

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ИЗЛУЧЕНИЯ
 ВИБРИРУЮЩЕГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ, КОНТАКТИРУЮЩЕГО
 С ПЛАСТИНОЙ, ПОКРЫВАЮЩЕЙ СЛОЙ ЖИДКОСТИ

БОЕВ С. И., КОВАЛЕНКО Е. В.

В настоящее время акустические методы являются одними из основных и эффективных способов изучения фундаментальных физико-механических свойств различных объектов. Возбуждая колебания и анализируя закономерности их распространения, можно получать данные о структуре различных тел, об их механических характеристиках, их строении, исследовать механизмы, вызывающие затухание и изменения скоростей распространения акустических волн.

Объектом исследования данной работы является система, состоящая из вязкоупругой пластинки, покрывающей слой идеальной сжимаемой жидкости, и упругого стержня, жестко сцепленного с пластинкой и возбуждаемого периодически меняющейся во времени силой.

С помощью интегрального преобразования Фурье по продольной координате задача приведена к определению амплитуды давления под стержнем из интегрального уравнения первого рода типа свертки на конечном интервале с гладким ядром, корректно разрешимым лишь в пространстве обобщенных функций медленного роста.

Построены графики характерных виброакустических величин.

1. Рассмотрим следующую задачу о протекании идеальной сжимаемой жидкости в бесконечном плоском трубопроводе, изображенном на фиг. 1. Пусть с деформируемой стенкой трубопровода сцеплен упругий стержень длины l и ширины $2a$, подверженный действию периодически изменяющейся во времени нагрузки $P e^{-i\omega t}$, эксцентриситет приложения которой e . Будем считать, что в процессе колебаний стержня не происходит отслоения стенки трубопровода от жидкости.

В качестве физико-механической модели деформируемой стенки трубопровода взята модель вязкоупругой (линейный закон наследственности) тонкой пластинки Кирхгофа-Лява [1]

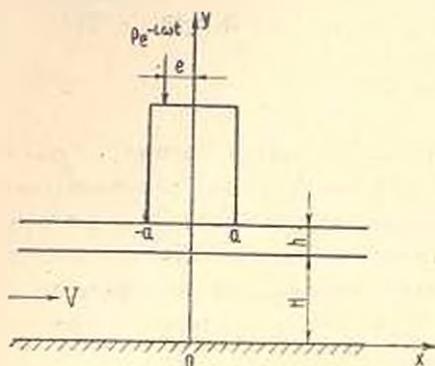
$$Dv^{(4)} + \gamma^* h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x, t) - q(x, t) +$$

$$+ \int_{-\infty}^t v^{(4)}(x, \tau) K(t - \tau) d\tau, \quad D = Gh^3 [6(1 - \nu)]^{-1} \quad (1.1)$$

Здесь v — перемещение точек срединной плоскости по оси y , $p(x, t)$ —

реактивное давление, действующее на пластинку со стороны жидкости, $q(x, t)$ — контактное давление, отличное от нуля лишь при $|x| \leq a$, h — толщина пластинки, ρ^* , G , $\nu = \text{const}$ — плотность, мгновенный модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала стенки, $K(t-\tau)$ — ядро релаксации, вид которого будет указан ниже.

Физико-механические свойства жидкости описываются линеаризованными относительно основного потока уравнениями идеальной жидкости при малых числах Маха [2]



Фиг. 1

$$\Delta \varphi - 2 \frac{M}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

$$p = -\rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (1.2)$$

$$v_x = V + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad M = \frac{V}{c}$$

где $\varphi(x, y, t)$ — потенциал возмущенных скоростей, $p(x, y, t)$ — давление в жидкости, V — скорость основного потока, c — скорость звука

в жидкости, v_x, v_y — проекции скорости частиц жидкости на оси координат.

Заметим, что к уравнениям (1.2) необходимо добавить граничные условия

$$y = H: \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + V \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.3)$$

$$y = 0: \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

также линеаризованные относительно основного потока.

Уравнения продольных и поперечных колебаний стержня соответственно имеют вид

$$E_s \frac{\partial^2 v_c}{\partial y^2} = \rho_c \frac{\partial^2 v_c}{\partial t^2}, \quad E_s J_s \frac{\partial^4 u_c}{\partial x^4} + \rho_c S_c \frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2} = 0 \quad (1.4)$$

E_s, ρ_c — модуль Юнга и плотности материала стержня, S_c — площадь поперечного сечения стержня, J_s — центральный момент площади его поперечного сечения, v_c, u_c — перемещения точек стержня вдоль осей y и x . Граничные условия для (1.4) запишутся в форме

$$y = H + h + l: -P e^{-i\omega t} = 2a E_c \frac{\partial v_c}{\partial y}, \quad u_c'' = 0$$

$$u_c' = P e (E_c J_s)^{-1} \exp(-i\omega t) \quad (1.5)$$

$$y = H + h: v_c = -e, \quad u_c' = 0, \quad u_c'' = 0$$

где $-\varepsilon(l)$ — неизвестное перемещение нижнего основания стержня. Кроме того, при $|x| \leq a$ в силу условий контакта стержня со стенкой будем иметь

$$v = v_c \quad (1.6)$$

С учетом относительной малости толщины стенки внесем условие (1.1) со срединной плоскости на границу слоя жидкости $y = H$. Разделяя далее в (1.1) — (1.5) временную и пространственные переменные, полагая $f(x, y, t) = \bar{f}(x, y) e^{-i\omega t}$ для всех функций, входящих в указанные соотношения, получим, опуская штрихи

