ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXV, № 6, 1982 Механика

К ПОСТРОЕНИЮ ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ТОНКОЙ ПЛАСТИНКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ МАГНИТОУПРУГОСТИ

САРКИСЯН С. О.

При помощи асимптотического метода интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных получены двумерные динамические уравнения колебаний пластинки как результат нулевого приближения асимптотического интегрирования трехмерных уравнений магнитоупругости для тонкой пластинки, включая также внешнюю задачу электродинамики.

Асимптотический метод построения двумерных уравнений пластин развит в работах [1—5]. Динамические двумерные уравнения колебаний тонкой пластинки получены в [6—7].

Впервые вопросу о построении двумерных уравнений колебаний проводящей пластинки в магнитном поле посвящены работы [8—10], где асимптотическому анализу подвергались электродинамические уравнения для внутренней задачи и сформулированы гипотезы магнитоупругости.

1. Рассматривается изотропная упругая пластинка конечной длины и постоянной толщины $2h$, изготовленная из материала с конечной электропроводностью и находящаяся во внешнем магнитном поле с заданным вектором напряженности

$$H_0 = (H_1,\ H_2,\ H_3) \tag{1.1}$$

Введем декартовую систему координат $(x,\ y,\ z)$ так, чтобы срединная плоскость пластинки совпала с координатной плоскостью xy.

Для простоты принимается, что магнитные и диэлектрические проницаемости пластинки равны единице.

В уравнениях Ламе с учетом массовых сил электромагнитного происхождения [8] и во внутренних уравнениях электродинамики для движущейся пластинки [8] перейдем к безразмерным величинам и выполним замену переменных [6]

$$v_x = \frac{u}{h}, \quad v_y = \frac{v}{h}, \quad v_z = \frac{w}{h} \tag{1.2}$$

$$\bar{H}_i = \frac{H_i}{\sqrt{E}}, \quad (1;\ 2;\ 3), \qquad \frac{h_x}{\sqrt{E}} = \bar{h}_x, \ (x,\ y,\ z) \tag{1.3}$$

$$\frac{c}{c_0}\,\frac{E_x}{\sqrt{E}} = \bar{E}_x, \qquad (x,\ y,\ z), \quad \frac{c}{c_0}\,\frac{h\rho}{\sqrt{E}} = \bar{\rho} \tag{1.4}$$

$$\xi = \varepsilon^{-r}\frac{x}{l}, \quad \eta = \varepsilon^{-r}\frac{y}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad \tau = \frac{t}{t_0} \tag{1.5}$$

где

$$t_0 = \varepsilon^{\omega-1}\frac{l}{c_0}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \tag{1.6}$$

Величина ω характеризует изменяемость процесса во времени, $r = p/q$ (p, q — целые числа) характеризует изменяемость по координатам, при $r = 0$ ($q = 1$, $p = 0$) изменяемость такова, что характерный размер рисунка возмущений совпадает с характерным геометрическим размером l пластинки, $\varepsilon = h/l$ — малый параметр. В дальнейшем черточки в (1.3), (1.4) опускаются. Напряженность внешнего магнитного поля представим в виде

$$H_1 = \varepsilon^{a}\sum \lambda^s H_1^{(s)}, \ (1;\,2), \quad H_3 = \varepsilon^{a-1+r}\sum \lambda^s H_3^{(s)}, \text{ где } \lambda = \varepsilon^{1/q} \tag{1.7}$$

Символ (x, y, z) или $(1;\,2;\,3)$ означает, что имеет место второе или третье соотношение, которое получается из приведенных заменой x на y и z или 1 на 2 и 3.

