ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXV, № 6, 1982 Механика

# О СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, ПОРОЖДЕННОГО ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ НА ДВУХ ИНТЕРВАЛАХ, И ИХ ПРИЛОЖЕНИИ К КОНТАКТНЫМ ЗАДАЧАМ

МХИТАРЯН С. М.

Ряд спектральных соотношений для интегральных операторов, встречающихся в разнообразных задачах теории упругости и математической физики, установлен в работах Г. Я. Попова [1—3], а также в других работах этого автора, подробная библиография которых приведена в [4]. Эти соотношения, содержащие ортогональные многочлены, позволяют получить эффективное решение обширного класса контактных и смешанных задач механики деформируемого тела. Применению аппарата ортогональных многочленов посвящена и работа [5].

В настоящей работе методами теории логарифмического потенциала устанавливается спектральное соотношение, дающее нечетные собственные функции логарифмического ядра в случае двух симметрических интервалов. Приводятся также четные собственные функции. Обе они являются многочленами Чебышева с видоизмененными аргументами. При помощи экспоненциальной замены переменных найдены также собственные функции родственного логарифмического ядра. В качестве приложения полученных результатов построено решение контактной задачи о вдавливании двух одинаковых кососимметрически нагруженных штампов в упругую полуплоскость.

Нечетные собственные функции логарифмического ядра в случае двух симметрических интервалов, как представляется автору, здесь приводятся впервые.

1. Введем в рассмотрение логарифмический потенциал

$$V(x, y) = \int_L \ln \frac{1}{\sqrt{(x-s)^2 + y^2}} \varphi(s)\, ds \tag{1.1}$$

где $L = \{x : b \leqslant |x| \leqslant a\}$. При этом предполагается, что плотность источников обладает конечной мощностью, то есть

$$P = \int_L \varphi(s)\, ds < \infty$$

Легко видеть, что при $r \to \infty$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2})$

$$V(x, y) = P \ln \frac{1}{r}$$

Чтобы получить затухающий на бесконечности потенциал, перейдем к функции

$$U(x, y) = V(x, y) + P \ln \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1.2)$$

Тогда интегральное уравнение

$$\int_L \ln \frac{1}{|x - s|} \varphi(s)\, ds = f(x) \qquad (1.3)$$

эквивалентно следующей внешней краевой задаче Дирихле:

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta U = 0 \quad (x, y) \in L \quad (x^2 + y^2 \neq 0) & \\ U(x, y)\big|_{y=0} = f(x) + P \ln |x| \quad (b < |x| < a) & (1.4) \\ U(x, y) \to 0, \quad x^2 + y^2 \to \infty & \end{array} \right.$$

После того как построено решение задачи (1.4), плотность источников будет определяться по формуле

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi} \lim_{y \to +0} \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \quad (b < |x| < a) \qquad (1.5)$$

Решение задачи (1.4) построим методом конформного отображения. С этой целью заметим, что функция ([6], стр. 720)

$$z = b \operatorname{sn}\left(\frac{K'}{\pi} \ln \zeta,\ k\right) \qquad (1.6)$$

комплексную плоскость $z = x + iy$, разрезанную вдоль двух симметрических отрезков вещественной оси $[-a, -b]$ и $[b, a]$, совокупность которых обозначена через $L$, отображает на круговое кольцо

$$q_0 < \rho < 1/q_0 \qquad q_0 = \exp\left(-\pi \frac{K}{K'}\right)$$

комплексной плоскости $\zeta = \rho e^{i\tau} = \xi + i\eta$. Здесь $\operatorname{sn}(u, k)$ — эллиптическая функция Якоби [6, 7] модуля $k = b/a$.

$$K = K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}$$

полный эллиптический интеграл первого рода*, а

$$K' = K(k') = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k'^2 t^2)}} = \int_0^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - 1)(1 - k^2 t^2)}}$$

* Здесь и далее для простоты модуль $k$ часто не записывается.

где $k' = \sqrt{1-k^2}$ — дополнительный модуль. Отметим, что при конформном отображении (1.6) верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ отображается на верхнее полукольцо $\{q_0 < \rho < 1/q_0;\ 0 < \varphi < \pi\}$, нижняя полуплоскость, следовательно, на нижнее полукольцо $\{q_0 < \rho < 1/q_0,\ -\pi < \varphi < 0\}$, а бесконечно удаленная точка плоскости $z$ переходит в точку $\zeta = -1$ плоскости $\zeta$. Кроме того, верхний берег разреза по отрезку $[b, a]$ переходит в верхнюю полуокружность внешней окружности $\rho = 1/q_0$ кольца, а нижний берег — в нижнюю полуокружность этой же окружности. Что касается разреза по отрезку $[-a, -b]$, то его верхний берег переходит в верхнюю полуокружность внутренней окружности $\rho = q_0$ кольца, а нижний берег — в нижнюю полуокружность этой же окружности.

