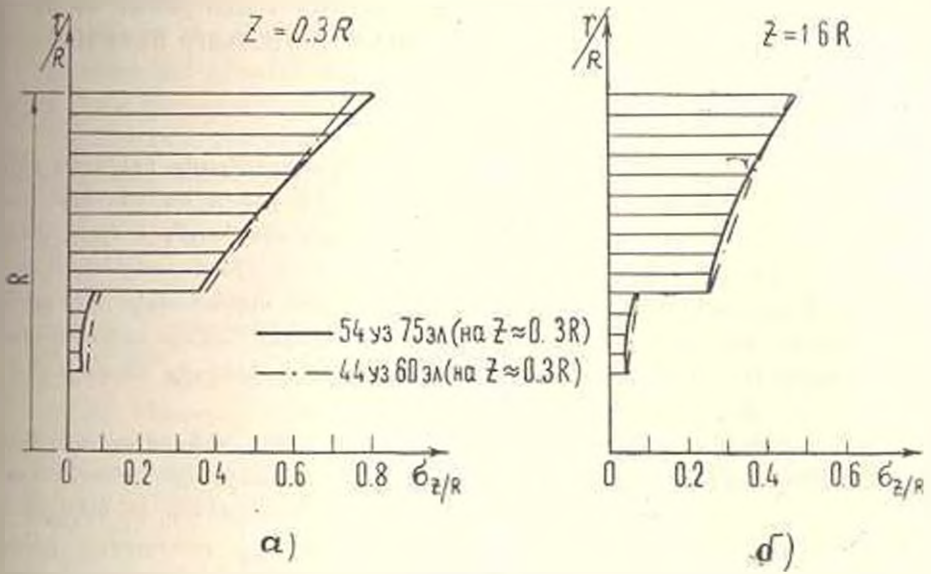
Фиг. 4

Вычисления показывают также, что деформации поперечных сечений деформируемого только под действием собственного веса полого цилиндра конечной длины (фиг. 2) незначительны и формы этих сечений почти не отличаются от двуслойного кругового кольца.

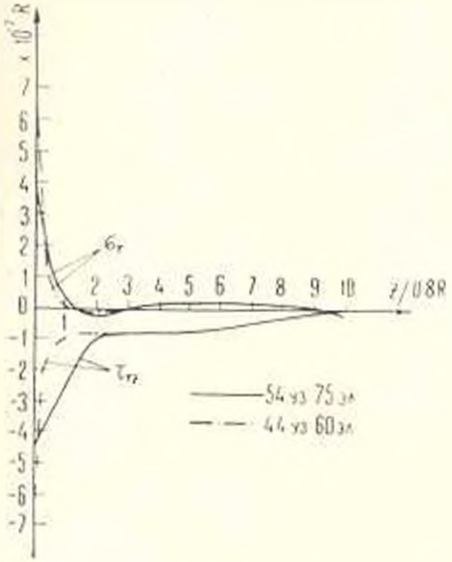
Распределение напряжений σ_z на двух участках $z = z_1$ и $z = 1{,}6R$ осевого сечения при $\varphi = 0$ приводится на фиг. 5. В первом варианте $z = z_1 \approx 0{,}3\ R$, а во втором варианте $z = z_1 \approx 0{,}14\ R$.

Характер распределения нормальных напряжений σ_z по другим участкам $z = \mathrm{const} > 2R$ осевого сечения остается таким же, как указывается на фиг. 5, однако интенсивность распределения этих напряжений по мере увеличения расстояния от закрепленного основания уменьшается.

При $z > 2R$ вычисления, произведенные по двум вариантам разбиения, друг от друга почти не отличаются.



Фиг. 5



Фиг. 6

Наконец, на фиг. 6 для двух вариантов разбиения осевого сечения приводятся распределения нормальных напряжений σ_r и касательных напряжений τ_{rz} на контактной поверхности составных материалов полого цилиндра при $\varphi = 0$.