2. Решение системы уравнений Ламе и электродинамики для внутренней задачи [8] после перехода к новым переменным ищем в виде асимптотических рядов по малому параметру λ:

$$v_x = \varepsilon^{\varkappa+1-r}\sum \lambda^s v_x^{(s)}, \ (x, y), \quad v_z = \varepsilon^{\varkappa}\sum \lambda^s v_z^{(s)} \tag{2.1}$$

$$E_x = \varepsilon^{\varkappa_1}\sum \lambda^s E_x^{(s)}, \ (x, y), \quad E_z = \varepsilon^{\varkappa_1+1-r}\sum \lambda^s E_z^{(s)} \tag{2.2}$$

$$h_z = \varepsilon^{\varkappa_1-1+r}\sum \lambda^s h_z^{(s)}, \quad h_x = \varepsilon^{\varkappa_1}\sum \lambda^s h_x^{(s)}, \ (x, y) \tag{2.3}$$

$$\varphi = \varepsilon^{\varkappa_1+1-r}\sum \lambda^s \varphi^{(s)} \tag{2.4}$$

Значения для a, $\varkappa$, $\varkappa_1$ и ω определяются из условий, чтобы в нулевом приближении получились взаимосвязанные электромагнитоупругие уравнения и чтобы инерционные члены входили в систему уравнений нулевого приближения.

Таким образом, имеем

$$a = 1 - r, \quad \varkappa = -1 + r, \quad \varkappa_1 = 2 - 2r, \quad \omega = 2r \tag{2.5}$$

Подставляя (2.1)—(2.4) в уравнения Ламе и во внутренние уравнения электродинамики [8] и приравнивая коэффициенты при равных степенях λ в левых и правых частях каждого отдельно взятого уравнения, получаем последовательность систем уравнений для определения коэффициентов разложений (2.1)—(2.4).

Ввиду громоздкости последовательность систем уравнений не приводится.

В нулевом приближении

$$v_x^{(0)} = v_{x0}^{(0)}(\xi, \eta, \tau) - \zeta\frac{\partial v_{z0}^{(0)}}{\partial \xi}, \quad (x, y) \tag{2.6}$$

$$v_z^{(0)} = v_{z0}^{(0)}(\xi, \eta, \tau), \qquad E_z^{(0)} = E_{z0}^{(0)}(\xi, \eta, \tau), \qquad (x, y) \tag{2.7}$$

$$h_z^{(0)} = h_{z0}^{(0)}(\xi, \eta, \tau) \tag{2.8}$$

Соотношения (2.6)—(2.8) представляют собой выражения известных гипотез магнитоупругости [8].

Относительно основных величин в нулевом приближении получаются уравнения:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{3(1-\nu^2)} \Delta\Delta v_{z0}^{(0)} + \frac{\partial^2 v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau^2} = R_m \left(b_{11} + b_{22} + \frac{\partial l_{13}}{\partial\xi} + \frac{\partial l_{23}}{\partial\eta} \right) \frac{\partial v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau} + \\
+ R_m \left(b_2 + \frac{\partial l_3}{\partial\eta} \right) E_{x0}^{(0)} - R_m \left(b_1 + \frac{\partial l_3}{\partial\xi} \right) E_{y0}^{(0)} + R_m l_3 \left(\frac{\partial E_{y0}^{(0)}}{\partial\xi} - \frac{\partial E_{x0}^{(0)}}{\partial\eta} \right) - \\
- R_m \left(b_{13} + \frac{\partial l_{33}}{\partial\xi} \right) \frac{\partial v_{x0}^{(0)}}{\partial\tau} - R_m \left(b_{23} + \frac{\partial l_{33}}{\partial\eta} \right) \frac{\partial v_{y0}^{(0)}}{\partial\tau} - \\
- R_m \left(l_{13} + c_{13} - \frac{\partial N_{33}}{\partial\xi} \right) \frac{\partial^2 v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau\partial\xi} + R_m \left(l_{23} + c_{23} - \frac{\partial N_{33}}{\partial\eta} \right) \frac{\partial^2 v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau\partial\eta} - \\
- R_m l_{33} \frac{\partial\Delta v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau} + R_m l_{33} \frac{\partial^2 v_{x0}^{(0)}}{\partial\tau\partial\xi} + R_m l_{33} \frac{\partial^2 v_{y0}^{(0)}}{\partial\tau\partial\eta}
\end{gathered} \tag{2.9}$$

