

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ
 ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКЕ, НАГРЕВАЕМОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ
 ПО ТОРЦЕВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ОБЛАСТЬЮ НАГРЕВА

КОЛЯНО Ю. М., ПРИЙМАК В. И.

Рассмотрим тонкую ортотропную полубесконечную пластинку $x \gg 0$ толщиной 2δ , главные направления упругости которой совпадают с осями прямоугольной системы координат x, y, z . Поверхность пластинки $x = 0$ нагревается по узкой зоне ширины $2h$ ($h < \delta$) внешней средой температурой $t_0 = \text{const}$, движущейся с постоянной скоростью v в положительном направлении оси ординат. Через поверхности $z = \pm \delta$ и $x = 0$ осуществляется конвективный теплообмен с внешней средой соответственно нулевой температуры и температуры $t_c(y_1) = t_1 + (t_0 - t_1)N(y_1)$. Здесь $y_1 = y - vt$; t_1 — температура среды, омывающей части поверхности $x = 0$ пластинки вне области нагрева; t — время; $N(y_1) = S_+(y_1 + h) - S_-(y_1 - h)$;

$$S_{\pm}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 1/2 \mp 1/2, & \xi = 0, \\ 0, & \xi < 0 \end{cases} \text{ — асимметричные единичные функции.}$$

Необходимо определить термонапряженное состояние пластинки.

§ 1. Температурное поле

Для определения возникающего в пластинке квазистационарного температурного поля имеем уравнение теплопроводности [1]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y_1^2} - \omega^2 T + 2\omega \frac{\partial T}{\partial y_1} = 0 \quad (1.1)$$

и граничные условия [2]

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = [h_1 + (h_0 - h_1)N(y_1)][T|_{x_1=0} - t_c(y_1)] \quad (1.2)$$

$$T|_{x_1 \rightarrow \infty} = 0 \quad (1.3)$$

$$T|_{y_1 \rightarrow \pm \infty} \neq \infty \quad (1.4)$$

где $x_1 = x$; $y_1 = y - vt$; $k_y = \lambda_y/\lambda_x$; $\omega = \alpha_1/2a_x$; $h_i = \alpha_i/\alpha_1$ ($i = 0, 1$); λ_x, λ_y — коэффициенты теплопроводности вдоль координат-

ных осей x и y ; α_z — коэффициент теплоотдачи с боковых поверхностей $z = \pm \delta$ пластинки; α_x — коэффициент температуропроводности, α_0, α_1 — коэффициенты теплоотдачи соответственно с области нагрева поверхности $x = 0$ и вне ее.

Вводя интегральную характеристику

$$\vartheta = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h T(0, y_1) dy_1 \quad (1.5)$$

условия (1.2) сведем к виду

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} = h_1 T|_{x_1=0} - QN(y_1) - h_1 t_1 \quad (1.6)$$

где

$$Q = h_0 t_0 - h_1 t_1 - (h_0 - h_1) \vartheta \quad (1.7)$$

Такой подход вполне оправдан для узкозонального нагрева [3].

Применяя к (1.1), (1.3), (1.6) интегральное преобразование Фурье по y_1 , с учетом условий (1.4) соответственно получим

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dx_1^2} - \gamma^2 \bar{T} = 0 \quad (1.8)$$

$$\left. \frac{d\bar{T}}{dx_1} \right|_{x_1=0} = h_1 \bar{T}|_{x_1=0} - \frac{2Q \sin \gamma h}{\sqrt{2\pi} \eta} - \sqrt{2\pi} h_1 t_1 \delta(\gamma) \quad (1.9)$$

$$\bar{T}|_{x_1 \rightarrow \infty} = 0 \quad (1.10)$$

где

$$\bar{T} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T e^{i\gamma y_1} dy_1; \quad \gamma = \sqrt{\xi^2 + 2i\omega\tau}; \quad \xi = k_p \tau^2 + \kappa^2$$

$\delta(\eta)$ — дельта-функция Дирака.