$$D^* v^{(4)} - \rho^* h \omega^2 v = p(x) - q(x) \quad (1.7)$$

$$\Delta \varphi + 2kiM \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k^2 \varphi = 0, \quad p = -\rho \left(-i\omega \varphi + V \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=H} = -i\omega v + V \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad v = -\varepsilon, \quad k = \omega c^{-1}$$

$$D^* = D - \int_0^\infty K(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau$$

$$v_c = \frac{1}{\cos(ik_c)} \left[\frac{P}{2aE_c k_c} \sin k_c (H + h - y) - \varepsilon \cos k_c (H + h + l - y) \right]$$

$$u_c = \frac{Pc}{\lambda_c E_c J_c \Delta^*} [\operatorname{ch} \lambda_c (H + h - y) \operatorname{sh} \lambda_c l - \operatorname{sh} \lambda_c l \cos (H + h - y)]$$

$$k_c = \omega \sqrt{E_c \rho_c^{-1}}, \quad \lambda_c = \sqrt[4]{\frac{\rho_c S_c}{E_c J_c} \omega^2}, \quad \Delta^* = \operatorname{sh} \lambda_c l \cos \lambda_c l + \operatorname{ch} \lambda_c l \sin \lambda_c l$$

Применяя к (1.7) интегральное преобразование Фурье по координате x и используя условие отсутствия возмущений в жидкости на бесконечности, получим следующее выражение для амплитуды перемещений v при $y = H$:

$$v(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a q(i\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma \operatorname{sh}(\gamma H) e^{-i\xi(x-l)} d\xi}{(D^* \alpha^2 - \rho^* h \omega^2) \gamma \operatorname{sh}(\gamma H) - \rho (V\alpha + \omega)^2 \operatorname{ch}(\gamma H)}$$

$$\gamma = \gamma(\alpha) = (\alpha^2 - 2kMa - k^2)^{1/2} \quad (1.8)$$

Используя теперь условие контакта штампа со стенкой (1.6), получим интегральное уравнение относительно закона распределения контактных давлений $q(x)$. В безразмерных переменных с учетом обозначений

$$\xi' = \xi a^{-1}, \quad x' = x a^{-1}, \quad \lambda = \lambda a^{-1}, \quad \varepsilon' = \varepsilon a^{-1}, \quad e' = e a^{-1}, \quad u = u H$$

$$\varphi(x') = q(ax')H^2(D^*)^{-1}, \quad A = \rho^* \omega^2 h H^2(D^*)^{-1}, \quad B = \rho \omega^2 H^2(D^*)^{-1}$$

$$\omega(x') = v(ax')a^{-1}, \quad \beta = \omega H V^{-1}, \quad \gamma'(u) = (u^2 - 2\beta M^2 u - \beta^2 M^2)^{1/2}$$

оно будет иметь вид (штрихи далее будем опускать)

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) K\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) d\xi = \pi \varepsilon \quad (|x| \leq 1) \quad (1.9)$$

$$K(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} L(u) e^{-iaz} du \quad \left(z = \frac{x-\xi}{\lambda}\right)$$

$$L(u) = \frac{\gamma \operatorname{sh} \gamma}{(u^2 - A) \gamma \operatorname{sh} \gamma - B(1 + \beta^{-1}u)^2 \operatorname{ch} \gamma}$$

Заметим, что $L(\xi)$ является мероморфной в комплексной плоскости $\xi = u + iv$ функцией. имеет нули в точках

$$z_n^{\pm} = \beta M^2 \pm \sqrt{\beta^2 M^2 (1 + M^2) - \pi^2 n^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

и полюса, не лежащие на вещественной оси, имеющие асимптотическое представление

$$z_n^{\pm} = z_n^{\pm} + O(n^{-2}) \quad (|z_n^{\pm}| \ll |z_{n+1}^{\pm}|) \quad (n \rightarrow \infty)$$

если $A_1 = A\beta M \sin \beta M - B \cos \beta M \neq 0$.

В противном случае функция $L(u)$ будет иметь действительный однократный полюс $u = 0$ при $V \neq 0$. Контур интегрирования во второй формуле (1.9) выбирается в соответствии с принципом предельного поглощения и совпадает всюду с вещественной осью, отклоняясь от нее лишь при обходе полюса $u = 0$ сверху при $\beta M > BA^{-1} \sqrt{1 + AB^{-1}}$ и снизу при обратном неравенстве. Этот случай будет исследован в конце работы. При $V = 0$, $u = 0$ имеется двукратный полюс. Этот вариант задачи может быть полностью изучен методами работы [4].

К уравнению (1.9) необходимо еще добавить условия статики

$$\int_{-1}^1 \varphi(x) dx = \frac{H^2}{aD^* \cos(lk_c)} (P + 2a^2 E_c k_c \varepsilon \sin lk_c)$$

$$\int_{-1}^1 x \varphi(x) dx = \frac{P_e H^2}{D^* a^2 \Delta^2} (\operatorname{sh} k_c l + \sin k_c l) \quad (1.10)$$

Отметим также, что по физическому смыслу поставленной задачи будем требовать, чтобы $\omega'(x) \in C(-R, R)$ (R — сколь угодно большое число). Здесь $C(-R, R)$ — пространство непрерывных на интервале $(-R, R)$ функций.