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\frac{\partial v_{x0}^{(0)}}{\partial\eta} - \frac{\partial v_{y0}^{(0)}}{\partial\xi} \right) + \frac{1}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial\xi} \left(\frac{\partial v_{x0}^{(0)}}{\partial\xi} + \frac{\partial v_{y0}^{(0)}}{\partial\eta} \right) - \\
- R_m b_{33} \frac{\partial v_{x0}^{(0)}}{\partial\tau} + R_m c_{33} \frac{\partial^2 v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau\partial\xi} + R_m \left(b_3 E_{y0}^{(0)} + b_{13} \frac{\partial v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau} \right) = 0, \quad (x, y)
\end{gathered} \tag{2.10}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial h_{z0}^{(0)}}{\partial\eta} - 4\pi R_m \left| E_{x0}^{(0)} - \frac{1}{2} \left(b_2 \frac{\partial v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau} - b_3 \frac{\partial v_{y0}^{(0)}}{\partial\tau} + c_3 \frac{\partial^2 v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau\partial\eta} \right) \right| = \\
= \frac{h_y^{(0)+} - h_y^{(0)-}}{2}; \quad (x, y)
\end{gathered} \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial E_{y0}^{(0)}}{\partial\xi} - \frac{\partial E_{x0}^{(0)}}{\partial\eta} = - \frac{\partial h_{z0}^{(0)}}{\partial\tau} \tag{2.12}$$

Обозначения коэффициентов взяты из [8].

Для определения остальных величин в нулевом приближении будем иметь

$$\begin{gathered}
h_y^{(0)} = \zeta \frac{\partial h_{z0}^{(0)}}{\partial\eta} - 4\pi R_m \left(\zeta E_{x0}^{(0)} - a_1 \frac{\partial v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau} - a_3 \frac{\partial v_{y0}^{(0)}}{\partial\tau} + d_3 \frac{\partial^2 v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau\partial\eta} \right) + \\
+ \frac{h_y^{(0)+} + h_y^{(0)-}}{2}; \quad (x, y)
\end{gathered} \tag{2.13}$$

$$\begin{gathered}
4\pi\rho^{(0)} = - \left[\frac{\partial}{\partial\xi} \left(H_{30} \frac{\partial v_y^{(0)}}{\partial\tau} - H_{20} \frac{\partial v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau} \right) + \frac{\partial}{\partial\eta} \left(H_{10} \frac{\partial v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau} - H_{30} \frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial\tau} \right) + \right. \\
\left. + \frac{\partial}{\partial\zeta} \left(H_{20} \frac{\partial v_{x0}^{(0)}}{\partial\tau} - H_{20}\zeta \frac{\partial^2 v_{z0}}{\partial\tau\partial\xi} - H_{10} \frac{\partial v_{y0}^{(0)}}{\partial\tau} + H_{10}\zeta \frac{\partial^2 v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau\partial\eta} \right) \right]
\end{gathered} \tag{2.14}$$

$$4\pi R_m E_z^{(0)} = \frac{\partial h_y^{(0)}}{\partial \xi} - \frac{\partial h_x^{(0)}}{\partial \eta} + H_{20}\zeta \frac{\partial^2 v_{z0}^{(0)}}{\partial \tau \partial \xi} - H_{20} \frac{\partial v_{x0}^{(0)}}{\partial \tau} +$$

$$+ H_{10}\zeta \frac{\partial^2 v_{z0}^{(0)}}{\partial \tau \partial \eta} - H_{10} \frac{\partial v_{y0}^{(0)}}{\partial \tau} \qquad (2.15)$$

где

$$R_m = \frac{\sigma h}{c} \frac{c_0}{c}$$

Напряжения в пластинке определяются соответствующими формулами.

3. Рассмотрим теперь внешнюю задачу электродинамики вне области, занимаемой пластинкой, в вакууме.

