

## ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ЧАСТИЧНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКЕ С ИСТОЧНИКОМ И СТОКОМ ТЕПЛА

ХАНЖОВ А. Д.

Получено решение плоской стационарной задачи о распределении температуры и напряжений, возникающих в полубесконечной ортотропной пластинке под влиянием точечного источника и стока тепла при смешанных механических условиях на границе.

1. Рассмотрим теплоизолированную по боковым поверхностям и границе тонкую пластинку, отнесенную к прямоугольной системе координат  $x, y$  (фиг. 1).

Пусть в точке с координатами  $x = c, y = b$  помещен точечный источник тепла, а в точке с координатами  $x = -c, y = b$  — сток тепла. На свободном участке  $|x| < a$  границы равны нулю нормальные напряжения  $\sigma_n$ , а на закрепленном участке  $|x| > a$  — нормальные перемещения  $v$ . Касательные напряжения на всей границе пластинки отсутствуют.

Полагаем, что материал пластинки однороден и ортотропен в отношении упругих и тепловых свойств: главные направления упругой и тепловой симметрии совпадают с осями координат; тепловые и механические характеристики материала от температуры не зависят.

Задача термоупругости для ортотропной пластинки сводится к решению системы уравнений [1]

$$k_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -W [\delta(x-c) - \delta(x+c)] \delta(y-b) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (a_{11}\epsilon_x + a_{12}\epsilon_y + a_1 T) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (a_{12}\epsilon_x + a_{22}\epsilon_y + a_2 T) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} a_{21}\epsilon_{xy}$$

со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0 \\ \sigma_y(x, 0) = 0 \quad (|x| < a), \quad v(x, 0) = 0 \quad (|x| > a) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $T$  — температура,  $W$  — интенсивность точечного источника и стока тепла,  $\delta$  — символ функции Дирака,  $k_1, k_2$  и  $a_1, a_2$  — коэффициенты теплопроводности и температурные коэффициенты линейного расширения в на-

правления осей  $x, y$ . Другие обозначения являются общепринятыми [2], [7].

Применяя к уравнениям (1.1), (1.2) интегральное преобразование Фурье [3] по переменной  $x$  и предполагая, что температура, напряжения и производные от этих величин на бесконечности равны нулю, находим выражения для трансформант температуры и напряжений [4]

$$\bar{T}(\xi, y) = \frac{Qi \sin c\xi}{s_1 |\xi|} e^{-s_1 |y - b| |\xi|} + Ae^{-s_2(y-b)|\xi|} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_y(\xi, y) &= Be^{-s_3 |y| |\xi|} + Ce^{-s_4 |y| |\xi|} + \\ &+ \frac{Qi \sin c\xi}{|\xi|} \sum_{n=1}^3 G_n e^{-s_n |y - b| |\xi|} + G_3 s_4 A e^{-s_4 |y - b| |\xi|} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\bar{\sigma}_{xy}(\xi, y) = \frac{1}{i\xi} \frac{d\bar{\sigma}_y(\xi, y)}{dy}, \quad \bar{\sigma}_x(\xi, y) = -\frac{1}{\xi^2} \frac{d^2 \bar{\sigma}_y(\xi, y)}{dy^2} \quad (1.6)$$

Здесь

$$Q = \frac{W}{\sqrt{2\pi k_2}}, \quad G_n = \frac{\alpha_1 s_n^2 - \alpha_2}{\alpha_{11}(s_n^2 - s_2^2)(s_n^2 - s_3^2)s_n}$$

$$n = 1, 2, 3 \begin{cases} j = 2, k = 3 \text{ при } n = 1 \\ j = 3, k = 1 \text{ при } n = 2 \\ j = 1, k = 2 \text{ при } n = 3 \end{cases}$$

$$s_1 = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}, \quad s_2, s_3 = \{(2\alpha_{11})^{-1} [(2\alpha_{12} + \alpha_{66}) \pm \sqrt{(2\alpha_{12} + \alpha_{66})^2 - 4\alpha_{11}\alpha_{22}}]\}^{1/2}$$

причем  $(2\alpha_{12} + \alpha_{66})^2 > 4\alpha_{11}\alpha_{22}$ .