Далее, удобно ввести функцию

$$w = u + iv = \frac{K'}{\pi} \ln \zeta \tag{1.7}$$

отображающую прямоугольник $\{-K \leqslant u \leqslant K;\ -K' \leqslant v \leqslant K'\}$ на упомянутое круговое кольцо. Отделяя в (1.7) действительную и мнимую части, будем иметь

$$u = \frac{K'}{\pi} \ln \rho, \quad v = \frac{K'}{\pi} \varphi$$
$$(q_0 \leqslant \rho \leqslant 1/q_0; \quad -\pi < \varphi \leqslant \pi) \tag{1.8}$$

Теперь с учетом (1.7) функцию (1.6) можем записать в виде

$$z = b \operatorname{sn}(u + iv,\ k) \tag{1.9}$$

откуда

$$x = b\,\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn}(iv) \operatorname{dn}(iv)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(iv)}$$
$$y = -ib\,\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn}(iv) \operatorname{sn}(iv)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(iv)} \tag{1.10}$$

где $\operatorname{cn}(u, k)$ и $\operatorname{dn}(u, k)$ — также эллиптические функции Якоби [6, 7], а $u$ и $v$ даются формулами (1.8).

Легко обнаружить, что координатной линии $u = -K$ соответствует дважды покрываемый отрезок $[-a, -b]$ или, согласно сказанному выше, внутренняя окружность $\rho = q_0$ кольца, а координатной линии $u = K$ — дважды покрываемый отрезок $[b, a]$ или внешняя окружность $\rho = 1/q_0$ кольца. Так как $\operatorname{sn}(K, k) = 1$, то на координатной линии $u = K$ по первой формуле (1.10) будем иметь

$$x = b\frac{\operatorname{cn}(iv) \operatorname{dn}(iv)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(iv)} \quad (-K' \leqslant v \leqslant K')$$

Воспользовавшись формулами преобразования эллиптических функций Якоби с чисто мнимыми аргументами ([7], стр. 395), отсюда получим

$$x = \frac{b}{\operatorname{dn}(v,\ k')} \quad (-K' < v \leqslant K') \tag{1.11}$$

С другой стороны, приняв во внимание выражение функции $\operatorname{dn}(v,\ k')$ через эллиптический интеграл ([7], стр. 378), после простых операций находим

$$v = \int_1^{x/b} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k'^2t^2)}} \quad (b < x < a) \tag{1.12}$$

Для $-a \leqslant x \leqslant -b$ эта формула должна нечетно продолжаться. Из (1.12) очевидным образом вытекает, что когда $x$ возрастает от $b$ до $a$, то $v$ возрастает от $0$ до $K'$ и, следовательно, ею дается зависимость между переменными $v$ и $x$.

Далее, исходя из (1.11) и (1.8), положим

$$\left.\begin{aligned} f_1(\varphi) &= f\left[-\frac{b}{\operatorname{dn}((K'/\pi)\varphi,\ k')}\right] \\ f_2(\varphi) &= f\left[\frac{b}{\operatorname{dn}((K'/\pi)\varphi,\ k')}\right] \end{aligned}\right\} \quad (-\pi < \varphi \leqslant \pi) \tag{1.13}$$

Очевидно, что функция $f_1(\varphi)$ определена на внутренней окружности $\rho = q_0$ кольца, а функция $f_2(\varphi)$ — на внешней окружности $\rho = 1/q_0$ этого же кольца. Обе они четные функции от $\varphi$. Теперь легко видеть, что краевая задача (1.4) для плоскости $z$ с разрезом по $L$ после конформного отображения (1.6) переходит в следующую краевую задачу для кругового кольца в плоскости $\zeta$:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 W}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2} = 0 \quad (q_0 < \rho < 1/q_0) \\ &W(\rho,\ \varphi)\big|_{\rho=q_0} = f_1(\varphi) - P\ln\left|\frac{\operatorname{dn}((K'/\pi)\varphi,\ k')}{b}\right| \\ &\hspace{20em}(-\pi < \varphi \leqslant \pi) \\ &W(\rho,\ \varphi)\big|_{\rho=1/q_0} = f_2(\varphi) - P\ln\left|\frac{\operatorname{dn}((K'/\pi)\varphi,\ k')}{b}\right| \\ &W(1,\ \pm\pi) = 0 \end{aligned}\right. \tag{1.14}$$

где $W(\rho,\ \varphi) = U(x,\ y)$, а связь между переменными $\rho$, $\varphi$ и $x$, $y$, осуществляется посредством формул (1.8) и (1.10).