Предполагается, что во внешней области электромагнитное поле в трех направлениях имеет одну и ту же изменяемость, а по времени—такую же изменяемость, как и для внутренней задачи.

Во внешних уравнениях электродинамики произведем замену переменных

$$\xi = \varepsilon^{-r} \frac{x}{l}, \quad \eta = \varepsilon^{-r} \frac{y}{l}, \quad \zeta_1 = \varepsilon^{-r} \frac{z}{l}, \quad \tau = \frac{t}{t_0} \qquad (3.1)$$

где t_0 определяется по формуле (1.6), считая $\omega = 2r$. В дальнейшем принимается $r = 0$, то есть характерный размер рисунка возмущений совпадает с характерным геометрическим размером l пластинки.

Решение внешней задачи разыскиваем в виде асимптотических рядов

$$h_{x(e)} = \varepsilon \sum \lambda^s h_{x(e)}^{(s)} \quad (x,\ y,\ z) \qquad (3.2)$$

$$E_{x(e)} = \varepsilon^2 \sum \lambda^s E_{x(e)}^{(s)}, \quad (x,\ y) \qquad (3.3)$$

$$E_{z(e)} = \varepsilon^2 \sum \lambda^s E_{z(e)}^{(s)} \qquad (3.4)$$

После подстановки (3.2)—(3.4) во внешние уравнения электродинамики и приравнивания коэффициентов при равных степенях λ в левых и правых частях каждого отдельно взятого уравнения получается последовательность систем уравнений для определения коэффициентов разложения (3.2)—(3.4). В нулевом приближении

$$\frac{\partial h_{z(e)}^{(0)}}{\partial \eta} - \frac{\partial h_{y(e)}^{(0)}}{\partial \zeta_1} = 0, \quad (x,\ y,\ z) \qquad (3.5)$$

$$\frac{\partial h_{x(e)}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial h_{y(e)}^{(0)}}{\partial \eta} + \frac{\partial h_{z(e)}^{(0)}}{\partial \zeta_1} = 0 \qquad (3.6)$$

$$\frac{\partial E_{y(e)}^{(0)}}{\partial \zeta_1} = \frac{\partial h_{x(e)}^{(0)}}{\partial \tau} + \frac{\partial E_{z(e)}^{(0)}}{\partial \eta}, \quad (x,\ y) \qquad (3.7)$$

$$\frac{\partial E_{y(e)}^{(0)}}{\partial \xi} - \frac{\partial E_{x(e)}^{(0)}}{\partial \eta} = - \frac{\partial h_{z(e)}^{(0)}}{\partial \tau} \qquad (3.8)$$

$$\frac{\partial E_{x(e)}^{(0)}}{\partial \xi}+\frac{\partial E_{y(e)}^{(0)}}{\partial \eta}+\frac{\partial E_{z(e)}^{(0)}}{\partial \zeta_1}=0 \tag{3.9}$$

Плоскости $z=\pm h$ во внешней системе координат выражаются уравнениями $\zeta_1=\pm\varepsilon$, в нулевом приближении $\varepsilon\to 0$ и указанные плоскости выражаются как $\zeta_1=\pm 0$, то есть пластинка во внешней системе координат в нулевом приближении проявляется как математический разрез. Такое явление наблюдается и в исследованиях [11—16].

Итак, уравнения (3.5)—(3.9) можно рассматривать как уравнения во всем пространстве с источниками на плоскости $\zeta_1=0$. Источники в данном случае из себя представляют токи на плоскости $\zeta_1=0$ и поверхностные заряды.