Удовлетворяя первым двум интегрально преобразованным граничным условиям

$$\frac{d\bar{T}(\xi, 0)}{dy} = 0, \quad \bar{\sigma}_{xy}(\xi, 0) = 0$$

и выражений (1.4), (1.5), (1.6) находим постоянные интегрирования  $A$  и  $C$

$$A = \frac{Qi \sin c\xi}{s_1 |\xi|} e^{-2s_1 y} \quad (1.7)$$

$$C = -\frac{s_3}{s_2} B - G_1 \frac{s_1^2}{s_2} A e^{s_1 |y| |\xi|} + \frac{Qi \sin c\xi}{s_1 |\xi|} \sum_{n=1}^3 G_n s_n e^{-s_n |y| |\xi|} \quad (1.8)$$

Для определения постоянной  $B$  воспользуемся соотношениями [2]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_{11} \sigma_x + \alpha_{12} \sigma_y + \alpha_1 T, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha_{66} \sigma_{xy}$$

из которых после применения интегральных преобразований к ним получим

$$\bar{v} = \frac{a_{12} + a_{06}}{i^2} \frac{d\bar{z}_y}{dy} - \frac{a_{11}}{i^2} \frac{d^2 \bar{z}_y}{dy^2} + \frac{z_1}{i^2} \frac{d\bar{T}}{dy} \quad (1.9)$$

Применяя теорему обращения для преобразования Фурье к выражениям (1.5), (1.9), удовлетворим последним двум граничным условиям (1.3).

Таким образом, учитывая нечетность функций  $\bar{v}_y$  и  $\bar{v}$  по переменной  $\xi$ , приходим к парным интегральным уравнениям

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \bar{z}_y(\xi, 0) \sin x\xi d\xi &= 0, & 0 < x < a \\ \int_0^{\infty} \bar{v}(\xi, 0) \sin x\xi d\xi &= 0, & x > a \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{z}_y(\xi, 0) &= \frac{s_2 - s_1}{s_1} \left| B - G_1 s_1 \frac{s_1 - s_2}{s_2 - s_1} A e^{b_1 \xi} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{Q i \sin c\xi}{(s_2 - s_1)^2} \sum_{n=1}^{\infty} G_n (s_n + s_1) e^{-b_n \xi} \right| \\ \bar{v}(\xi, 0) &= \frac{a_{11}}{i} (s_2^2 - s_1^2) s_2 \left| B - G_2 s_1 A e^{b_1 \xi} + \right. \\ &\quad \left. + G_2 \frac{Q i \sin c\xi}{i} (e^{-b_1 \xi} - e^{-a_n \xi}) \right| \end{aligned}$$

Если ввести новые переменные  $\lambda = x/a$ ,  $z = a\xi$ , то уравнения (1.10) с учетом (1.7) и соотношения

$$\sin x\xi = \sqrt{\frac{\pi x \lambda}{2}} J_{1/2}(x\xi)$$

можно записать в таком виде

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} z f(z) J_{1/2}(i z) dz &= F(i), & 0 < i < 1 \\ \int_0^{\infty} f(z) J_{1/2}(i z) dz &= 0, & i > 1 \end{aligned} \quad (1.11)$$

где

$$f(z) = \frac{1}{V z} \left[ B - G_2 \frac{Q i \sin z/a}{z/a} e^{-a z} \right] \quad (1.12)$$

$$F(z) = -\frac{2Qis_2}{s_1 - s_2} \sum_{n=1}^3 G_n \int_0^{\infty} \frac{\sin z/a}{z/a} e^{-m_n z} J_{1/2}(\lambda z) \sqrt{z} dz \quad (1.13)$$

$J_{1/2}(\lambda z)$  — функция Бесселя первого рода,  $m_n = bs_n/a$ .