Кроме того, следует заметить, что результаты работы [5, 6] дают основание утверждать, что контактные усилия, возникающие между штампом и стенкой трубопровода будут складываться из распределенной нагрузки, а также сосредоточенных сил и моментов, действующих на края линии контакта.

2. Исследуем теперь поставленную задачу с помощью полученного выше интегрального уравнения (1.9). Для этого изучим свойства его ядра и структуру решения. С учетом асимптотического поведения трансформанты Фурье ядра интегрального уравнения (1.9)

$$L(u) = E + O(u) \quad (u \rightarrow 0), \quad E = A_0 A_1^{-1}, \quad A_0 = \beta M \sin \beta M, \quad A_1 \neq 0$$

$$L(u) = u^{-1} + O(u^{-2}) \quad (u \rightarrow \infty)$$

докажем лемму.

Лемма. При всех значениях z из интервала $(-R, R)$, где R — любое, сколь угодно большое число, справедливо представление

$$K(z) = \frac{\pi}{12} |z|^3 + F(z), \quad F(z) \in B_5^1(-R, R) \quad (2.1)$$

$$F(z) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1 - (uz)^2/2}{u^4} - \frac{1}{u^4} \frac{A\gamma \operatorname{sh} \gamma + B(1 + \beta^{-1}u)^2 \operatorname{ch} \gamma}{(u^2 - A)\gamma \operatorname{sh} \gamma - B(1 + \beta^{-1}u)^2 \operatorname{ch} \gamma} e^{-iuz} \right\} du$$

$B_5^1(-R, R)$ — пространство функций, n -е производные которых удовлетворяют условию Гельдера на сегменте $[-R, R]$ с показателем $0 < \mu < 1$.

Доказательство леммы использует следующие интегралы:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-iuz}}{u^2} du = \frac{\pi}{2} |z|, \quad \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iuz} - 1 + (uz)^2/2}{u^4} du = \frac{\pi}{12} |z|^3$$

Изучим теперь структуру решения интегрального уравнения (1.9), для чего рассмотрим

$$\int_{-1}^1 |x - \xi|^2 \varphi(\xi) d\xi = 12 f(x) \quad (|x| \leq 1) \quad (2.2)$$

Согласно замечаниям п. 1, решение $\varphi(x)$ интегрального уравнения (2.2) должно содержать в виде слагаемых дельта-функции и их первые производные в точках $x = \pm 1$, которые бы отражали появление в контактных усилиях сосредоточенных сил и моментов на краях линии контакта. Вместе с тем, по физическому смыслу рассматриваемой задачи, как отмечалось ранее, $\omega^1(x) \in C(-R, R)$. Это условие накладывает ограниче-

ние на порядок обобщенной функции $\varphi(x)$. С учетом сказанного формулируем теорему.

Теорема 1. Если $f^{(4)}(x) \in C(-R, R)$, то решение интегрального уравнения (2.2) в пространстве обобщенных функций медленного роста Φ [7] существует, единственно и имеет вид

$$\varphi(x) = f^{(4)}(x) + P_1 \delta(x+1) + P_2 \delta(x-1) + M_1 \delta'(x+1) + M_2 \delta'(x-1) \quad (2.3)$$

причем постоянные P_j, M_j ($j=1, 2$) удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} -f^{(4)}(-1) - f^{(4)}(1) + P_1 - P_2 &= 0 \\ -f'''(-1) + f'''(1) - f''(-1) - f''(1) + M_1 + M_2 &= 0 \\ -f'''(-1) + f'''(1) - f''(-1) - f''(1) + P_1 + P_2 + M_1 - M_2 &= 0 \\ f''(-1) + f''(1) + 3f'(-1) - 3f'(1) + 3f(-1) + 3f(1) - M_1 + M_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $\delta(x), \delta'(x)$ — дельта-функция Дирака и ее первая производная, определяемые следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \delta^{(j)}(\xi - x) d\xi = \begin{cases} 0 & (x < a, x > b) \\ (-1)^j g^{(j)}(x+0) & (x = a) \\ (-1)^j g^{(j)}(x-0) & (x = b) \\ 1/2 (-1)^j [g^{(j)}(x-0) + g^{(j)}(x+0)] & (a < x < b) \end{cases} \quad (2.5)$$

$g(x)$ — произвольная функция такая, что существуют односторонние производные $g^{(j)}(x+0)$ и $g^{(j)}(x-0)$.

Для доказательства теоремы проверим, что функция $\varphi(x)$ вида (2.3) удовлетворяет уравнению (2.2). Действительно, подставляя ее в (2.2), используя формулу (2.5), приходим к выводу, что интегральное уравнение (2.2) обращается в тождество, если выполнены условия (2.4). Единственность полученного решения (2.3) следует из теоремы, приведенной в [7] на стр. 158.

Перепишем теперь интегральное уравнение (1.9) с учетом представления (2.1) в виде

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) |x - \xi|^2 d\xi &= 12f(x) \quad (|x| \leq 1) \\ f(x) &= \lambda^2 x - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) F\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) d\xi \end{aligned} \quad (2.6)$$

Предположим, что функция $\varphi(x) \in \Phi$ (с порядком равным единице). Тогда в силу свойств функции $F(z)$, указанных в лемме, будем иметь $f^{(4)}(x) \in C(-R, R)$. Отсюда с учетом теоремы 1 следует

Теорема 2. Если решение интегрального уравнения (2.6) существует в пространстве обобщенных функций медленного роста Φ , то оно имеет вид

$$\varphi(x) = \varphi^*(x) + P_1 \delta(x+1) + P_2 \delta(x-1) + M_1 \delta'(x+1) + M_2 \delta'(x-1) \quad (2.7)$$

Функция $\varphi^*(x) \in C(-1, 1)$ и удовлетворяет следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \varphi^*(x) + \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-1}^1 \varphi^*(\xi) F^{(4)}\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) d\xi = \\ = -\frac{1}{\pi\lambda} \left[P_1 F^{(4)}\left(\frac{x+1}{\lambda}\right) + P_2 F^{(4)}\left(\frac{x-1}{\lambda}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda} M_1 F^{(5)}\left(\frac{x+1}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda} M_2 F^{(5)}\left(\frac{x-1}{\lambda}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Постоянные P_j и M_j ($j=1, 2$) даются формулами (2.4).