Таким образом, в нулевом приближении с учетом граничных условий на лицевых плоскостях пластинки задача в целом приводится к решению уравнений

$$\frac{\partial h_{z(e)}^{(0)}}{\partial \eta}-\frac{\partial h_{y(e)}^{(0)}}{\partial \zeta_1}=\delta(\zeta_1)\,\theta(a\leqslant\xi\leqslant b)\,\theta(c\leqslant\eta\leqslant d)\,\psi^{(0)} \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial h_{x(e)}^{(0)}}{\partial \zeta_1}-\frac{\partial h_{z(e)}^{(0)}}{\partial \xi}=\delta(\zeta_1)\,\theta(a\leqslant\xi\leqslant b)\,\theta(c\leqslant\eta\leqslant d)\,\varphi^{(0)} \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial h_{y(e)}^{(0)}}{\partial \xi}-\frac{\partial h_{x(e)}^{(0)}}{\partial \eta}=0 \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial h_{x(e)}^{(0)}}{\partial \xi}+\frac{\partial h_{y(e)}^{(0)}}{\partial \eta}+\frac{\partial h_{z(e)}^{(0)}}{\partial \zeta_1}=0 \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial E_{y(e)}^{(0)}}{\partial \zeta_1}=\frac{\partial h_{x(e)}^{(0)}}{\partial \tau}+\frac{\partial E_{z(e)}^{(0)}}{\partial \eta} \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial E_{x(e)}^{(0)}}{\partial \zeta_1}=-\frac{\partial h_{y(e)}^{(0)}}{\partial \tau}+\frac{\partial E_{z(e)}^{(0)}}{\partial \xi} \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial E_{y(e)}^{(0)}}{\partial \xi}-\frac{\partial E_{x(e)}^{(0)}}{\partial \eta}=-\frac{\partial h_{z(e)}^{(0)}}{\partial \tau} \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial E_{x(e)}^{(0)}}{\partial \xi}+\frac{\partial E_{y(e)}^{(0)}}{\partial \eta}+\frac{\partial E_{z(e)}^{(0)}}{\partial \zeta_1}=\delta(\zeta_1)\,\theta(a\leqslant\xi\leqslant b)\,\theta(c\leqslant\eta\leqslant d)F^{(0)} \tag{3.17}$$

Здесь $\delta(\zeta_1)$ — дельта функция Дирака, $\theta(a\leqslant\xi\leqslant b)$ и $\theta(c\leqslant\eta\leqslant d)$ — функции Хевисайда; $a\leqslant\xi\leqslant b$, $c\leqslant\eta\leqslant d$ — безразмерная область, занимаемая пластинкой в плане. $\psi^{(0)}$, $\varphi^{(0)}$ и $F^{(0)}$ соответственно из себя представляют скачок величин $h_y^{(0)}$, $h_x^{(0)}$ и $\rho^{(0)}$ на разрезе $\zeta_1=\pm 0$.

Представляя решения (3.10)—(3.17) в виде

$$h_{x(e)}^{(0)}=e^{-i\tau}\,h^{*}_{x(e)1}\quad(x,\ y,\ z) \tag{3.18}$$

$$E_{x(e)}^{(0)}=e^{-i\tau}\,E^{*}_{x(e)1}\quad(x,\ y,\ z) \tag{3.19}$$

$$v_{z0}^{(0)} = e^{-i\omega t} v_{z0}^{*}, \qquad (x,\ y,\ z) \tag{3.20}$$

Применяя двумерное интегральное преобразование Фурье [16, 17], с учетом (2.11), решения уравнений (3.10)—(3.17) приводятся к решению систем интегро-дифференциальных уравнений на суженной области:

$$E_x^{*}(\xi, \eta, 0) = \frac{\omega}{\pi} \int\limits_a^b \int\limits_c^d \frac{1}{\sqrt{(\xi_0-\xi)^2 + (\eta_0-\eta)^2}} \left\{ \frac{\partial h_z^{*}(\xi_0, \eta_0, 0)}{\partial \eta_0} - \right.$$

$$\left. - 4\pi R_m \left[E_x^{*}(\xi_0, \eta_0, 0) - \frac{\omega}{2} \left(b_2 v_{z0}^{*} - b_3 v_{x0}^{*} + c_3 \frac{\partial v_{z0}^{*}}{\partial \eta_0} \right) \right] \right\} d\xi_0 d\eta_0 \tag{3.21}$$

