ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXV, № 6, 1982 Механика

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СЛОИСТЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ

МАЙБОРОДА В. П., ТРОЯНОВСКИЙ И. Е.

В [1] динамические задачи для слоистых, в том числе и вязкоупругих, конструкций ставятся и решаются в рамках теории многослойных оболочек. В настоящей работе задачи динамической устойчивости слоистых вязкоупругих конструкций ставятся и решаются с привлечением трехмерных уравнений движения линейной теории вязкоупругости.

1. Рассматривается составное тело, занимающее объем $V=\sum\limits_{n=1}^{N} V_n$, ограниченный поверхностью $\Sigma=\Sigma_u+\Sigma_p$. Каждый из N объемов V_n заполнен вязкоупругой средой, свойства которой зависят от номера n. На тело действуют массовые силы

$$f_i=f_{i0}(x)+q_{ij}(x)\,u_j+h_{ij}(x)\frac{\partial u_j}{\partial t}$$

на части Σ_u поверхности заданы нулевые смещения, на Σ_p — поверхностные силы

$$p_i=p_{i0}(x)+q_{ij}(x)\,u_j+r_{ij}(x)\frac{\partial u_j}{\partial t}$$

Здесь $i,j=1,2,3$, f_{0i}, q_{ij}, h_{ij}, p_{0i}, q_{ij}, r_{ij} — заданные функции радиуса-вектора $x=(x_1, x_2, x_3)$. На границах раздела непрерывны перемещения и нормальные и касательные к поверхности раздела напряжения. Подлежат определению частоты и показатели демпфирования малых колебаний системы около положения равновесия.

Физические свойства n-го тела описываются соотношениями [2]

$$\sigma_{ij}=\bar{\lambda}_n\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+2\bar{\mu}_n\varepsilon_{ij} \tag{1.1}$$

$$i,\ j,\ k=1,2,3,\quad n=1,\ldots,N$$

где σ_{ij}, ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и деформаций, $\bar{\lambda}_n$, $\bar{\mu}_n$ — операторы Вольтерра,

$$\bar{\lambda}_n \varphi = \lambda_n \left[\varphi(t) - \int_0^t R_{\lambda n}(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \right]$$
$$\bar{\mu}_n \varphi = \mu_n \left[\varphi(t) - \int_0^t R_{\mu n}(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \right] \qquad (1.2)$$

λ_n, μ_n, $R_{\lambda n}$, $R_{\mu n}$ — параметры Ламе и ядра релаксации среды, занимающий объем V_n, φ — произвольная функция времени. Предполагается малость интегральных членов в (1.2).

Пусть функция φ в (1.2) имеет вид

$$\varphi(t) = \psi(t)\, e^{-i\omega_R t}$$

где ω_R — действительная константа, ψ — медленно меняющаяся функция времени, i — мнимая единица. С помощью метода замораживания [3] вместо (1.2) можно записать приближенные соотношения

$$\lambda_n \varphi \simeq \bar{\lambda}_n \varphi = \lambda_n [1 - \Gamma^c_{\lambda n}(\omega_R) - i\Gamma^s_{\lambda n}(\omega_R)]\,\varphi$$

$$\Gamma^c_{\lambda n}(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\lambda n}(\tau)\cos\omega_R\tau\,d\tau, \qquad \Gamma^s_{\lambda n}(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\lambda n}(\tau)\sin\omega_R\tau\,d\tau$$

второе из соотношений (1.2) преобразуется аналогично.

Постановка математической задачи о малых колебаниях системы около положения равновесия существенно зависит от наличия свободных членов f_{i0}, p_{i0} в выражениях для массовых и поверхностных сил. Если эти величины равны нулю, то положение равновесия достигается при нулевых перемещениях и напряжениях. В этом случае искомые перемещения u_i задачи о собственных колебаниях должны удовлетворять уравнениям движения

$$\bar{x} \in V_n: \quad \bar{\mu}_n \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\bar{\lambda}_n + \bar{\mu}_n)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} - \rho_n \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + q_{ij} u_j + k_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t} = 0 \quad (1.3)$$

и граничным условиям

$$\bar{x} \in \Sigma_u: \quad u_i = 0$$
$$\bar{x} \in \Sigma_p: \quad \left[\bar{\lambda}_n \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \bar{\mu}_n\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] \nu_j - q_{ij} u_j - r_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t} = 0 \qquad (1.4)$$

$$i, j, k = 1, 2, 3; \; n = 1, \ldots, N;$$

кроме того, перемещения u_i должны иметь вид

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = \vartheta_i(x_1, x_2, x_3)\, e^{-i\omega t} \qquad (1.5)$$

Здесь ν_j — компоненты нормали к поверхности, $\omega = \omega_R + i\omega_I$ — искомая комплексная собственная частота, ϑ_i — искомая комплексная собственная форма колебаний, ρ_n — плотность материала n-го тела. Физически ω_R представляет собой частоту, ω_I — коэффициент демпфирования собственных колебаний.