Решением уравнений (1.11) является функция [3]

$$f(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \int_0^1 \mu^{3/2} J_1(z\mu) d\mu \int_0^1 F(\mu\varphi) \varphi^{3/2} (1-\varphi^2)^{-1/2} d\varphi \quad (1.14)$$

Возвращаясь к старым переменным и принимая во внимание значение интеграла [5]

$$\int_0^1 \varphi (1-\varphi^2)^{-1/2} \sin \mu a i \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} J_1(\mu a i)$$

из формул (1.12), (1.13), (1.14) находим

$$B = \frac{Ql \sin c i}{i} G_2 e^{-bs_n i}$$

$$-\frac{2Qia^2 s_2 i}{s_1 - s_2} \sum_{n=1}^3 G_n \int_0^1 \mu J_1(a i \mu) d\mu \int_0^{\infty} \frac{\sin c i}{i} e^{-bs_n i} J_1(\mu a i) d i$$

Подставляя значения  $A$ ,  $B$  и  $C$  в выражения (1.4), (1.5), (1.6) и пользуясь теоремой обращения для преобразования Фурье, находим распределение температуры и напряжений в пластинке

$$T(x, y) = \frac{W}{4\pi k_2 s_1} \ln \frac{h_1 p_1}{l_1 q_1}$$

$$T_x(x, y) = -\frac{W}{4\pi k_2} \sum_{n=1}^3 G_n s_n^2 \ln \frac{h_n p_n}{l_n q_n}$$

$$-\frac{2W a^2 s_1 s_2}{\pi k_2 (s_1 - s_2)} \sum_{n=1}^3 G_n \int_0^1 L_n(\mu) \left[ \frac{s_1}{(r_1 p_1)^{3/2}} \sin \frac{3}{2} (\theta_1 + \varphi_1) - \right.$$

$$\left. - \frac{s_2}{(r_2 p_2)^{3/2}} \sin \frac{3}{2} (\theta_2 + \varphi_2) \right] \mu d\mu$$

$$T_y(x, y) = \frac{W}{4\pi k_2} \sum_{n=1}^3 G_n \ln \frac{h_n p_n}{l_n q_n} +$$

$$+ \frac{2W a^2}{\pi k_2 (s_1 - s_2)} \sum_{n=1}^3 G_n \int_0^1 L_n(\mu) \left[ \frac{s_2}{(r_2 p_2)^{3/2}} \sin \frac{3}{2} (\theta_2 + \varphi_2) - \right.$$

$$\left. - \frac{s_1}{(r_1 p_1)^{3/2}} \sin \frac{3}{2} (\theta_1 + \varphi_1) \right] \mu d\mu$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, y) = & -\frac{W}{2\pi k_1} \sum_{n=1}^3 G_n s_n \left[ \operatorname{arctg} \frac{x+c}{(y+b)s_n} - \right. \\ & \left. - \operatorname{arctg} \frac{x-c}{(y+b)s_n} + \operatorname{arctg} \frac{x+c}{(y-b)s_n} - \operatorname{arctg} \frac{x-c}{(y-b)s_n} \right] - \\ & - \frac{2W a^2 s_3 s_2}{\pi k_2 (s_3 - s_2)} \sum_{n=1}^3 G_n \int_0^1 L_n(\mu) \left[ \frac{1}{(r_2 \rho_2)^{3/2}} \sin \frac{3}{2} (\theta_2 + \varphi_2) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{(r_3 \rho_3)^{3/2}} \sin \frac{3}{2} (\theta_3 + \varphi_3) \right] \mu d\mu \end{aligned}$$

Здесь  $h_n = (y+b)^2 s_n^2 + (x+c)^2$ ,  $t_n = (y+b)^2 s_n^2 + (x-c)^2$

$$p_n = (y-b)^2 s_n^2 + (x+c)^2, \quad q_n = (y-b)^2 s_n^2 + (x-c)^2$$

$$r_n = \sqrt{y^2 s_n^2 + (x - a\mu)^2}, \quad \rho_n = \sqrt{y^2 s_n^2 + (x + a\mu)^2}$$

$$\sin \theta_n = \frac{x - a\mu}{r_n}, \quad \sin \varphi_n = \frac{x + a\mu}{\rho_n}, \quad \cos \theta_n = \frac{y s_n}{r_n}, \quad \cos \varphi_n = \frac{y s_n}{\rho_n}$$