Формулу (1.5) также преобразуем к новым переменным, для чего запишем

$$\frac{\pi\rho}{K'}\frac{\partial W}{\partial\rho} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\pi}{K'}\frac{\partial W}{\partial\varphi}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Отсюда

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\pi}{K'\Delta_0}\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial u}-\rho\frac{\partial W}{\partial\rho}\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

где

$$\Delta_0=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2$$

Но из (1.9) и (1.10) будем иметь

$$\Delta_0=b^2\,|\operatorname{cn}(u+iv)\operatorname{dn}(u+iv)|^2$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=b\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u\operatorname{cn}(iv)\operatorname{dn}(iv)\,\frac{1+k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2(iv)}{[1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2(iv)]^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{ib\operatorname{sn}u\operatorname{sn}(iv)}{[1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2(iv)]^2}\Big\{2k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{cn}^2(iv)\operatorname{dn}^2(iv)-$$

$$-[\operatorname{dn}^2(iv)+k^2\operatorname{cn}^2(iv)][1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2(iv)]\Big\}$$

Поскольку $\partial x/\partial u|_{u=\pm K}=0$, то (1.5) примет вид

$$\varphi(x)=\frac{i\operatorname{sn}(iv)}{bK'\,|\operatorname{cn}(K+iv)\operatorname{dn}(K+iv)|^2}\left|\rho\frac{\partial W}{\partial\rho}\right|_{u=\pm K}\times$$

$$\times\frac{2k^2\operatorname{cn}^2(iv)\operatorname{dn}^2(iv)-[\operatorname{dn}^2(iv)+k^2\operatorname{cn}^2(iv)]\,[1-k^2\operatorname{sn}^2(iv)]}{[1-k^2\operatorname{sn}^2(iv)]^2}$$

$$(0<v<K';\ \ b<|x|<a)$$

После некоторых несложных преобразований получим

$$\varphi(x)=\frac{\operatorname{dn}^2(v,\ k')}{bK'k'^2\operatorname{sn}(v,\ k')\operatorname{cn}(v,\ k')}\left|\rho\frac{\partial W}{\partial\rho}\right|_{u=\pm K}\qquad(0<v<K';\ b<|x|<a)$$

С другой стороны, из (1.11)

$$\frac{dx}{dv}=\frac{bk'^2\operatorname{sn}(v,\ k')\operatorname{cn}(v,\ k')}{\operatorname{dn}^2(v,\ k')}$$

с учетом чего можем записать

$$\varphi(x)=\frac{1}{K'}\frac{dv}{dx}\left|\rho\frac{\partial W}{\partial\rho}\right|_{u=\pm K}\qquad(0<v<K';\ b<|x|<a)$$

В дальнейшем, ограничиваясь четной или нечетной функцией $f(x)$ в исходном интегральном уравнении (1.3) и приняв во внимание (1.12), формулу вычисления плотности источников окончательно можем представить в виде

$$\varphi(x) = \frac{a}{K' \sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}} \left[ \rho \frac{\partial W}{\partial \rho} \right]_{\rho=1/q_0} \qquad (b < x < a) \tag{1.15}$$

2. Приступим к решению задачи (1.14). Метод разделения переменных в разбираемом случае даст ([8], стр. 387—388)

$$W(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \rho^n + \frac{B_n}{\rho^n} \right] \cos n\varphi + C \ln \rho + D \tag{2.1}$$

$$(q_0 < \rho < 1/q_0, \quad -\pi < \varphi \leqslant \pi)$$

Для определения неизвестных коэффициентов $A_n$, $B_n$, $C$ и $D$ положим

$$f_k(\varphi) = f_0^{(k)} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)} \cos n\varphi \quad (k = 1, 2)$$

$$\ln \left[ \mathrm{dn}\left( \frac{K'}{\pi} \varphi, \ k' \right) \right] = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\varphi \quad (-\pi < \varphi < \pi) \tag{2.2}$$

Тогда из второго и третьего условий задачи (1.14) при помощи (2.1) и (2.2) находим

$$A_n = \frac{(f_n^{(1)} - P\alpha_n)\, q_0^n - (f_n^{(2)} - P\alpha_n)\, q_0^{-n}}{q_0^{2n} - q_0^{-2n}}$$

$$B_n = \frac{(f_n^{(2)} - P\alpha_n)\, q_0^n - (f_n^{(1)} - P\alpha_n)\, q_0^{-n}}{q_0^{2n} - q_0^{-2n}} \tag{2.3}$$

$$C = \frac{f_0^{(1)} - f_0^{(2)}}{2 \ln q_0}, \quad D = \frac{f_0^{(1)} + f_0^{(2)}}{2} + P \ln b - \alpha_0 P$$

Далее отдельно рассмотрим симметрический и кососимметрический случаи.