$$E_y^{*}(\xi, \eta, 0) = -\frac{\omega}{\pi} \int\limits_a^b \int\limits_c^d \frac{1}{\sqrt{(\xi_0-\xi)^2 + (\eta_0-\eta)^2}} \left\{ \frac{\partial h_z^{*}(\xi_0, \eta_0, 0)}{\partial \xi_0} + \right.$$

$$\left. + 4\pi R_m \left[E_y^{*}(\xi_0, \eta_0, 0) + \frac{\omega}{2} \left(b_1 v_{z0}^{*} - b_3 v_{y0}^{*} + c_3 \frac{\partial v_{z0}^{*}}{\partial \xi_0} \right) \right] \right\} d\xi_0 d\eta_0 \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial E_x^{*}(\xi, \eta, 0)}{\partial \xi} - \frac{\partial E_y^{*}(\xi, \eta, 0)}{\partial \eta} = -\omega h_z^{*}(\xi, \eta, 0) \tag{3.23}$$

$$\frac{1}{3(1-\nu^2)} \Delta\Delta v_{z0}^{*} + \omega^2 v_{z0}^{*} = R_m \omega \left(b_{11} + b_{22} + \frac{\partial l_{13}}{\partial \xi_0} + \frac{\partial l_{23}}{\partial \eta_0} \right) v_{z0}^{*} +$$

$$+ R_m \left(b_2 + \frac{\partial l_3}{\partial \eta_0} \right) E_x^{*} - R_m \left(b_1 + \frac{\partial l_3}{\partial \xi_0} \right) E_y^{*} + R_m l_3 \left(\frac{\partial E_y^{*}}{\partial \xi_0} - \frac{\partial E_x^{(0)}}{\partial \eta_0} \right) -$$

$$- R_m \omega \left(b_{13} + \frac{\partial l_{33}}{\partial \xi_0} \right) v_{x0}^{*} - R_m \left(b_{23} + \frac{\partial l_{33}}{\partial \eta_0} \right) v_{y0}^{*} -$$

$$- R_m \omega \left(l_{13} + c_{13} - \frac{\partial N_{33}}{\partial \xi_0} \right) \frac{\partial v_{z0}^{*}}{\partial \xi_0} + R_m \omega \left(l_{23} + c_{23} - \frac{\partial N_{33}}{\partial \eta_0} \right) \frac{\partial v_{z0}^{*}}{\partial \eta_0} -$$

$$- R_m l_{33} \omega \Delta v_{z0}^{*} + R_m l_{33} \omega \frac{\partial v_{x0}^{*}}{\partial \xi_0} + R_m l_{33} \omega \frac{\partial v_{y0}^{*}}{\partial \eta_0} \tag{3.24}$$

$$\frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial \eta_0} \left(\frac{\partial v_{x0}^{*}}{\partial \eta_0} - \frac{\partial v_{y0}^{*}}{\partial \xi_0} \right) + \frac{1}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial \xi_0} \left(\frac{\partial v_{x0}^{*}}{\partial \xi_0} + \frac{\partial v_{y0}^{*}}{\partial \eta_0} \right) -$$

$$- R_m b_{33} \omega v_{x0}^{*} + R_m c_{33} \omega \frac{\partial v_{z0}^{*}}{\partial \xi_0} + R_m (b_3 E_y^{*} + b_{13} \omega v_{z0}^{*}) = 0, \quad (x,\ y)$$

$$\frac{\partial E_y^{*}(\xi, \eta, 0)}{\partial \xi} - \frac{\partial E_x^{*}(\xi, \eta, 0)}{\partial \eta} = -\omega h_z^{*}(\xi, \eta, 0) \tag{3.25}$$

Здесь (ξ, η) принадлежит плоскости $\zeta_1 = 0$, а (ξ_0, η_0) принадлежит части плоскости $\zeta_1 = 0$, занимаемой срединной плоскостью пластинки, $a \leqslant \xi_0 \leqslant b$, $c \leqslant \eta_0 \leqslant d$.