Для доказательства теоремы, считая функцию $l(x)$ (2.6) временно известной, обратим интегральный оператор в (2.6) с ядром $|x-\xi|^3$. Согласно формуле (2.3) получим относительно $\varphi(x)$ следующее интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) F^{(4)}\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) d\xi = \\ = P_1 \delta(x+1) + P_2 \delta(x-1) + M_1 \delta'(x+1) + M_2 \delta'(x-1) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде (2.7). Подставляя (2.7) в (2.9) и используя свойства дельта-функции (2.5), приходим к интегральному уравнению (2.8). Отметим, что последнее является уравнением Фредгольма второго рода с непрерывным ядром и непрерывным свободным членом. Если уравнение (2.8) разрешимо при заданном значении параметра $\lambda \in (0, \infty)$, то функция $\varphi^*(x) \in C(-1, 1)$. При этом также однозначно разрешимо исходное интегральное уравнение (2.6).

Теорема 3. В классе функций $\varphi^*(x) \in C(-1, 1) \cap V(-1, 1)$ однородное уравнение (2.8)

$$\varphi^*(x) - \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-1}^1 \varphi^*(\xi) T\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) d\xi = 0 \quad (|x| < 1) \quad (2.10)$$

$$T(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A\gamma \operatorname{sh} \gamma + B(1 + \beta^{-1}u)^2 \operatorname{ch} \gamma}{(u^2 - A)\gamma \operatorname{sh} \gamma - B(1 + \beta^{-1}u)^2 \operatorname{ch} \gamma} e^{-iuz} du \quad (2.11)$$

не имеет положительных собственных значений. Здесь $V(-1, 1)$ — пространство функций, имеющих на сегменте $[-1, 1]$ конечное изменение.

Доказательство. Введем в рассмотрение трансформанту Фурье функции $q^*(x)$

$$\Phi^*(u) = \int_{-1}^1 q^*(x) e^{-iux} dx \quad (2.12)$$

и с учетом (2.11) перепишем однородное уравнение (2.10) следующим образом:

$$\Phi^*(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A\gamma^* \operatorname{sh} \gamma^* + B(1 + \beta^{-1} u^2) \operatorname{ch} \gamma^*}{(u^2 \lambda^2 - A)\gamma^* \operatorname{sh} \gamma^* - B(1 + \beta^{-1} u^2) \operatorname{ch} \gamma^*} \Phi^*(u) e^{-iux} du \quad (2.13)$$

$$|x| < 1, \quad \gamma^* = \gamma(u\lambda)$$

В силу свойств функции $q^*(x)$, указанных в условии теоремы, представление (2.12) правомерно, функция $\Phi^*(u)$, по меньшей мере, непрерывна и имеет место оценка [8]

$$\Phi^*(u) = O(u^{-1}) \quad (|u| \rightarrow \infty) \quad (2.14)$$

Умножим скалярно обе части (2.13) на $\Phi^*(x)$. С учетом равенства Парсеваля [7] получим

$$\int_{-1}^1 |\Phi^*(u)|^2 \frac{u^2 \gamma^* \operatorname{sh} \gamma^* du}{(u^2 \lambda^2 - A)\gamma^* \operatorname{sh} \gamma^* - B(1 + \beta^{-1} u^2) \operatorname{ch} \gamma^*} = 0 \quad (2.15)$$

Из формулы (2.14) следует, что интеграл в (2.15) сходится. Разделив в (2.15) действительную и мнимую части, можно показать, что мнимая часть ядра не меняет знака на действительной оси, откуда $\Phi^*(u) = 0$ и $q^*(x) = 0$. Теорема доказана.

3. Перейдем теперь к построению приближенного решения интегрального уравнения (1.9). Используя идею метода приближенной факторизации [4], аппроксимируем функцию $L(\zeta)$ выражением

$$L^*(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2 (\zeta - \zeta_1^-) (\zeta - \zeta_2^-)} \prod_{n=1}^N \frac{(\zeta - z_n^+) (\zeta - z_n^-)}{(\zeta - \zeta_n^+) (\zeta - \zeta_n^-)} \quad (3.1)$$

$$\zeta_0^{\pm}(\zeta) = (\zeta - \zeta_0^+) (\zeta - \zeta_0^-)$$

где $\zeta_{n,0}^{\pm}$ — четыре полюса $L(\zeta)$, имеющих наибольшую по модулю действительную часть.