В симметрическом случае $f_1(\varphi) = f_2(\varphi)$ и, следовательно, можно положить

$$f_n^{(1)} = f_n^{(2)} = g_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

с учетом чего из (2.3) будем иметь

$$A_n = B_n = \frac{g_n - P\alpha_n}{q_0^n + q_0^{-n}} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$C = 0, \quad D = g_0 + P(\ln b - \alpha_0)$$

Подставляя эти выражения коэффициентов в (2.1), получим

$$W(\rho, \varphi) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n - P\alpha_n}{\mathrm{ch}\left( \frac{\pi n K}{K'} \right)} (\rho^n + \rho^{-n}) \cos n\varphi + P(\ln b - \alpha_0) + g_0 \tag{2.4}$$

$$(q_0 < \rho < 1/q_0; \ -\pi < \varphi \leqslant \pi)$$

Наконец, удовлетворяя последнему условию краевой задачи (1.14), определим неизвестную до сих пор величину $P$:

$$P = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n g_n}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi n K}{K'}\right)}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha_n}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi n K}{K'}\right)} - \ln b} \tag{2.5}$$

Итак, решение краевой задачи (1.14) в симметрическом случае дается формулами (2.4), (2.5).

Решение же интегрального уравнения (1.3) в разбираемом случае согласно (1.15) и (2.4) будет выражаться формулой

$$\varphi(x) = \frac{a}{K'\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}} \sum_{n=1}^{\infty} (g_n - P\alpha_n)\, n \operatorname{th}\left(\frac{\pi n K}{K'}\right) T_n(X) \tag{2.6}$$

$$(b < x < a)$$

где $T_n(X)$ — многочлены Чебышева первого рода, а

$$X = \cos\varphi, \quad \varphi = \frac{\pi}{K'} \int_1^{x/b} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} \quad (b < x < a) \tag{2.7}$$

Здесь учтено (1.12) и второе соотношение (1.8).

Займемся определением коффициентов $\alpha_n$. С этой целью воспользуемся известным разложением ([9], стр. 926, ф. (22))

$$\ln[\operatorname{dn}(u, k)] = -8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \frac{q^{2n-1}}{1-q^{2(2n-1)}} \sin^2\left[(2n-1)\frac{\pi u}{2K}\right] \tag{2.8}$$

где $q = \exp(-\pi(K'/K))$, а ряд сходится в полосе

$$\left|\operatorname{Im}\left(\frac{\pi u}{2K}\right)\right| < \frac{\pi}{2}\frac{K'}{K}$$

После простых преобразований (2.8) переходит в следующее:

$$\ln[\operatorname{dn}(v, k')] = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_0^{2n-1}}{(2n-1)[1-q_0^{2(2n-1)}]} +$$

$$+4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_0^{2n-1}}{(2n-1)[1-q_0^{2(2n-1)}]} \cos\left[(2n-1)\frac{\pi v}{K'}\right]$$

С другой стороны, положив в (2.8) $u = K$, будем иметь

$$\frac{1}{2}\ln k' = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{(2n-1)[1-q^{2(2n-1)}]}$$

Если в этом разложении заменим $k$ на $k'$, то окончательно можем записать

$$\ln\left[\operatorname{dn}\left(\frac{K'}{\pi}\varphi,\, k'\right)\right]=\frac{1}{2}\ln k+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_0^{2n-1}}{(2n-1)\left[1-q_0^{2(2n-1)}\right]}\cos(2n-1)\varphi$$

$$(-\pi<\varphi<\pi)$$

$$\left(q_0=\exp\left(-\pi\frac{K}{K'}\right)\right)$$

Отсюда непосредственно вытекает, что

$$\alpha_0=\ln\sqrt{k},\ \alpha_{2n}=0;\ \alpha_{2n-1}=\frac{4q_0^{2n-1}}{(2n-1)\left[1-q_0^{2(2n-1)}\right]}\quad (n=1,\,2,\ldots)\qquad (2.9)$$

Итак, коэффициенты второго разложения (2.2) выражаются формулами (2.9).

Следует отметить, что, поскольку отдельные гармоники в (2.4) не удовлетворяют последнему условию задачи (1.14), то разложения (2.4) и (2.6) в конечном итоге не приводят к спектральному соотношению, дающему четные собственные функции логарифмического ядра в случае двух симметрических интервалов. Тем не менее, они представляют самостоятельный интерес и более того, что важно, при их помощи построено решение интегрального уравнения (1.3).