Подстановка (1.5) в (1.3), (1.4) приводит к однородной краевой задаче вида

$$\vec{x} \in V_n: \quad \bar{\mu}_n(\omega_R)\frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial x_j \partial x_j} + [\bar{\lambda}_n(\omega_R) + \bar{\mu}_n(\omega_R)]\frac{\partial^2 \vartheta_j}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$+ \rho_n \omega^2 \vartheta_i + q_{ij}\vartheta_j - i\omega h_{ij}\vartheta_j = 0$$

$$\vec{x} \in \Sigma_n: \quad \vartheta_i = 0 \tag{1.6}$$

$$\vec{x} \in \Sigma_n: \quad \left[\bar{\lambda}_n(\omega_R)\frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \bar{\mu}_n(\omega_R)\left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \vartheta_j}{\partial x_i}\right)\right]\nu_j - q_{ij}\vartheta_j + i\omega r_{ij}\vartheta_j = 0$$

Это — задача о собственных значениях с нелинейно входящим комплексным параметром.

В случае, когда некоторые из функций f_{i0}, p_{i0} отличны от нуля, положение равновесия не совпадает с начальным состоянием системы. В этом случае к постановке задачи устойчивости необходимо привлекать соотношения геометрически нелинейной теории вязкоупругости. Такое обобщение связано с принципиальными трудностями: физические соотношения вязкоупругости при конечных деформациях исследованы в настоящее время недостаточно. Поэтому в настоящей работе мы ограничимся постановкой и решением частной задачи динамической устойчивости. А именно, предполагается несжимаемость всех элементов системы. Кроме того, предполагается, что в положении равновесия равны нулю все компоненты вектора перемещений и, следовательно, девиаторов напряжений и деформаций, а отлично от нуля лишь среднее нормальное напряжение. Тогда при рассмотрении малых колебаний около положения равновесия можно использовать соотношения линейной теории; необходимо учесть лишь, что метрики деформированной и недеформированной систем не совпадают.

Задача о малых колебаниях системы ставится так:

$$\vec{x} \in V_n: \quad \bar{\mu}_n \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} + q_{ij}u_j + h_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t} - \rho_n \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\vec{x} \in \Sigma_n: \quad u_i = 0 \tag{1.7}$$

$$\vec{x} \in \Sigma_n: \quad \left[\sigma\delta_{ij} + \bar{\mu}_n\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]\nu_j - g_{ij}u_j - r_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t} +$$

$$+ \frac{\partial \sigma_0}{\partial x_j}u_j\nu_i - \sigma_0\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \nu_i\nu_k\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\nu_j = 0$$

Здесь σ_0 — среднее напряжение в положении равновесия, σ — его отклонение при колебаниях. Задача (1.7) записана в эйлеровой системе координат. Подчеркнутые члены, отличающие задачу (1.7) от (1.3), (1.4), появились вследствие учета того обстоятельства, что границы деформированной и недеформированной систем не совпадают.

Замена (1.5) сводит задачу (1.7) к задаче о собственных значениях. Вопрос об устойчивости положения равновесия системы в зависимости от знаков мнимых частей собственных значений параметра ω. Положение равновесия устойчиво, если мнимые части всех собственных значений отрицательны, и неустойчиво, если мнимая часть одного из собственных значений положительна.

2. Рассматривается бесконечный цилиндр, состоящий из касательных слоев. Внутренняя поверхность соединена с абсолютно жестким сердечником, вращающимся с постоянной угловой скоростью Ω, внешняя поверхность свободна от нагрузок. Все слои несжимаемы, предполагается плоское деформированное состояние (осевые смещения равны нулю). Вводится цилиндрическая система координат, вращающаяся вместе с сердечником с угловой скоростью Ω.