Решение краевой задачи (1.8) — (1.10) запишется в виде

$$\bar{T} = \frac{2Q \sin \gamma h}{\sqrt{2\pi} (\gamma + h_1) \eta} e^{-\gamma x_1} + \frac{\sqrt{2\pi} h_1 t_1 \delta(\gamma)}{x_1 + h_1} e^{-\kappa x_1} \quad (1.11)$$

Перейдя в (1.11) к оригиналу, получим

$$T = \frac{2Q}{\pi} f(x_1, y_1) + \frac{h_1 t_1}{x_1 + h_1} e^{-\kappa x_1} \quad (1.12)$$

где

$$f(x_1, y_1) =$$

$$\int_0^{\infty} \frac{(\gamma_+ + h_1) \cos(\gamma_+ x_1 + \gamma_+ y_1) - \gamma_+ \sin(\gamma_+ x_1 + \gamma_+ y_1)}{\gamma_+^2 [(\gamma_+ + h_1)^2 + \gamma_+^2]} \sin \gamma_+ h e^{-\gamma_+ x_1} d\gamma_+$$

$$\gamma_{\pm}^2 = \frac{1}{2} (V \zeta^2 + 4\omega^2 \gamma_{\pm}^2 \pm \zeta)$$

Используя (1.12), из (1.5) находим

$$j = \frac{(x + h_1)(h_0 t_0 - h_1 t_1) l + h_1 t_1}{(x + h_1)[1 + (h_0 - h_1) l]} \quad (1.13)$$

где

$$j = \frac{2}{\pi h} \int_0^{\infty} \frac{(\gamma_+ + h_1) \sin^2 \gamma_+ h}{\gamma_+^2 [(\gamma_+ + h_1)^2 + \gamma_+^2]} d\gamma_+$$

Подставляя (1.13) в (1.7), для Q получаем выражение

$$Q = \frac{h_0 t_0 (x + h_1) - h_1 t_1 (x + h_0)}{(x + h_1)[1 + (h_0 - h_1) l]} \quad (1.14)$$

Таким образом, решение уравнения (1.1) определяется формулами (1.12), (1.14).

§ 2. Определение температурных напряжений

Для определения напряжений, вызываемых температурным полем (1.12), воспользуемся формулами [1. 4]

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}; \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}; \quad \sigma_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1} \quad (2.1)$$

где функция напряжений F удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x_1^4} + 2p \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^2 \partial y_1^2} + q \frac{\partial^4 F}{\partial y_1^4} = z_{ix}^* \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} - z_{iy}^* \frac{\partial^2 T}{\partial y_1^2} \quad (2.2)$$

Здесь $p = E_y (1/G - 2\nu_x/E_x)/2$; $q = E_y/E_x$; $z_{ix}^* = \alpha_x^i E_x$; $z_{iy}^* = \alpha_y^i E_y$; E_x, E_y — модули Юнга для растяжения (сжатия) вдоль главных направлений упругости x, y ; ν_x — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении y при растяжении в направлении x ; G — модуль сдвига; α_x^i, α_y^i — температурные коэффициенты линейного расширения в направлении x и y .

Предположим, что пластинка свободна от внешней нагрузки, то есть

$$\sigma_{xx}|_{x_1=0} = \sigma_{yy}|_{x_1=0} = 0, \quad \sigma_{xx}|_{x_1, |y_1| \rightarrow \infty} = \sigma_{yy}|_{x_1, |y_1| \rightarrow \infty} = 0 \quad (2.3)$$

$$\bar{\sigma}_{xx} = -\gamma^2 \bar{F}, \quad \bar{\sigma}_{yy} = \frac{d^2 \bar{F}}{dx_1^2}, \quad \bar{\sigma}_{xy} = i\gamma \frac{d\bar{F}}{dx_1} \quad (2.4)$$

$$\frac{d^4 \bar{F}}{dx_1^4} - 2p\gamma^2 \frac{d^2 \bar{F}}{dx_1^2} + q\gamma^2 \bar{F} = \alpha_{ix} \gamma^2 \bar{T} - \alpha_{iy} \frac{d^2 \bar{T}}{dx_1^2} \quad (2.5)$$

$$\bar{\sigma}_{xx} |_{x_1=0} = \bar{\sigma}_{yy} |_{x_1=0} = 0, \quad \bar{\sigma}_{xy} |_{x_1=0} = \bar{\sigma}_{xy} |_{x_1=\infty} = 0 \quad (2.6)$$

Используя (1.8), частное решение \bar{F}_r уравнения (2.5) находим в виде

$$\bar{F}_r = \frac{\alpha_{ix}^* \gamma^2 - \alpha_{iy}^* \gamma^2}{\gamma^4 - 2p\gamma^2 \gamma^2 + q\gamma^4} \bar{T}$$

Общее решение \bar{F}_0 однородного уравнения (2.5) в зависимости от корней характеристического уравнения [1, 4]

$$\mu^4 - 2p\mu^2 + q = 0 \quad (2.7)$$

будет следующее:

1) корни уравнения (2.7) вещественные и неравные ($\pm \mu_1, \pm \mu_2, \mu_1 > 0, \mu_2 > 0$)

$$\bar{F}_0 = A e^{-\gamma_1 x_1} + B e^{\gamma_1 x_1} + C e^{-\gamma_2 x_1} + D e^{\gamma_2 x_1}$$

2) корни вещественные и попарно равные ($\pm \mu_0, \mu_0 > 0$)

$$\bar{F}_0 = (A + B x_1) e^{-\mu_0 x_1} + (C + D x_1) e^{\mu_0 x_1}$$

3) корни комплексные ($\mu = ri, -\mu \pm ri, \mu > 0, r > 0$)

$$\bar{F}_0 = (A \cos \gamma_i x_1 + B \sin \gamma_i x_1) e^{-\gamma_i x_1} + (C \cos \gamma_i x_1 + D \sin \gamma_i x_1) e^{\gamma_i x_1}$$

где $\gamma_i = \mu_i |\eta_i|, i = 0, 1, 2; \gamma_0 = r |\gamma_0|; \gamma_i = \mu |\gamma_i|$.

Величины A, B, C, D , входящие в выражения для \bar{F}_0 , определяются из граничных условий (2.6). Используя (2.4), по формулам обращения находим выражения температурных напряжений. В безразмерных величинах их можно записать в виде:

случай первый —

$$\sigma_x = \frac{-s}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^\infty P [d_2^- e^{-\gamma_1 x} - d_1^- e^{-\gamma_2 x} + (\eta_2 - \eta_1) R_1] d\eta$$

$$\sigma_y = \frac{s}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^\infty P \left(d_2^- e^{-\gamma_1 x} - d_1^- e^{-\gamma_2 x} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\gamma_i} R_2 \right) d\eta = \varphi(X) \quad (2.8)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{s}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^\infty P [d_2^- \mu_1 e^{-\gamma_1 x} - d_1^- \mu_2 e^{-\gamma_2 x} + (\mu_1 - \mu_2) R_3] d\eta$$

случай второй —

$$\sigma_x = -s \int_0^{\infty} P \gamma [(d_0 X - l^+) e^{-\gamma_0 X} - R_1] d\gamma$$

$$\sigma_y = s \int_0^{\infty} \frac{P}{\gamma} \{ [d_0^+ (\gamma_0^2 X - 2\gamma_0) - l^+ \gamma_0^2] e^{-\gamma_0 X} + R_2 \} d\gamma - \varphi(X) \quad (2.9)$$

$$\tau_{xy} = s \int_0^{\infty} P \{ [d_0^- (\gamma_0 X - 1) + l^- \gamma_0^2] e^{-\gamma_0 X} - R_3 \} d\gamma$$

случай третьей —

$$\sigma_x = -s \int_0^{\infty} P \gamma \left[\left(\frac{d_u^+}{\gamma_r} \sin \gamma_r X - l^+ \cos \gamma_r X \right) e^{-\gamma_r X} + R_1 \right] d\gamma_r$$

$$\sigma_y = s \int_0^{\infty} \frac{P}{\gamma} \left\{ \left[\left(\frac{\gamma_{0u}^2 - \gamma_r^2}{\gamma_r} d_u^- - 2\gamma_r \gamma_{0u} l^+ \right) \sin \gamma_r X + \right. \right.$$

$$\left. \left. + (\gamma_r^2 l^+ - \gamma_{0u}^2 l^+ - 2\gamma_{0u} d_u^-) \cos \gamma_r X \right] e^{-\gamma_r X} + R_2 \right\} d\gamma_r - \varphi(X) \quad (2.10)$$

$$\tau_{xy} = s \int_0^{\infty} P \left\{ \left[\left(\frac{\gamma_{0u}}{\gamma_r} d_u^- + \gamma_r l^+ \right) \sin \gamma_r X + \right. \right.$$

$$\left. \left. + (\gamma_r l^+ - d_u^-) \cos \gamma_r X \right] e^{-\gamma_r X} - R_3 \right\} d\gamma_r$$