Но с другой стороны, исходя из известных соотношений

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|\xi-\eta|}\,\frac{T_n(\eta)\,d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}=\begin{cases}(1/n)\,T_n(\xi) & (n=1,\,2,\ldots)\\ \ln 2 & (n=0)\end{cases}$$

при помощи замены переменных*

$$\xi=\frac{2x^2-1-k^2}{1-k^2};\qquad \eta=\frac{2s^2-1-k^2}{1-k^2}$$

придем к следующему:

$$\frac{1}{\pi}\int_L\ln\frac{1}{|x-s|}\,\frac{T_n\left(\dfrac{2s^2-b^2-a^2}{a^2-b^2}\right)|s|\,ds}{\sqrt{(a^2-s^2)(s^2-b^2)}}=\begin{cases}\dfrac{1}{2n}\,T_n\left(\dfrac{2x^2-b^2-a^2}{a^2-b^2}\right) & (n=1,\,2,\ldots)\\[2ex] \ln\dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} & (n=0)\end{cases}\qquad (2.10)$$

---

* Это преобразование использовано в работе [10] при построении системы ортогональных многочленов на двух симметрических интервалах.

Соотношением (2.10) даются четные собственные функции. Сопоставление (2.6) и (2.10) показывает, что входящие в них весовые функции разные.

Обращаясь теперь к кососимметрическому случаю, когда $f_1(\varphi) = -f_2(\varphi)$, в первом разложении (2.2) положим

$$f_n^{(1)} = -f_n^{(2)} = -h_n \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

В разбираемом случае $P = 0$, что автоматически обеспечивает условие затухания исходного логарифмического потенциала $V(x,\ y)$ на бесконечности.

Тогда из (2.3) будем иметь

$$A_n = -B_n = \frac{h_n}{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\pi n K}{K'}\right)} \quad (n = 1,\ 2, \ldots)$$

$$C = -\frac{h_0}{\ln q_0} = \frac{h_0 K'}{\pi K}; \quad D = 0$$

Подставляя эти выражения коэффициентов в (2.1), получим

$$W(\rho,\ \varphi) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\mathrm{sh}\left(\frac{\pi n K}{K'}\right)} (\rho^n - \rho^{-n}) \cos n\varphi + \frac{h_0 K'}{\pi K} \ln \rho \tag{2.11}$$

$$(q_0 < \rho < 1/q_0;\ -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi)$$

Очевидно, что функция $W(\rho,\ \varphi)$ из (2.11), а также любая ее гармоника удовлетворяют последнему условию задачи (1.14). Соответствующая потенциалу (2.11) плотность источников согласно (1.15) будет выражаться формулой

$$\gamma(x) = \frac{a}{K' \sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} n h_n \,\mathrm{cth}\left(\frac{\pi n K}{K'}\right) T_n(X) + \frac{h_0 K'}{\pi K} \right] \tag{2.12}$$

$$(b < x < a)$$

где опять приняты обозначения (2.7).

Пусть теперь, в частности,

$$h_m = 0 \quad (m \neq n); \quad h_n = 1 \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

Тогда каждое из разложений (2.11) и (2.12) будет содержать только одну гармонику. Подставляя эти гармоники в (1.1) и принимая во внимание, что в (1.2) $P = 0$, придем к следующему спектральному соотношению:

$$\int_b^a \ln \frac{x + s}{|x - s|} \frac{T_n(S)\, ds}{\sqrt{(a^2 - s^2)(s^2 - b^2)}} = \lambda_n T_n(X) \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots) \tag{2.13}$$

где

$$S = \cos\theta; \quad \theta = \frac{\pi}{K'}\int\limits_{1}^{s/b} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} \qquad (b < s < a)$$

$$\lambda_n = \frac{K'}{an}\, th\left(\frac{\pi n K}{K'}\right), \quad \lambda_0 = \frac{\pi K}{a}$$

Соотношением (2.13) даются нечетные собственные функции логарифмического ядра в случае двух симметрических интервалов.

На основе (2.11) и (2.12) можно установить также родственное с (2.13) соотношение, имеющее место на вещественной оси $Ox$ вне $L$, точнее на положительной полуоси вне интервала $b < x < a$. С этой целью заметим, что из (1.10) при $v = 0$

$$x = b\,\mathrm{sn}\,u, \quad y = 0 \quad (-K \leqslant u \leqslant K)$$

то есть координатная линия $v = 0$ представляет собой отрезок $-b \leqslant x \leqslant b$ вещественной оси $Ox$. С другой стороны, приняв во внимание известные представления эллиптических функций Якоби в окрестности точки $ik'$ ([7], стр. 392) и положив $v = v' - K'$, можем записать

$$\mathrm{sn}\,(iv' - iK') \simeq -\frac{i}{kv'}; \quad \mathrm{cn}\,(iv' - iK') \simeq \frac{1}{kv'}; \quad \mathrm{dn}\,(iv' - iK') \simeq \frac{1}{v'}$$

$$(v' \to 0)$$

Отсюда и из (1.10) вытекает, что при $v = K'$

$$x = \frac{a}{\mathrm{sn}\,u}, \quad y = 0 \quad (-K \leqslant u \leqslant K)$$

то есть координатная линия $v = K'$ представляет собой два луча вещественной оси $|x| > a$. Чтобы иметь дело только с отрезками положительной полуоси, будем считать $0 \leqslant u \leqslant K$.