Подставляя (3.1) во вторую формулу (1.9), получим

$$K^*(z) = \frac{1}{2} \begin{cases} \sum_{n=1}^N R_n^+ \exp(-i\zeta_n^+ z) & (z < 0) \\ \sum_{n=1}^N R_n^- \exp(-i\zeta_n^- z) & (z > 0) \end{cases} \quad (3.2)$$

$$R_n^+ = 2\pi i \operatorname{Res}[L^*(\zeta), \zeta_n^+], \quad R_n^- = -2\pi i \operatorname{Res}[L^*(\zeta), \zeta_n^-]$$

С учетом представления (3.2) перепишем интегральное уравнение (1.9) в виде

$$\int_{-1}^x \varphi(\xi) \sum_{n=1}^N R_n^- \exp\left[-i\zeta_n^- \left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)\right] d\xi + \int_x^1 \varphi(\xi) \sum_{n=1}^N R_n^+ \exp\left[-i\zeta_n^+ \left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)\right] d\xi = 2\pi\varepsilon \quad (|x| \leq 1) \quad (3.3)$$

и будем искать его решение в соответствии с теоремой 2 и результатами работы [9] в форме

$$\varphi(x) = T_0 + \sum_{n=1}^N T_n^+ \exp\left(-iz_n^+ \frac{x}{\lambda}\right) + \sum_{n=1}^N T_n^- \exp\left(-iz_n^- \frac{x}{\lambda}\right) + P_1 \delta(x+1) + P_2 \delta(x-1) + M_1 \delta'(x+1) + M_2 \delta'(x-1) \quad (3.4)$$

Произвольные постоянные T_n и коэффициенты P_j, M_j ($j=1, 2$) и T_0 определяются подстановкой (3.4) в (3.3), а именно

$$T_0 = 2\pi i \lambda^{-1} \left\{ \sum_{n=1}^N [R_n^+(\zeta_n^+)^{-1} - R_n^-(\zeta_n^-)^{-1}] \right\}^{-1} \quad (3.5)$$

$$\sum_{m=1}^N \left[T_m^+ \exp\left(-i \frac{z_m^+}{\lambda}\right) \frac{1}{\zeta_n^+ - z_m^+} \frac{1}{\sigma^+(z_m^+)} + T_m^- \exp\left(-i \frac{z_m^-}{\lambda}\right) \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\zeta_n^+ - z_m^-} \frac{1}{\sigma^+(z_m^-)} \right] = -T_0 (\zeta_n^+ \zeta_0^+ \zeta_{-1}^+)^{-1}$$

$$\sum_{m=1}^N \left[T_m^+ \exp\left(i \frac{z_m^+}{\lambda}\right) \frac{1}{\zeta_n^- - z_m^+} \frac{1}{\sigma^-(z_m^+)} + T_m^- \exp\left(i \frac{z_m^-}{\lambda}\right) \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\zeta_n^- - z_m^-} \frac{1}{\sigma^-(z_m^-)} \right] = -T_0 (\zeta_n^- \zeta_0^- \zeta_{-1}^-)^{-1}$$

$$n = 1, 2, \dots, N$$

$$P_1 = -i\lambda \left\{ T_0 \frac{\zeta_{-1}^+ + \zeta_0^+}{\zeta_{-1}^+ \zeta_0^+} + \sum_{m=1}^N \left[T_m^+ \exp\left(i \frac{z_m^+}{\lambda}\right) \frac{\zeta_{-1}^+ + \zeta_0^+ - z_m^+}{\sigma^-(z_m^+)} + \right. \right. \\ \left. \left. + T_m^- \exp\left(i \frac{z_m^-}{\lambda}\right) \frac{\zeta_{-1}^- + \zeta_0^- - z_m^-}{\sigma^-(z_m^-)} \right] \right\} \quad (3.6)$$

$$M_1 = -\lambda^2 \left\{ T_0 \frac{1}{\zeta_{-1}^+ \zeta_0^+} + \sum_{m=1}^N \left[T_m^+ \exp\left(i \frac{z_m^+}{\lambda}\right) \frac{1}{\sigma^-(z_m^+)} + \right. \right. \\ \left. \left. + T_m^- \exp\left(i \frac{z_m^-}{\lambda}\right) \frac{1}{\sigma^-(z_m^-)} \right] \right\}$$

$$P_2 = i\lambda \left\{ T_0 \frac{\zeta_{-1}^+ + \zeta_0^+}{\zeta_{-1}^+ \zeta_0^+} + \sum_{m=1}^N \left[T_m^+ \exp\left(-i \frac{z_m^+}{\lambda}\right) \frac{\zeta_{-1}^+ + \zeta_0^+ - z_m^+}{\sigma^+(z_m^+)} + \right. \right. \\ \left. \left. + T_m^- \exp\left(-i \frac{z_m^-}{\lambda}\right) \frac{\zeta_{-1}^+ + \zeta_0^+ - z_m^-}{\sigma^+(z_m^-)} \right] \right\} \\ M_2 = i\lambda^2 \left\{ T_0 \frac{1}{\zeta_{-1}^+ \zeta_0^+} + \sum_{m=1}^N \left[T_m^+ \exp\left(-i \frac{z_m^+}{\lambda}\right) \frac{1}{\sigma^+(z_m^+)} + \right. \right. \\ \left. \left. + T_m^- \exp\left(-i \frac{z_m^-}{\lambda}\right) \frac{1}{\sigma^+(z_m^-)} \right] \right\}$$