Զ. Գ. ԱԼՓԱԻՁԵ, Է. Կ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ,
Մ. Զ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ, Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՄԲ ԵՐԿՇԵՐՏ ՍՆԱՄԵՋ ԳԼԱՆԻ ՀԱՄԱՐ ՄԻ ՈՉ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԷԼԵՄԵՆՏՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում դիտարկված է շառավղային ուղղությամբ երկշերտ, վերջավոր երկարությամբ սնամեջ գլանի ոչ սիմետրիկ դեֆորմացիան, երբ գլանի մի հիմքը լրիվ ամրակցված է, իսկ կողմնային մակերևույթը և մյուս հիմքը ազատ են լարումներից: Գլանը դեֆորմացվում է միայն սեփական կշռի ազդեցության տակ, որն ազդում է գլանի առանցքին ուղղահայաց: Այդ գլանի լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակը ուսումնասիրելու համար օգտագործված է վերջավոր էլեմենտների մեթոդը, երբ էլեմենտները իրենցից ներկայացնում են եռանկյան կտրվածքով օղակաձև էլեմենտներ:

Ենթադրվում է, որ պտտման մարմնի ոչ սիմետրիկ դեֆորմացիայի դեպքում, դեֆորմացիան մնում է սիմետրիկ որևէ առանցքային հարթության նկատմամբ: Այդ պատճառով տեղափոխումները և լարումները ներկայացվում են Ֆուրյեի սինուս կամ կոսինուս շարքերով: Նշենք որ դիտարկված խնդրի դեպքում վերջնական հավասարումների համախումբը անհրաժեշտ է լուծել միայն առաջին հարմոնիկի համար: Կատարված է թվային հաշվարկ կոնկրետ նյութերի համար և առանցքային հատույթի վերջավոր էլեմենտների տրոհման երկու տարբերակների դեպքում: Երկու տարբերակների համար էլ կառուցված են լարումների և տեղափոխումների համար գրաֆիկներ:

SOLUTION OF A NON-SYMMETRIC PROBLEM FOR A DOUBLE-LAYERED HOLLOW CYLINDER OF FINITE LENGTH BY THE METHOD OF FINITE ELEMENTS

Z. G. ALPAIDZE, E. K. OGANESSIAN, M. Z. POGOSSIAN, V. S. TONOYAN

S u m m a r y

In this paper the authors have considered the non-symmetric deformation of a double-layered hollow cylinder of finite length in the radial direction, when one end of the cylinder is fully fixed, the side surfaces and the other end of the cylinder are free of stress and the cylinder is deformed only under the action of its own weight, acting perpendicularly to the axis of the cylinder.

In order to investigate the stress deformed state of this cylinder, the method of finite elements with circular elements of triangular section is used.

It is assumed that in non-symmetric deformation of the body rotation, the deformations remain symmetric in relation to any plane which passes through the axis of the rotation. Then the displacements

and the stresses may be represented in the form of Fourie's sine or cosine rows.

In the considered problems the equations of the assemblies are solved only for the first harmony.

A numerical calculation for concrete materials and for two versions of the finite elements division of the axial section is reduced.

For the two versions of the division, corresponding diagrams for the stress and the displacement are constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вильсон (E. L. Wilson)*. Расчет на прочность осесимметричных тел.—Ракетная техника и космонавтика (AIAA Journal) 1965, т. 3, № 12 (русский перевод), с. 124—131.
2. *Розин Л. А.* Метод конечных элементов. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ, «Энергия», Ленинградское отделение, 1971, 214 с.
3. *Зенкевич О., Чанг И.* Метод конечных элементов в теории сооружений и механике сплошных сред. М.: Недра (перевод с английского) 1974, 238 с.
4. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. Перевод с английского. М.: Мир, 1975, 541 с.
5. *Постнов В. А., Хархурин И. Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974, 344 с.
6. *Розин Л. А.* Метод конечных элементов в применении к упругим системам. М.: Стройиздат, 1977, 128 с.
7. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. М.: перевод с английского, Мир, 1977, 349 с.
8. *Морозов Е. М., Никишков Г. П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. М.: Наука, 1980, 254 с.
9. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: перевод с английского, Мир, 1980, 512 с.
10. *Solecki J. S., Swedlow J. L.* Elastic stress analysis of constrained cylinders by a special finite element method.—Intern. Journ. Solids and Struct. 1980, vol. 16, No. 11, 959—968.
11. *Blackburn W. S., Hellen T. K.* Determination of stress intensity factors for Battele Benchmark geometries.—Int. J. of Fracture, 1980, vol. 16, No. 5, 411—429.

Московский институт теплотехники
Институт механики АН Арм. ССР

Поступила в редакцию
8. IX. 1981