Тогда в каждом из разложений (2.11) и (2.12) опять удерживая только по одной гармонике, соответствующих друг другу, а затем подставляя их выражения в (1.1), после несложных выкладок придем к интегральным соотношениям

$$\int\limits_b^a \ln\frac{x+s}{|x-s|}\,\frac{T_n(S)\,ds}{\sqrt{(a^2-s^2)(s^2-b^2)}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{K'}{an\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{\pi n K}{K'}\right)}\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{\pi n u}{K'}\right) & (0 < x < b) \\[3ex] \dfrac{(-1)^n K'}{an\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{\pi n K}{K'}\right)}\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{\pi n u}{K'}\right) & (x > a) \\[2ex] (n = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

$$\int_{b}^{a} \ln \frac{x+s}{|x-s|} \frac{ds}{\sqrt{(a^2-s^2)(s^2-b^2)}} = \frac{\pi}{a} u \quad (0 < x < b; \quad x > a)$$

где

$$u = \int_0^{x/b} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (0 < x < b)$$

$$u = \int_0^{a/x} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (x > a)$$

Здесь учтено, что согласно первой формуле (1.8) $\rho = \exp(\pi u/K')$. Очевидно, что случай $n = 0$ исчерпывается предельным переходом $n \to 0$ так как

$$\lim_{n \to 0} \frac{\operatorname{sh} \dfrac{\pi n u}{K'}}{n} = \frac{\pi u}{K'}$$

Последнее обстоятельство дает возможность объединять все эти формулы. Окончательно получим

$$\begin{gathered}\int_{b}^{a} \ln \frac{x+s}{|x-s|} \frac{T_n(s)\,ds}{\sqrt{(a^2-s^2)(s^2-b^2)}} = \frac{K'}{an \operatorname{ch}\left(\dfrac{\pi n K}{K'}\right)} \times \\ \times [H(b-x) + (-1)^n H(x-a)] \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n u}{K'}\right) \\ (n = 0, 1, 2, \ldots, \quad 0 < x < b; \quad x > a)\end{gathered} \tag{2.14}$$

где $H(x)$ — известная функция Хевисайда, а

$$u = \int_0^{c(x)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \qquad c(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{b} & (0 < x < b) \\ \dfrac{a}{x} & (x > a) \end{cases} \tag{2.15}$$

Соотношение (2.14) вместе с (2.13) определяет значение входящего в их левую часть интеграла на положительной полуоси и, следовательно, на всей вещественной оси.

Далее, в (2.13) положим

$$a = e^{\alpha/2}, \quad b = e^{-\alpha/2} (\alpha > 0); \quad x = e^{t/2}, \quad s = e^{\tau/2}$$

После простых выкладок получим

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln\left| \operatorname{cth}\frac{\xi-\eta}{4}\right| \frac{T_n(S)\,ds}{\sqrt{(a^2-s^2)(s^2-b^2)}} = \mu_n T_n(X) \qquad (2.16)$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

где

$$\mu_n = 2\lambda_n \ (n=1,\ 2,\ldots), \quad \mu_0 = 2\lambda_0 = 2\pi \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right) K(\exp(-\alpha))$$

$$S=\cos\theta; \quad \theta = \frac{\pi \exp\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2K'} \int_{-\alpha}^{\xi} \frac{d\tau}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}\tau)}}$$

$$X=\cos\varphi; \qquad \varphi = \frac{\pi \exp\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2K'} \int_{-\alpha}^{\eta} \frac{d\tau}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}\tau)}}$$

Спектральным соотношением (2.14) даются собственные функции ядра

$$\ln\left| \operatorname{cth}\frac{\xi-\eta}{4}\right| \quad (-\alpha<\xi,\ \eta<\alpha)$$

Совершенно аналогичным образом, как выше, можно получить родственное с (2.16) соотношение, справедливое при $|\xi| > \alpha$. Однако, на этом останавливаться не будем.

В заключение пункта отметим, что вопрос о возможности предельного перехода $b \to 0$ ($a = \mathrm{const}$) или $k \to 0$ в полученных результатах связан с определенными трудностями и здесь не обсуждается.