К системе интегро-дифференциальных уравнений (3.21)—(3.25) необходимо присоединить только условия закрепления краев пластинки.

В частном случае колебаний пластинки с цилиндрической поверхностью в магнитном поле, параллельном оси ox, уравнения (3.11)—(3.25) принимают вид

$$E_y^*(\xi, 0) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln\frac{1}{\xi_0 - \xi}\left[\frac{\partial h_z^*(\xi_0, 0)}{\partial \xi_0} + 4\pi R_m\left(E_y^*(\xi_0, 0) + b_1 \omega v_z^*\right)\right] d\xi_0 \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial E_y^*(\xi, 0)}{\partial \xi} = -\omega h_z^*(\xi, 0) \tag{3.27}$$

$$\frac{1}{3(1-\nu^2)}\frac{d^4 v_{z0}^*}{d\xi_0^4} + (\omega^2 + R_m b_{11}\omega) v_{z0}^* + R_m b_1 E_y^* = 0 \tag{3.28}$$

здесь $\xi \in (-\infty, \infty)$, а $\xi_0 \in (-1, 1)$.

Для полноты теории необходимо рассматривать погранслои у боковых поверхностей пластинки и по времени. Рассмотрению этих вопросов будут посвящены отдельные исследования.

4. Для иллюстрации применим изложенный выше метод к решению задачи о колебании по цилиндрической поверхности бесконечной пластинки при наличии внешнего магнитного поля с вектором напряженности, параллельным оси ox.

В этом случае система уравнений (3.25), (3.27) в безразмерном виде принимает форму

$$h_z(x, 0, t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\partial h_z(\xi, 0, t)}{\partial \xi} + \frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_y(\xi, 0, t) + \frac{B_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right]\right\}\frac{d\xi}{x - \xi} \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial E_y(x, 0, t)}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial h_z(x, 0, t)}{\partial t} \tag{4.2}$$

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\rho_0 h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2\sigma h}{c} B_{01}\left[E_y(x, 0, t) + \frac{B_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right] = 0 \tag{4.3}$$

$$x, \xi \in (-\infty, \infty)$$

Решения уравнений (4.1)—(4.3) будем искать в виде волн, распространяющихся вдоль оси x

$$w = w_0 e^{i(\omega t - kx)}; \quad E_y(x, 0, t) = E_{y0} e^{i(\omega t - kx)} \tag{4.4}$$

$$h_z(x, 0, t) = h_{z0} e^{i(\omega t - kx)} \tag{4.5}$$

Подставляя значения w, $E_y(x, 0, t)$, $h_x(x, 0, t)$ из (4.4), (4.5) в систему уравнений (4.1)—(4.3), получим однородную систему алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов w_0, E_{y0} и h_{x0}; приравнивая нулю определитель этой однородной системы, получим характеристическое уравнение для определения частоты колебаний

$$\varepsilon_0\Omega^3 + \beta\Omega^2 + \varepsilon_0(1 + \alpha\beta)\,\Omega - \beta = 0 \tag{4.6}$$

где

$$\varepsilon_0 = \frac{4\pi\sigma}{\Omega_0}, \quad \beta = \frac{(1 + k)\,c^2}{kV_0^2}, \quad \alpha = \frac{V_A^2}{c^2} \tag{4.7}$$

$$V_0 = \frac{\Omega_0}{k}, \quad V_A^2 = \frac{B_{01}^2}{4\pi\gamma_0}, \quad \Omega = \frac{i\omega}{\Omega_0} \tag{4.8}$$

$$\Omega_0^2 = \frac{Dk^4}{2\gamma_0 h} \tag{4.9}$$

В (4.7)—(4.9) Ω_0 — собственная частота колебания пластинки в отсутствие магнитного поля, V_A — скорость распространения волн Альвена, V_0 — фазовая скорость распространения упругих волн в пластинке.