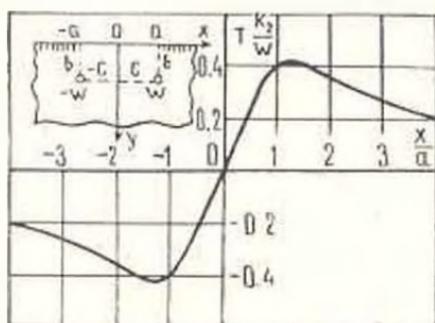
$$L_n(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \sqrt{(b^2 s_n^2 + a^2 \mu^2 - c^2)^2 + 4b^2 s_n^2 c^2} - (b^2 s_n^2 + a^2 \mu^2 - c^2)]^{1/2} - c$$

$$n = 1, 2, 3$$

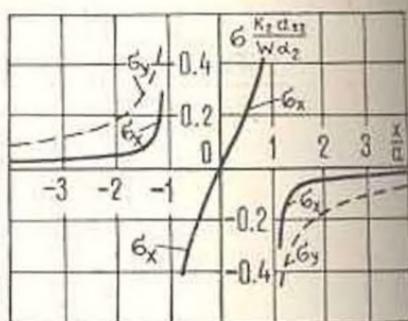
2. На фиг. 1.2 приведены графики распределения безразмерных температур и напряжений вдоль прямолинейной границы пластинки. Численный расчет проводился для пластинки, изготовленной из стеклотекстолита КАСТ-В, для которого постоянные равны [6]

$$a_{11} = 4,69 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{Н}, \quad a_{22} = 8,26 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{Н}, \quad a_{12} = -0,898 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{Н}$$

$$a_{33} = 49 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{Н}, \quad \frac{k_1}{k_2} = \frac{5}{8}, \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{3}{4}$$



Фиг. 1. Распределение температуры вдоль границы пластинки



Фиг. 2. Распределение напряжений вдоль границы пластинки

Значения температур и напряжений найдены по вышеприведенным формулам при  $y = 0$  для случая  $b = c = a$ . При переходе через точки  $|x| = a$  наблюдается бесконечный разрыв напряжений.

ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԱՂՔՅՈՒՐՈՎ ԵՎ ՀՈՍՔՈՎ ՄԱՍՆԱՌՈՐԵՆ ԱՄՐԱՑՎԱԾ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՍԱՀՈՒՄ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Ստացվել է չերմաստաձգականության հարթ ստացիոնար խնդրի լուծումը ջերմության կետային աղբյուրով և հոսքով կիսաանվերջ օրթոտրոպ աղի համար չերմամեկուսացված եզրի վրա խառը մեխանիկական պայմանների գեղարվում:

Պրոպագործվել է ֆուրյեյի ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդը, որը թույլ է տվել ջերմային լարումների որոշման խնդիրը թերևս «զույգ» ինտեգրալ համասարումների, որոնք ունեն հայտնի լուծում:

TEMPERATURE STRESSES IN A PARTLY FIXED ORTHOTROPIC PLATE WITH A SOURCE AND FLOW OF HEAT

A. D. KHANZHOV

S u m m a r y

A plane stationary problem of thermoelasticity for a semi-infinite orthotropic plate is solved with a concentrated source and flow of heat and mixed mechanic conditions on the heat-insulated boundary.

By means of the Fourier integral transformation method the problem of the field temperature determination is reduced to the dual integral equation having a known solution.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков В. Вопросы термоупругости. М.: АИ СССР, 1962.
2. Аницикий С. Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957.
3. Снегдон И. Преобразования Фурье. М.: ИЛ, 1955.
4. Удадел А. Н. Температурные напряжения в пластинках, ограниченных двухсязным контуром. Изд. Саратовского университета, 1975.
5. Грелистейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, суммы, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
6. Удалел А. Н. Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. Изд. Саратовского университета, 1967.
7. Бандури Р. Д. Первая основная задача кусочно-однородной ортотропной плоскости с разрезом, перпендикулярным прямой раздела.— Сообщ. АН Груз.ССР, 1978, т. 91, № 3.

Тамбовское высшее военное авиационное инженерное училище им. Ф. Э. Дзержинского

Поступила в редакцию  
20.11.1981