ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

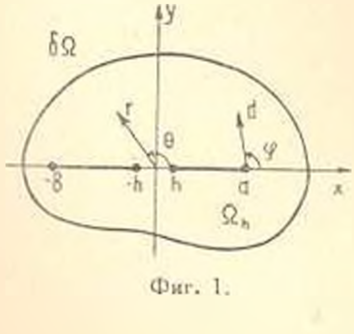
Մեխանիկա XXXV, № 4, 1982 Механика

ИЗМЕНЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ИНТЕНСИВНОСТИ ПРИ РАЗРУШЕНИИ ПЕРЕМЫЧКИ МЕЖДУ ДВУМЯ КОЛЛИНЕАРНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

НАЗАРОВ С. А., РОМАШЕВ Ю. А.

В настоящей работе рассматривается плоская задача классической теории упругости для области Ω, ослабленной двумя разрезами, расположенными на одной прямой, и находящейся под действием произвольной внешней нагрузки. Предполагается, что длина $2h$ перемычки между этими трещинами мала. При помощи решений задачи в области Ω с разрезом, образованным слиянием двух первоначальных трещин, и задачи на плоскости R^2, ослабленной двумя полубесконечными разрезами, конструируется асимптотика решения исходной задачи. Исследуется аналитическая зависимость от h коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах трещин, имеющая вид $d_1+d_2(\log h+C)^{-1}+O(h)$ в дальних концах и $d_3h^{-1/2}(\log h+C)^{-1}+O(h^{1/2})$ в ближних. Такая зависимость от h связана с неразрешимостью в классе убывающих функций предельной задачи для внутреннего разложения. Поэтому для сращивания асимптотик необходимо [1, 2] привлечь логарифмически растущие решения однородных предельных задач. Указанные решения и приводят к возникновению $\log h$ в представлении приближенного решения задачи.

1. *Постановка задачи.* Пусть Ω — либо плоскость R^2, либо подобласть R^2 с гладкой (класса C^∞) границей, содержащая отрезок $M=\{x=(x_1, x_2)\in R^2: x_2=0,\ x_1\in[-b, a]\}$, где a, b — положительные числа. Допустим, что a и b имеют порядок $O(1)$, характерный размер l области Ω масштабированием также сведен к единице. Обозначим через Ω_0 область $\Omega\setminus M$, а через Ω_h при $h\in(0, 1)$ область $\Omega_0\cup\{x\in R^2: x_2=0,\ x_1\in(-h, h)\}$.



Фиг. 1.

В области Ω_h рассмотрим задачу классической теории упругости*

$$\Delta u^h+(1-2\nu)^{-1}\nabla\nabla\cdot u^h=0 \ \text{в}\ \Omega_h \quad (1.1)$$

$$\sigma_{n\tau}(u^h)=T_\tau,\ \sigma_{nn}(u^h)=T_n \ \text{на}\ \partial\Omega_h \quad (1.2)$$

где u — вектор смещения, $\|\sigma_{ij}(u)\|$ — тензор напряжений; T — вектор

* Если область Ω не ограничена, то условия на бесконечности понимаются в смысле принадлежности энергетическому классу.

внешней нагрузки, n — внутренняя нормаль, s — координата на $\partial\Omega$. Предположим, что главный вектор и главный момент внешней нагрузки равен нулю при любом h. Тогда существует решение u^h задачи (1.1), (1.2), единственное с точностью до смещений и поворота Ω_h как жесткого тела. Построим асимптотику решения u^h при $h \to 0$. Для этого будет использован алгоритм работы [1], в которой изучена асимптотика решений эллиптических в смысле А. Дуглиса — Л. Ниренберга краевых задач в областях с нерегулярно возмущенной границей.

2. *Построение асимптотики.* В качестве основного приближения к u^h естественно выбрать решение u^0 задачи

$$\Delta u^0 + (1-2\nu)^{-1}\nabla\nabla\cdot u^0 = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_0 \tag{2.1}$$

$$\sigma_{ns}(u^0) = T_s, \quad \sigma_{nn}(u^0) = T_n \quad \text{на} \quad \partial\Omega_0 \tag{2.2}$$