Сравнивая (4.6) с соответствующим уравнением (2.24) из книги [8], легко убедиться, что при $\mu = 1$ они полностью совпадают.

В заключение автор выражает искренною благодарность Амбарцумяну С. А. за постановку задачи и за ценные указания.

Ս. Հ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ԻՆՏԵԳՐՄԱՆ ՄԵԹՈԴՈՎ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՄԲ ՀԱՂՈՐԴՈՂ ԲԱՐԱԿ ՍԱԼԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԵՐԿՉԱՓ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է մագնիսական դաշտում վերջավոր հաղորդականության և վերջավոր չափեր ունեցող բարակ սալի տատանումների հայտնի հավասարումները։ Մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների ասիմպտոտիկ ինտեգրման մեթոդի կիրառմամբ ստացվել է սալի տատանումների ինտեգրոդիֆերենցիալ երկչափ հավասարումների համակարգը որպես ասիմպտոտիկ ինտեգրման առաջին մոտավորության արդյունք։ Ասիմպտոտիկ ինտեգրման են ենթարկվում ոչ միայն սալի ներքին խնդրի մագնիսաառաձգականության հավասարումները, այլ նաև էլեկտրադինամիկայի արտաքին խնդիրը։

THE CONSTRUCTION OF TWO-DIMENTIONAL VIBRATION THEORY OF FINITE LENGTH THIN PLATE BY MEANS OF ASYMPTOTIC INTEGRATION OF MAGNETOELASTICITY EQUATIONS

S. O. SARKISIAN

S u m m a r y

The three-dimensional equations of magnetoelastic vibrations are considered for a thin plate of finite length. By means of the asymptotic method concerning the integration of differential equations, the two-dimensional integro-differential equations of magnetoelasticity for thin plates are obtained. This result is the first approximation of asymptotic integration of the three-dimensional magnetoelasticity equations for a thin plate including also the external electrodynamic problem.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.— ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
2. *Гольденвейзер А. Л., Колос А. В.* К построению двумерных уравнений теории упругих тонких пластинок.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
3. *Колос А. В.* Методы уточнения классической теории изгиба и растяжения пластинок.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.
4. *Агаловян Л. А.* К теории изгиба ортотропных пластин. Инж. жур. МТТ, № 6, 1966.
5. *Агаловян Л. А.* О пограничном слое ортотропных пластинок.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1973, т. 26, № 2.
6. *Гусейн-Заде М. И.* Асимптотический анализ трехмерных динамических уравнений тонкой пластинки.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 6.
7. *Гусейн-Заде М. И.* Асимптотический анализ граничных и начальных условий в динамике тонких пластинок.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 5.
8. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Изд. Наука, 1977.
9. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К трехмерной задаче магнитоупругости колебаний пластинки.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
10. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Об уравнениях магнитоупругих колебаний тонких пластин.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
11. *Черепанов Г. П.* Метод внешних и внутренних разложений в теории упругости. Сб. статей: Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Изд. Машиностроение, 1975.
12. *Ван-Дейк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Изд. Мир, 1967.
13. *Колмогоров А. Н., Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С.* Об одной вероятностной задаче оптимального управления.— Докл. АН СССР, 1962, 145, № 5.
14. *Ильин А. М.* Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью.— Математический сборник, 1976, т. 99 (141), № 4.
15. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Об асимптотике решений задачи Дирихле в трехмерной области с вырезанным тонким телом.— Докл. АН СССР, 1981, т. 256, № 1.

16. *Федорюк М. В.* Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Гельмгольца во внешности тонкого цилиндра.— Изв. АН СССР, сер. математическая, 1981, т. 45, № 1.
17. *Попов Г. Я.* Об одном способе решения задач механики для областей с разрезами или тонкими включениями.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 1.
18. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. М.: Изд. ИЛ, 1955.

Ленинаканский филиал
ЕрПИ им. К. Маркса

Поступила в редакцию
7. VII. 1981