Под действием центробежной силы инерции в положении относительного равновесия возникает напряженное состояние, рассмотренное выше: все перемещения и касательные напряжения равны нулю, нормальные напряжения в положении относительного равновесия определяются формулой

$$\sigma_{0rr} = \sigma_{0\varphi\varphi} = \sigma_{0zz} = \sigma_0 = \Omega^2 \int\limits_r^{r_N} r\rho(r)\, dr$$

где r_N — внешний радиус цилиндра, ρ — плотность, являющаяся ступенчатой функцией текущего радиуса r: $\rho = \rho_n$ при $r_{n-1} < r < r_n$, r_{n-1}, r_n — внутренний и внешний радиусы n-го слоя.

В задаче об устойчивости положения равновесия в качестве искомых функций принимаются перемещения u_r, u_φ, касательное напряжение $\sigma_{r\varphi}$ и отклонение σ_{rr} нормального радиального напряжения от равновесного значения σ_{0rr}. В учетом сил инерции Кориолиса задача устойчивости принимает вид

$$r_{n-1} < r < r_n, \quad n = 1, \ldots, N:$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = -\left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}\right)$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi}{r} + \frac{3}{\overline{E}_n}\sigma_{r\varphi}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{4\overline{E}_n}{3r}\left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}\right) + \rho_n \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - 2\rho_n \Omega \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r} = -\frac{4\bar{E}_n}{3r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial\varphi} - \frac{2}{r}\sigma_{r\varphi} +$$

$$+\rho_n\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\rho_n\Omega\frac{\partial u_r}{\partial t}$$

$$r = r_0: \quad u_r = u_\varphi = 0$$

$$r = r_N: \quad \sigma_{rr} - r_N\rho_N\Omega^2 u_r = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0$$

На окружностях $r = r_n$, $n = 1, \dots, N-1$ непрерывны u_r, u_φ, $\sigma_{rr} - 2\rho(r)\Omega^2 u_r$, $\sigma_{r\varphi}$. Здесь r_0 — внутренний радиус цилиндра, $\bar{E}_n = 3\bar{\mu}_n$. Задача (2.1) записана в эйлеровых координатах. Первое из уравнений (2.1) представляет собой уравнение несжимаемости, следующие три получены путем исключения деформаций и окружного $\sigma_{\varphi\varphi}$ и среднего σ напряжений из соотношений Коши, закона Гука и уравнений равновесия для возмущений. Подчеркнутое слагаемое в граничном условии возникло в результате переноса этого условия с деформированной на недеформированную внешнюю поверхность.

Решение задачи устойчивости ищется в виде

$$(u_r, u_\varphi, \sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}) = (\vartheta_r, i\vartheta_\varphi, \tau_{rr}, i\tau_{r\varphi})\exp(-im\varphi - i\omega t) \qquad (2.2)$$

Подстановка (2.2) в (2.1) приводит к задаче на собственные значения вида

$$r_{n-1} < r < r_n:$$

$$\frac{d\vartheta_r}{dr} = -\left(\frac{\vartheta_r}{r} + \frac{m}{r}\vartheta_\varphi\right)$$

$$\frac{d\vartheta_\varphi}{dr} = \frac{m}{r}\vartheta_r + \frac{\vartheta_\varphi}{r} + \frac{3}{\bar{E}_n}\tau_{r\varphi}$$

$$\frac{d\tau_{rr}}{dr} = -\frac{m}{r}\tau_{r\varphi} + \frac{4\bar{E}_n}{3r}\left(\frac{\vartheta_r}{r} + \frac{m}{r}\vartheta_\varphi\right) - \rho_n\omega^2\vartheta_r - 2\rho_n\omega\Omega\vartheta_\varphi$$

$$\frac{d\tau_{r\varphi}}{dr} = \frac{4\bar{E}_n m}{3r}\left(\frac{\vartheta_r}{r} + \frac{m}{r}\vartheta_\varphi\right) + \frac{m}{r}\tau_{rr} - \frac{2}{r}\tau_{r\varphi} - \rho_n\omega^2\vartheta_\varphi - 2\rho_n\omega\Omega\vartheta_r$$