Введем обозначения

$$t_{2n} = T_n^+ \exp\left(-i \frac{z_n^+}{\lambda}\right) \frac{1}{\sigma^+(z_n^+) (\zeta_n^+ - z_n^+)}$$

$$t_{2n-1} = T_n^- \exp\left(i \frac{z_n^-}{\lambda}\right) \frac{1}{\sigma^-(z_n^-) (\zeta_n^- - z_n^-)}$$

$$b_{2n} = -T_0 (\zeta_n^+ \zeta_0^+ \zeta_{-1}^+)^{-1}, \quad b_{2n-1} = -T_0 (\zeta_n^- \zeta_0^- \zeta_{-1}^-)^{-1}$$

с учетом которых перепишем систему (3.5) в нормальном виде

$$t_j + \sum_{m=1}^{2N} a_{jm} t_m = b_j, \quad (j = 1, 2, \dots, 2N) \quad (3.7)$$

$$a_{2n, 2n} = a_{2n-1, 2n-1} = 0$$

$$a_{2n, 2m} = \frac{\zeta_n^+ - z_m^+}{\zeta_n^+ - z_m^+}, \quad a_{2n-1, 2m-1} = \frac{\zeta_n^- - z_m^-}{\zeta_n^- - z_m^-} \quad (n \neq m)$$

$$a_{2n, 2m-1} = \frac{(\zeta_n^+ - z_m^-) \sigma^-(z_m^-)}{(\zeta_n^+ - z_m^-) \sigma^+(z_m^-)} \exp\left(-2i \frac{z_m^-}{\lambda}\right)$$

$$a_{2n-1, 2m} = \frac{(\zeta_n^- - z_m^+) \sigma^+(z_m^+)}{(\zeta_n^- - z_m^+) \sigma^-(z_m^+)} \exp\left(2i \frac{z_m^+}{\lambda}\right)$$

Для коэффициентов a_{jl} при достаточно больших l и j имеет место следующая асимптотика, которая следует из поведения нулей и полюсов функции $L(\frac{z}{\lambda})$ при больших номерах:

$$a_{2n, 2m}, a_{2n-1, 2m-1} = O(n^{-1} m^{-1}) \quad (m, n \rightarrow \infty) \quad (3.8)$$

$$a_{2n, 2m-1}, a_{2n-1, 2m} = O(n^{-1} m^{-2} e^{-\frac{2\pi m}{\lambda}})$$

Тогда с учетом (3.8) можно утверждать, что решение системы (3.7) при достаточно больших N будет близко к решению аналогичной бесконечной системы ($N = \infty$) по норме пространства l_1 [10].

Решив линейную алгебраическую систему (3.7), найдем функцию $\varphi(x)$ по формулам (3.4)–(3.6). Заметим, что форма решения интегрального уравнения (1.9)–(3.4) не изменится в случае наличия у функции $L(\xi)$ кратных полюсов и примет вид

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & T_0 + (T_2^- x + T_2^+) \exp\left(-iz_2 \frac{x}{\lambda}\right) + \sum_{n=1}^N \left[T_n^+ \exp\left(-iz_n^+ \frac{x}{\lambda}\right) + \right. \\ & \left. + T_n^- \exp\left(-iz_n^- \frac{x}{\lambda}\right) \right] + P_1 \delta(x+1) + P_2 \delta(x-1) + \\ & + M_1 \delta'(x+1) + M_2 \delta'(x-1) \end{aligned}$$

в случае $z_1^+ = z_1^- = z_2$. При этом соответствующим образом изменится вид системы (3.7).

Поведение поверхности вне штампа $|x| > 1$ описывается функциями

$$\begin{aligned} w_0^-(x) &= i\lambda \sum_{n=-1}^N A_n^- \exp\left(-i\zeta_n^+ \frac{x+1}{\lambda}\right) \quad (x < -1) \\ w_0^+(x) &= -i\lambda \sum_{n=-1}^N A_n^+ \exp\left(-i\zeta_n^- \frac{x-1}{\lambda}\right) \quad (x > 1) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} A_n^\pm = & R_n^\pm \sigma^\pm(\zeta_n^\pm) \left\{ T_0 (\zeta_n^\pm \zeta_{-1}^\pm \zeta_0^\pm)^{-1} + \right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^N \left[T_m^+ \exp\left(\mp i \frac{z_m^+}{\lambda}\right) \frac{1}{\sigma^\pm(z_m^+) (\zeta_n^\pm - z_m^+)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + T_m^- \exp\left(\mp i \frac{z_m^-}{\lambda}\right) \frac{1}{\sigma^\pm(z_m^-) (\zeta_n^\pm - z_m^-)} \right] \right\} \end{aligned}$$

Формула (3.9) позволяет выявить характер волн на поверхности пластинки, а также даст возможность рассчитывать их амплитудные значения. В рассмотренном случае от штампа удаляется N волн с быстро (порядка экспоненты) затухающей амплитудой.

Выражения, аналогичные (3.9) с точностью до множителей вида $\text{ch}[\gamma(\zeta_n^\pm)y]$ могут быть получены и для акустического поля в жидкости. Отметим также, что действительные части ζ_n^\pm характеризуют фазовые скорости волн, а мнимые — затухание амплитуды волн. Групповые скорости пропорциональны действительной части величины $(d\zeta_n^\pm/d\omega)^{-1}$. Выражения энергетических характеристик акустического поля имеют такой же вид, как и в случае, когда в жидкости нет потока [11]. Следует также отметить, что волна с параметром распространения $\zeta_n^\pm = 0$ (случай $A_1 = 0$) не переносит энергии.