Здесь введены обозначения:

$$\sigma_j = \frac{\sigma_{jj}}{\alpha_{jj}^* l_0} \quad (j = x, y), \quad \tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\alpha_{xy}^* l_0}, \quad P = \frac{\sin \gamma H}{[(G_+ + Bi_1)^2 + G_-^2] (D_+^2 + D_-^2)}$$

$$s = \frac{2[Bi_0(\sqrt{Bi} + Bi_1) - Bi_0(\sqrt{Bi} + Bi_0)]}{\pi(\sqrt{Bi} + Bi_1)[1 + (Bi_0 - Bi_1)L]}, \quad \vartheta = \frac{l_1}{l_0}$$

$$d_i^{\pm} = m_i^{\pm} \cos \gamma Y \pm m_i^{\pm} \sin \gamma Y, \quad m_i^{\pm} = G_{\pm} P_{\pm} \pm (G_{\pm} - \gamma_{0i}) P_{\pm}$$

$$(i = 0, 1, 2, \mu)$$

$$P_{\pm} = D_{\pm} [(\eta^2 - \xi^2)(G_{\pm} + Bi_1) - 2\gamma_{0i}^2 Pe] \mp D_{\mp} [(\gamma_{0i}^2 - \xi^2)G_{\pm} +$$

$$+ 2\gamma_{0i} Pe (G_{\pm} + Bi_1)]$$

$$D_{+} = \xi^2 - 4\gamma_{0i}^2 Pe - 2p\gamma_{0i}^2 + q\gamma_{0i}^4, \quad D_{-} = 4\gamma_{0i} Pe (\xi - p\gamma_{0i}^2)$$

$$\xi = k_2 \gamma^2 + \text{Bi}, \quad G_{\pm} = (\sqrt{\xi^2 + 4\gamma^2 \text{Pe}^2} \pm \xi)/2, \quad \text{Pe} = \omega \delta$$

$$R_n = Q_n e^{-G_n X} \quad (n = 1, 2, 3), \quad Q_1 = P \cos \beta - P_- \sin \beta$$

$$Q_2 = (\xi P_+ + 2\gamma \text{Pe} P_-) \cos \beta + (2\gamma \text{Pe} P_+ - G_+ P_-) \sin \beta$$

$$Q_3 = (G_+ P_- - G_- P_+) \cos \beta + (G_- P_- + G_+ P_+) \sin \beta, \quad \beta = G_- X + \gamma Y$$

$$\varphi(X) = \frac{\theta_0 \text{Bi}_1}{1 + \text{Bi}_1} e^{-\gamma \text{Bi}_1 X}, \quad X = \frac{x_1}{\delta}, \quad Y = \frac{y_1}{\delta}$$

$$\text{Bi}_k = h_k \delta \quad (k = 0, 1), \quad \text{Bi} = x^2 \delta^2, \quad l^{\pm} = P_+ \cos \gamma Y \mp P_- \sin \gamma Y$$

$$L = \frac{2}{\pi H} \int_0^{\infty} \frac{(G_+ + \text{Bi}_1) \sin^2 \gamma H}{\gamma^2 [(G_+ + \text{Bi}_1)^2 + G^2]} d\gamma, \quad H = \frac{h}{\delta}, \quad \gamma = \frac{x^2}{\delta^2}$$

§ 3. Исследование температурных напряжений

В качестве примера рассмотрим пластинку, изготовленную из стекло-текстолита КАСТ-В. Вычисленные в работе [5] для такой пластинки корни уравнения (2.7) — вещественные и неравные: $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0.83$. В этом случае температурные напряжения в пластинке определяются выражениями (2.8), которые при $X = 0$; $Y = 0$ соответственно принимают вид:

$$\sigma_y = \frac{s}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^{\infty} P \left(d_2^+ - d_1^+ + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\gamma} G_2 \right) d\gamma - \frac{\theta_0 \text{Bi}_1}{\sqrt{\text{Bi}_1 + \text{Bi}_1}} \quad (3.1)$$