3. В качестве примера приложения полученных результатов рассмотрим контактную задачу о вдавливании двух одинаковых штампов в упругую полуплоскость без учета сил трения и сцепления. Пусть они соединены между собой абсолютно жестким стержнем и под действием вертикальной силы $P$, приложенной в середине стержня, и опрокидывающего момента $M$ система штампов вдавливается в упругую полуплоскость, вследствие чего появляется контактная зона вдоль $L$. Тогда определение нормального давления $p(x)$ под штампами сводится к решению интегрального уравнения [11, 12]

$$\int_L \ln\frac{1}{|x-s|}\, p(s)\, ds = \frac{\delta+\gamma x - f(x)}{\vartheta_0} \qquad (3.1)$$

$$\left(\vartheta_0 = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E},\quad x\in L\right)$$

где $\delta$ — осадка штампов, $\gamma$ — угол их поворота, а $f(x)$ — характеризующая основание штампов функция, $\nu$ и $E$ — упругие константы полуплоскости. Представляя функцию $f(x)$ в виде суммы четного и нечетного компонентов

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x) \quad (f_\pm(-x) = \pm f_\pm(x))$$

уравнение (3.1) в свою очередь сведем к следующим:

$$\int_b^a \ln\frac{1}{|x^2 - s^2|}\, p_+(s)\, ds = \frac{\delta - f_+(x)}{\vartheta_0} \tag{3.2}$$

$$(b < x < a)$$

$$\int_b^a \ln\frac{x + s}{|x - s|}\, p_-(s)\, ds = \frac{\gamma x - f_-(x)}{\vartheta_0} \tag{3.3}$$

Уравнением (3.2) описывается симметрический случай нагружения штампов, а уравнением (3.3) — кососимметрический случай.

Решение уравнений (3.2) и (3.3) можно построить методом М. Г. Крейна [13, 14], притом решения этих уравнений при правой части, равной единице, непосредственно получаются из (2.10) и (2.13), когда $n = 0$.

Здесь ограничимся обсуждением кососимметрического случая и к уравнению (3.3) применим изложенные выше результаты. С этой целью положим

$$p_-(x) = \frac{1}{\sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}} \sum_{n=0}^{\infty} p_n T_n(X) \tag{3.4}$$

$$(b < x < a)$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n T_n(X); \qquad g(x) = \frac{1}{\vartheta_0}\left[\gamma x - f_-(x)\right]$$

Подставляя (3.4) в (3.3) и используя (2.13), легко находим неизвестные коэффициенты $p_n$:

$$p_n = \frac{g_n}{\mu_n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Далее запишем моментные условия равновесия штампов

$$M = 2\int_b^a x p_-(x)\, dx$$

Внося сюда выражение $p_-(x)$ из (3.4), будем иметь

$$M = 2\sum_{n=0}^{\infty} J_n \frac{g_n}{\mu_n}$$

где

$$J_n = \int_b^a \frac{x T_n(X)\, dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

С учетом (1.11) и (2.7) этот интеграл преобразуется к следующему:

$$J_n = \frac{kK'}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos n\varphi\, d\varphi}{\mathrm{dn}\left(\frac{K'}{\pi}\varphi,\, k'\right)} \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

С другой стороны, приняв во внимание разложение 8.146.7 ([9], стр. 925), можем записать

$$\frac{1}{\mathrm{dn}\left(\frac{K'}{\pi}\varphi,\, k'\right)} = \frac{\pi}{2kK'}\left[1 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q_0^n}{1 + q_0^{2n}} \cos n\varphi\right]$$

$$\left(0 < \varphi < \pi; \quad q_0 = \exp\left(-\pi\frac{K}{K'}\right)\right)$$

откуда непосредственно вытекает, что

$$J_n = \frac{(-1)^n \pi}{2\,\mathrm{ch}\left(\frac{\pi n K}{K'}\right)} \quad (n = 0,\ 1,\ 2 \ldots) \tag{3.5}$$

С учетом последнего равенства получим

$$M = \pi\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{g_n}{\mu_n\,\mathrm{ch}\left(\frac{\pi n K}{K'}\right)} \tag{3.6}$$

Теперь воспользуемся условиями ортогональности

$$\int_b^a T_n(X)\, T_m(X) \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}} = \begin{cases} \frac{K'}{a} & (n = m = 0) \\ \frac{K'}{2a} & (n = m \neq 0) \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

которые дают

$$g_0 = \frac{a}{\vartheta_0 K'}(\gamma J_0 - f_0), \quad g_n = \frac{2a}{\vartheta_0 K'}(\gamma J_n - f_n) \quad (n = 1,\ 2, \ldots) \tag{3.7}$$