Если $\zeta_{-1}^\pm = \zeta_0^\pm$, то

$$\begin{aligned} w_1^-(x) &= R_{-1}^+ (A_0^- x + B_0^-) \exp\left(-i\zeta_0^+ \frac{x+1}{\lambda}\right) + w_0^-(x) \quad (x < -1) \\ w_1^+(x) &= w_0^+(x) \quad (x > 1) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$B_0 = \bar{\nu} \left\{ T_0 [(\zeta_0^+ \zeta_0^-)^{-1} - (\zeta_0^+)^{-2}] - \sum_{m=1}^N \left[T_m^+ \exp\left(j \frac{z_m}{\lambda}\right) \frac{z_m - (\zeta_0^+ - z_m)^2}{z_m (\zeta_0^+ - z_m)^2} + T_m^- \exp\left(j \frac{z_m}{\lambda}\right) \frac{z_m - (\zeta_0^- - z_m)^2}{z_m (\zeta_0^- - z_m)^2} \right] \right\}$$

Исследуем теперь случай $A_1 = A\beta M \sin \beta M + B \cos \beta M = 0$. Как отмечалось ранее, положим $\zeta_2^- = 0$ при $\beta M < BA^{-1} \sqrt{1 + AB^{-1}}$ (либо $\zeta_2^- = 0$ при $\beta M > BA^{-1} \sqrt{1 + AB^{-1}}$) и будем искать решение интегрального уравнения (3.3) в виде (3.4) при $T_0 = 0$. Для определения t_j получим систему (3.7) при $b_4 = 2z_4 (R_2^+ \zeta_{-1}^+ \zeta_0^+)^{-1}$ и $b_j = 0$ ($j \neq 4$). Из (3.9) следует, что при $\zeta_2^- = 0$

$$w_0^{\pm}(x) = \pm \bar{\nu} \left[A_2^{\pm} + \sum_{n=1}^N A_n^{\pm} \exp\left(-i\zeta_n^{\pm} \frac{x \pm 1}{\lambda}\right) \right]$$

то есть с течением времени форма поверхности пластинки вне штампа колеблется с незатухающей при удалении от штампа амплитудой.

4. В качестве числового примера приведено решение задачи о колебании под действием единичной силы стального стержня на поверхности слоя льда, покрывающего гидравлическое основание. При этом¹

$$G = 1.1 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2; \rho^* = 880 \text{ кг/м}^3, \nu = 0.34, \rho = 1000 \text{ кг/м}^3$$

$$c = 1500 \text{ м/сек}, h = 0.3 \text{ м}, H = 10 \text{ м}, M = 0.002$$

$$K(t - \tau) = E_1 e^{-\alpha(t-\tau)} + E_2 e^{-\beta(t-\tau)}, \quad E_1 = 4.0 \cdot 10^3 \text{ н/м}^2$$

$$E_2 = 3.9 \cdot 10^3 \text{ н/м}^2, \quad \tau_1 = 2439.0 \text{ сек}, \quad \tau_2 = 5882.0 \text{ сек}$$

На фиг. 2 изображены зависимости ζ_{-1}^+ и ζ_0^+ от частоты (кривая (1) — $\text{Re } \zeta_{-1}^+$, (2) — $\text{Im } \zeta_{-1}^+$, (3) — $\text{Re } \zeta_0^+$, (4) — $\text{Im } \zeta_0^+$).²

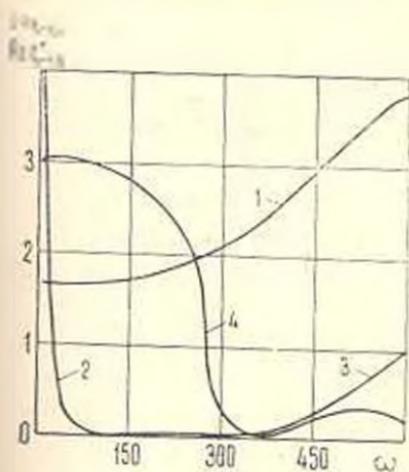
Как следует из оценок, приведенных в п. 1, $\text{Im } \zeta_j^{\pm} \sim \lambda$ при $j \rightarrow \infty$. Поэтому, почти во всем спектре частот поля виброакустических характеристик вдали от источника колебаний определяются полюсами ζ_{j0}^{\pm} , имеющими наибольшую действительную и наименьшую мнимую часть (за исключением окрестности точек, где $A_1 = 0$). Заметим, что с увеличением частоты колебаний от 10 гц до 100 гц величина $\text{Im } \zeta_{-1}^+$, характеризующая затухание волны, уменьшается на два порядка, то есть если двигаться с групповой скоростью данной волны, то ее декремент затухания на

¹ Эти экспериментальные данные любезно предоставлены авторам В. П. Елифановым.

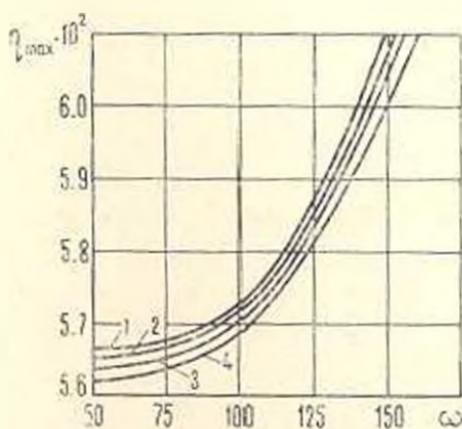
² Для полюсов ζ_j^{\pm} ($j = -1, 0$) имеет место довольно близкая картина (расхождение составляет менее 1% при $M < 0.01$).

частоте 100 гц будет на два порядка меньше, чем декремент затухания на частоте 10 гц.