$$\sigma_x = 0, \quad \tau_{xy} = 0$$

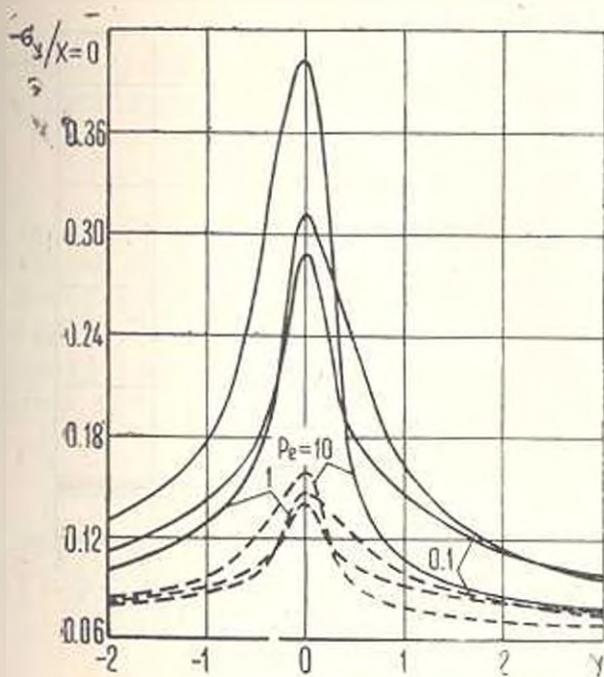
$$\sigma_x = \frac{-s}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^{\infty} P [m_1^- e^{-\gamma_1 X} - m_1^+ e^{-\gamma_2 X} + (\gamma_2 - \gamma_1) l_1 e^{-G_+ X}] d\gamma$$

$$\sigma_y = \frac{s}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^{\infty} P [m_2^- e^{-\gamma_1 X} - m_2^+ e^{-\gamma_2 X} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\gamma} L_2 e^{-G_+ X}] d\gamma - \varphi(X)$$

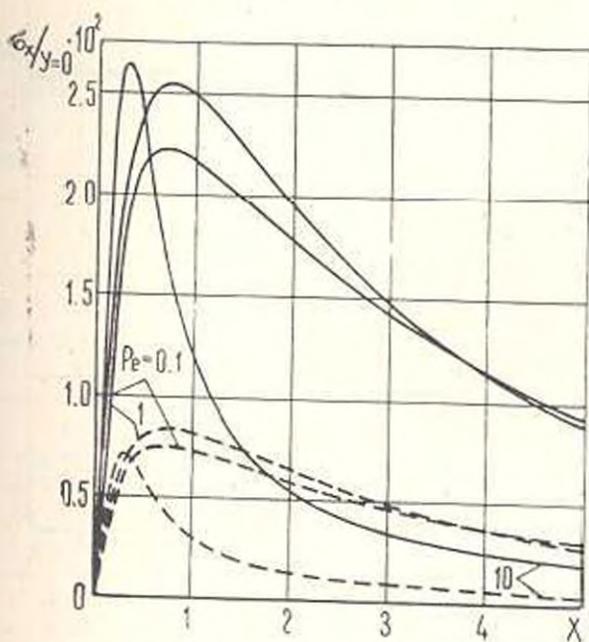
$$\tau_{xy} = \frac{s}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^{\infty} P [m_2^- \mu_1 e^{-\gamma_1 X} - m_1^- \mu_2 e^{-\gamma_2 X} + (\mu_1 - \mu_2) L_3 e^{-G_+ X}] d\gamma, \quad (3.2)$$

где $G_n = Q_n|_{\beta=\gamma Y}$; $L_n = Q_n|_{\beta=G_+ X}$ ($n = 1, 2, 3$).

По формулам (3.1), (3.2) на ЭВМ проведены расчеты распределения температурных напряжений вдоль координатных осей пластинки в зависимости от различных значений скорости движения области нагрева и теплоотдачи с части торцевой поверхности, подвергнутой нагреву, которые представлены в виде графиков на фиг. 1—4. При этом принято, что

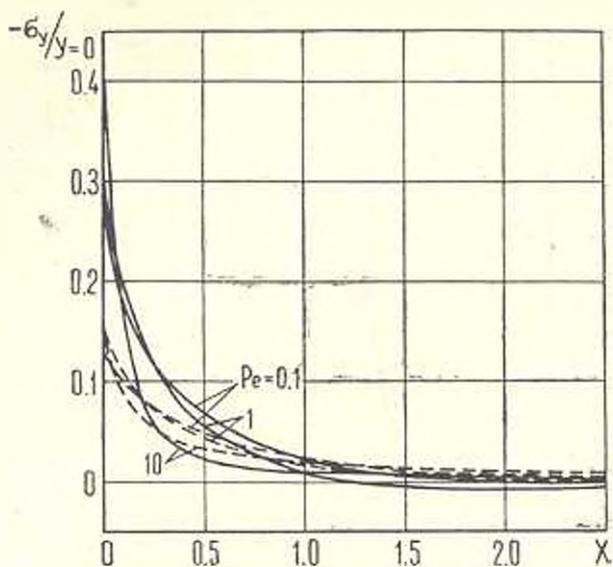


Фиг. 1. Распределение напряжений σ_y по оси Y .