$$r = r_0: \quad \vartheta_r = \vartheta_\varphi = 0$$

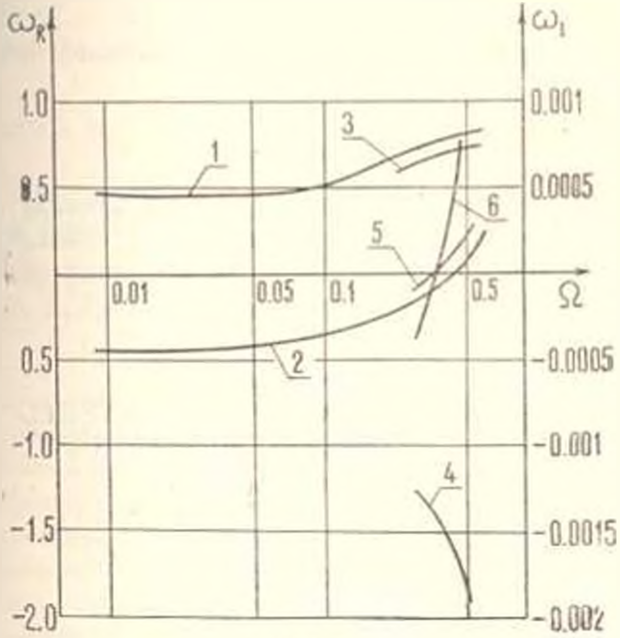
$$r = r_N: \quad \tau_{rr} - \rho_N\Omega^2 r_N\vartheta_r = 0, \quad \tau_{r\varphi} = 0$$

$r = r_n$, $n = 1, \dots, N-1$: непрерывность ϑ_r, ϑ_φ,

$$\tau_{rr} - \rho(r)\Omega^2 r\vartheta_r, \quad \tau_{r\varphi}.$$

Характеристическое уравнение задачи о собственных значениях строилось методом ортогональной прогонки [4], корни этого уравнения разыскивались с помощью метода парабол [4].

В качестве примера рассмотрена задача об устойчивости 10-слойного цилиндра (5 упругих слоев чередуются с пятью вязкоупругими слоями). Прослежена зависимость двух первых собственных частот от угловой скорости Ω. Предварительно такая зависимость построена для цилиндра, состоящего из упругих слоев. При $\Omega = 0$ собственные частоты ω_1, ^{m}, действительны, имеют равные модули и противоположные знаки.



Фиг. 1

Эволюцию указанных собственных частот описывают кривые 1, 2 на фиг. 1. С ростом угловой скорости отрицательная собственная частота убывает по модулю (кривая 2) и при $\Omega \approx 1.1\ \omega_1^-$ (ω_1^- — первая собственная частота при $\Omega = 0$) обращается в нуль, после чего становится положительной. Мнимые части собственных частот равны нулю при всех рассмотренных значениях Ω. Согласно известной теореме Ляпунова из этого факта нельзя сделать вывод об устойчивости либо о неустойчивости вращательного движения.

Кривые 3—6 на фиг. 1 описывают эволюцию комплексных собственных значений с ростом Ω неоднородного цилиндра с пятью вязкоупругими и пятью упругими слоями. Кривые построены в окрестности точки смены знака собственной частоты упругого цилиндра. Кривые, соответствующие первой собственной частоте с положительной действительной частью при $\Omega = 0$, не имеют особенностей: действительная часть остается положительной, мнимая — отрицательной во всем рассмотренном диапазоне изменения угловых скоростей (кривые 3, 4 на фиг. 1).

Действительная часть второй собственной частоты (кривая 5) меняет знак при достижении угловой скоростью критического значения, причем смена знака происходит при несколько меньшем значении Ω, чем в случае упругого цилиндра. Одновременно со сменой знака действительной части происходит смена знака мнимой части (кривая 6). Таким образом, угловая скорость, при которой происходит смена знака собственного значения, является критической в смысле потери устойчивости.

Վ. Պ. ՄԱՅԲՈՐՈԴԱ, Ի. Ե. ՏՐՈՅԱՆՈՎՍԿԻ

ՇԵՐՏԱՎՈՐ ԱՌԱՁԳԱՄԱԾՈՒՅԻՆ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔՆԵՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Շերտավոր առաձգամածուցիկ կառուցվածքների դինամիկ կայունության խնդիրը լուծվում է առաձգամածուցիկության գծային տեսության շարժման եռաչափ հավասարումների ներգրավմամբ: Որպես օրինակ դիտարկվել է 10 շերտանի անհամասեռ առաձգամածուցիկ գլանի կայունության մասին խնդիրը:

THE DYNAMIC STABILITY OF LAYERED VISCOELASTIC CONSTRUCTIONS

V. P. MAIBORODA, I. E. TROYANOVSKI

S u m m a r y

This paper formulates the problem of the dynamic stability of piecewise nonuniform viscoelastic body subjected to nonconservative forces. The problem of the dynamic stability of a rotating multilayer cylinder is solved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 373 с.
2. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
3. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений. Ташкент: ФАН, 1974. 216 с.
4. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. М.: Наука, 1975. 627 с.

Московский институт электронного машиностроения

Поступила в редакцию 20. V. 198