Для определения $\gamma$ остается (3.7) подставить в (3.6) и учесть (3.5). Опуская промежуточные простые выкладки, приведем окончательный результат:

$$\gamma = \frac{2\vartheta_0 K K'}{\pi a^2}\, \frac{M + \frac{a^2}{\vartheta_0 K'}\left[\frac{f_0}{K} + \frac{2\pi}{K'}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n f_n}{\mathrm{sh}\left(\frac{\pi n K}{K'}\right)}\right]}{1 + \frac{4\pi K}{K'}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\mathrm{sh}\left(\frac{\pi n K}{K'}\right)}} \tag{3.8}$$

В случае штампов с плоскими основаниями $f_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и, следовательно, (3.8) принимает вид

$$\gamma = \frac{2\theta_0 KK'}{\pi a^2} \frac{M}{1 + \frac{4\pi K}{K'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\mathrm{sh}\left(\frac{\pi n K}{K'}\right)}} \tag{3.9}$$

Заметим, что входящий в (3.9) ряд сходится с довольно большой скоростью. Можем найти также вертикальные перемещения граничных точек упругой полуплоскости вне штампов. Согласно (2.14) они будут выражаться формулой

$$v(x) = \frac{K'}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left[H(b-x) + (-1)^n H(x-a)\right] \frac{g_n \,\mathrm{sh}\left(\frac{\pi n u}{K'}\right)}{n \mu_n \,\mathrm{ch}\left(\frac{\pi n K}{K'}\right)}$$

$$(0 < x < b;\ x > a)$$

где коэффициенты $g_n$ даются формулами (3.7) и (3.9), а переменная $u$ — формулами (2.15).

В заключение отметим, что изложенные здесь результаты могут применяться к разнообразным смешанным задачам теории упругости, в частности, к задачам контактного взаимодействия стрингеров и тонкостенных включений с массивными телами.

Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

## ԵՐԿՈՒ ԻՆՏԵՐՎԱԼՆԵՐԻ ՎՐԱ ԼՈԳԱՐԻԹՄԱԿԱՆ ԿՈՐԻԶՈՎ ԾՆՎՈՂ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԵՎ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ՆՐԱՆՑ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ


### Ա մ փ ո փ ո ւ մ

*Լոգարիթմական պոտենցիալի տեսության մեթոդների օգնությամբ արտածվում է մի սպեկտրալ առնչություն, որը տալիս է երկու համաչափ միջակայքերի դեպքում լոգարիթմական կորիզի կենտ սեփական ֆունկցիաները։ Աշխատանքում բերվում են նաև զույգ սեփական ֆունկցիաները։ Այդ երկու տիպի ֆունկցիաներն էլ իրենցից ներկայացնում են ձևափոխված արգումենտով Չեբիշևի բազմանդամներ։ Որպես ստացված արդյունքների կիրառություն կառուցված է շեղ-համաչափ կերպով բեռնավորված երկու միատեսակ դրոշմների՝ առաձգական կիսահարթությանը սեղմելու կոնտակտային խնդրի լուծումը։*

# ON THE EIGENFUNCTIONS OF THE INTEGRAL OPERATOR PRODUCED BY THE LOGARITHMIC NUCLEUS AT TWO INTERVALS AND THEIR APPLICATION TO THE CONTACT PROBLEMS

S. M. MKHITARIAN


## Summary

By the methods of the theory of logarithmic potential a new spectral correlation has been established which yields odd eigenfunctions of the logarithmic nucleus in the case of two symmetric intervals. Even eigenfunctions are also reduced. The skew symmetric contact problem, in the case of two stamps, is considered as an application.


## ЛИТЕРАТУРА


1. *Попов Г. Я.* Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам.— ПММ, 1963, т. 27, № 5.
2. *Попов Г. Я.* Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения.— ПММ, 1966, т. 30, № 3.
3. *Попов Г. Я.* О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости.— ПММ, 1969, т. 33, № 3.
4. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976.
5. *Александров В. М., Кучеров В. А.* О методе ортогональных полиномов в плоских смешанных задачах теории упругости.— ПММ, 1970, т. 34, № 4.
6. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
7. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж.* Курс современного анализа. Ч. II. М.: Физматгиз, 1963.
8. *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
10. *Барков Г. И.* О некоторых системах многочленов, ортогональных на двух симметрических интервалах.— Изв. ВУЗов, Математика, 1960, № 4 (17).
11. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.—Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.
12. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980.
13. *Крейн М. Г.* Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода.— Докл. АН СССР, 1955, т. 100, № 3.
14. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М.: Наука, 1967.


Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила в редакцию
4. V. 1981