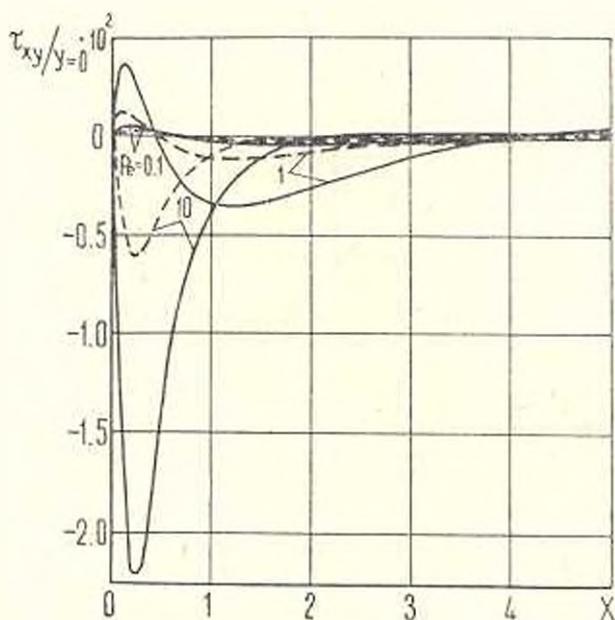


Фиг. 2. Распределение напряжений σ_x по оси X .

$H = 0,2$; $\theta = 0,1$; $Bi_1 = 1$; $Bi_2 = 1$. На этих фигурах сплошной линией показаны напряжения, вычисленные при $Bi_1 = 5$ (реальный случай), а штриховой — при $Bi_1 = 1$.



Фиг. 3. Распределение напряжений σ_y по оси X .



Фиг. 4. Распределение напряжений τ_{xy} по оси X .

Из графиков следует, что с увеличением скорости движения области нагрева максимальные значения напряжений, соответствующих реальному случаю, увеличиваются; учет реальной теплоотдачи с части торцевой поверхности, подверженной нагреву, приводит к увеличению напряжений.

ՀԻՄՔԻ ՄԱԿԵՐՆԵՎՈՒՅՔԻ ԿՐԼՆՈՎ ՀԱՐԻՒՆՈՂ ՏԱՔԱՅԻՄԱՆ ՏԻՐՈՒՅՔՈՎ
ՏԱՔԱՅՆՎՈՂ ԿԻՍԱԱՆՎԵՐՋ ՈՐԹՈՏՐՈՊ ՍԱԼՈՒՄ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԱՐՈՒՄԵՆԻՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ս ւ մ

Որոշվել են քվազիստացիոնար ջերմային դաշտը և նրանով պայմանա-
վորված լարումները կիսաանվերջ օրթոտրոպ սալում, որը տարադվում
է հիմքային մակերևույթի վրա բարակ դոտիով հաստատուն արագությամբ
շարժվող ջերմային աղբյուրով: Ուսումնասիրվել է տարացման տիրույթի
ջերման արագության և հիմքային մակերևույթից ջերմատվության կտոր տո
կտոր հաստատուն գործակցի մեծության ազդեցությունը սալում լարումների
բաշխման վրա:

THE TEMPERATURE STRESSES IN A SEMI-INFINITE
ORTHOTROPICAL PLATE HEATED BY MOVING ALONG END
FACE HEATING AREA

Yu. M. KOLYANO, V. I. PRIYMAK

S u m m a r y

Quasi-stationary temperature field and stress in an orthotropic
semi-infinite plate heated by convective heat exchange caused by
moving along end face heating area is determined. Stress dependence
on motion speed of heating area and variable convective heat exchange
is studied.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неуставившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. К. Наукова думка, 1972, 308 с.
2. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Грозовик В. И., Лобзель В. А. Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи. К. Наукова думка, 1977, 158 с.
3. Грицько Е. Г. Температурные поля и напряжения в ортотропной полубесконечной пластинке при кусочно-постоянном коэффициенте теплоотдачи с торцевой поверхности. В кн.: Термомеханические процессы в кусочно-однородных элементах конструкций. К.: Наукова думка, 1978, с. 173—178.
4. Саркисян В. С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван: Изд-во Ереванского ун-та, 1976, 536 с.
5. Амбарцумян С. А., Диртсарян С. М. Некоторые нестационарные температурные задачи для ортотропной пластинки. — Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 3, с. 120—127.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР
Львовский ордена Ленина государственный
университет им. И. Франко

Поступила в редакцию
16. I. 1981