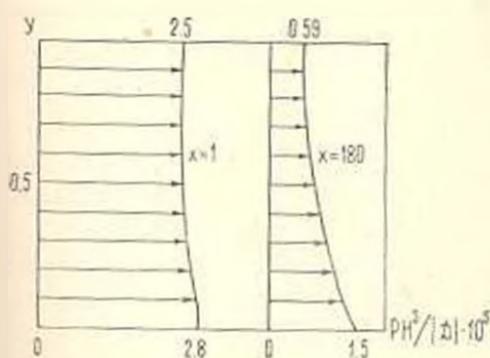
На фиг. 3 даны графики изменения максимума амплитуды контактного давления ((1) — $\lambda=200$, (2) — $\lambda=100$, (3) — $\lambda=66,7$, (4) — $\lambda=50$) в зависимости от частоты колебаний стержня. Видно, что при одной и той же частоте максимальное контактное давление будет тем больше, чем меньше λ .



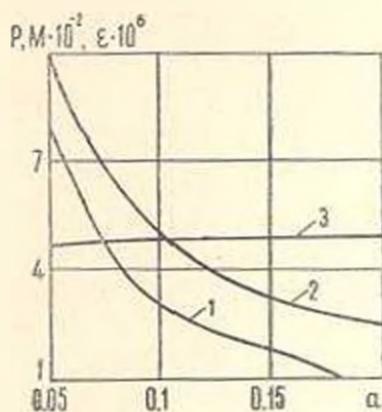
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Эпюры амплитуд давлений в жидкости при $x=1$ и $x=180$ представлены на фиг. 4. Можно заметить, что если вблизи от источника колебаний амплитуда давления незначительно меняется по глубине (около 10%), то при значительном удалении от источника колебаний амплитуда давления у дна почти в три раза превосходит амплитуду давления у поверхности ($\omega=100$ гц, $a=0.2$ м).

На фиг. 5 даны графики при $\omega=100$ гц изменения $M_1 \cdot 10^{-7}$ — кривая (1), P_1 — (2), $\varepsilon \cdot 10^6$ — (3) в зависимости от a . Отметим также, что $P_1 \approx P_2$, $M_1 \approx -M_2$ с точностью до 5%, что обусловлено малостью M .

Авторы выражают благодарность В. М. Александрову за внимание к работе.

ՀԻՒՐԱՎԼԻԿ ՀԻՄՔԸ ԾԱԾԿՈՂ ԹԻՔԵԼԻ ՀԵՏ ԿՈՆՏԱԿՏ ՌԵՆԵՑՈՂ
ԽՐԹՈՒՑՈՂ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՋՈՂԻ ՃԱՌԱԳԱՅՔՄԱՆ
ԲՆՈՒԹԱԳՐԻՉՆԵՐԻ ՌԵՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒՄԸ

Ս. Ի. ԲՈՅԵՎ, Ե. Վ. ԿՈՎԱԼԵՆԿՈ

Ա մ փ ո փ ու մ

Ուսումնասիրվում է իղեալական սեղմվող շեղուկի շերտը ծածկող առաձգամածուցիկ թիթեղից և նրան կոշտ ամրակցված առաձգական ծողից կազմված սիստեմը, որը զրդվում է ժամանակի ընթացքում պարբերաբար փոփոխվող ուժով:

Ըստ երկայնական կոորդինատի Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ խնդրի լուծումը բերվել է վերջավոր ինտեգրալի վրա ողորկ կորիզով փաթեթի տիպի առաջին սերի ինտեգրալ համասարումից ձողի սակ ճնշման լայնույթի որոշման:

Այդ համասարումը առանց սխալի լուծելի է միայն դանդաղ աճ ունեցող բնչաներացված ֆունկցիաների տարածությունում:

THE INVESTIGATION OF THE CHARACTERISTICS
OF RADIATION OF A VIBRATING ELASTIC BAR CONTACTED
WITH A PLATE COVERING THE HYDRAVLC FOUNDATION

S. I. BOYEV, E. V. KOVALENKO

S u m m a r y

A system is investigated consisting of a viscoelastic plate, covering the layer of ideal compressed liquid and elastic bar, rigidly coupled to the plate and excited by a force periodically changing in time.

By means of the Fourier integral transform, along the longitudinal coordinate, the problem is brought to the definition of the amplitude of pressure under the bar from the integral equation of the first kind of package type at the finite interval with a smooth kernel: correctly solved only in the space of generalized functions of show increase.

Graphs of characteristic vibroacoustic values are constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.
2. Taylor K. A transformation of the acoustic equation with implications for wind-tunnel and low-speed flight tests. Proc. Roy. Soc. A, 1978, vol. 363, p. 1713.
3. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
4. Воронин И. Н., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979.
5. Александров В. М. Некоторые контактные задачи для балок, пластинок и оболочек.— Изв. ж., 1965, т. 5, в. 4.

6. Александров В. М., Коваленко Е. В. Движение штампа по границе упругой полуплоскости с тонким усиливающим покрытием. В сб. «Механика сплошной среды». Изд. Ростовского ун-та, 1981.
7. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
8. Бохнер С. Лекции об интегралах Фурье. М.: ФМ, 1962.
9. Забрейко П. П. и др. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
10. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., Физматгиз, 1962.
11. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981.

Институт проблем механики АН СССР

Институт машиноведения АН СССР

им. А. А. Благонравова

Поступила в редакцию

19. X. 1981