Вектор-функция u^0 не принадлежит, вообще говоря, пространству $C(\Omega_h)$ при $h>0$, то есть $u^0(0, +0) \neq u^0(0, -0)$. Поэтому вблизи точки (0, 0) поведение вектора u^h описывается при помощи решения другой задачи. Сделаем замену координат $x \to \xi = h^{-1}x$. Область при этой замене и последующем переходе к $h=0$ трансформируется в плоскость с двумя полубесконечными разрезами $\Pi = R^2 \setminus \{\xi \in R^2\colon \xi_2 = 0, \xi_1 \overline{\in} (-1, 1)\}$. Для использования метода сращиваемых асимптотических разложений [3] необходимо построить векторное поле w, удовлетворяющее однородным уравнениям равновесия в Π, граничным условиям $\sigma_{12}(w) = \sigma_{22}(w) = 0$ на $\partial\Pi$ и условиям на бесконечности

$$\begin{aligned} w(\xi) &\to u^+ = u^0(0, +0) \quad \text{при} \quad |\xi| \to \infty, \quad \xi_2 > 0 \\ w(\xi) &\to u^- = u^0(0, -0) \quad \text{при} \quad |\xi| \to \infty, \quad \xi_2 < 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Нетрудно проверить, что при $u^+ \neq u^-$ такого поля не существует. Дело в том, что для векторного поля w с нечетной (по ξ_2) первой компонентой (или нечетной второй компонентой), удовлетворяющего перечисленным выше условиям и допускающего оценку $O(1)$ при $|\xi| \to \infty$, справедливы равенства $w_1 = 0$, $w_2 = \text{const}$ (или соответственно $w_1 = \text{const}$, $w_2 = 0$). Однако существуют вектор-функции Γ^1 и Γ^2 такие, что

$$\Delta\Gamma^j + (1-2\nu)^{-1}\nabla\nabla\cdot\Gamma^j = 0 \quad \text{в} \quad \Pi$$

$$\sigma_{12}(\Gamma^j) = \sigma_{22}(\Gamma^j) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Pi \tag{2.4}$$

$$\Gamma_k^j(\xi_1, \xi_2) = (-1)^{\delta_{jk}}\Gamma_k^j(\xi_1, -\xi_2), \ \xi \in \Pi, \ j, k = 1, 2$$

и растущие на бесконечности не быстрее любой положительной степени $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$. Матрица $\Gamma = \|\Gamma_k^j\|$ отличается постоянным множителем от матрицы Грина для задачи классической теории упругости, полюсы расположены в точках $(\infty, +\infty)$ и $(\infty, -\infty)$, и допускает при $\xi_2 > 0$, $\rho \to +\infty$ асимптотическое представление

$$\Gamma(\xi) = (1-\nu)^{-1}\bar{T}(\rho, \theta)/2 + \gamma + O(\rho^{-1}) \qquad (2.5)$$

Здесь θ — полярный угол из интервала $(-\pi, \pi)$, $\gamma = \|\gamma_k^j\|$ — постоянная матрица,

$$\bar{T}(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} 2(1-\nu)\log\rho + \sin^2\theta, & -(1-2\nu)\theta - \sin\theta\cos\theta \\ (1-2\nu)\theta - \sin\theta\cos\theta, & 2(1-\nu)\log\rho + \cos^2\theta \end{pmatrix} \qquad (2.6)$$

Асимптотику вектор-функции u^h в $\sqrt{h}$-окрестности точки $(0, 0)$ будем искать в виде

$$u^h(x) \sim A_1\Gamma^1(h^{-1}x) + A_2\Gamma^2(h^{-1}x) + (B_1, B_2) \qquad (2.7)$$

где A_j и B_j — некоторые постоянные, подлежащие определению. Так как правая часть формулы (2.7) содержит логарифмически растущее слагаемое, то для описания асимптотики u^h вне $\sqrt{h}$-окрестности точки $(0, 0)$ вектора u недостаточно. Введем матрицу G, каждый столбец которой удовлетворяет однородным уравнениям (2.1) в $\Omega_0 \setminus \{(0, 0)\}$ и однородным граничным условиям (2.2) на $\partial\Omega_0 \setminus \{(0, 0)\}$. Пусть еще G допускает асимптотическое представление

$$G(x) = \pm(1-\nu)^{-1}\bar{T}(r, \theta)/2 + g^{\pm} + O(r), \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 \to 0, \quad \pm x_2 > 0 \qquad (2.8)$$

Столбец G^2 реализуется как векторное поле смещений в Ω_0 под действием симметричных нормальных сосредоточенных в точках $(0, +0)$ и $(0, -0)$ нагрузок, а G^1 — как векторное поле смещений в Ω_0 под действием антисимметричных касательных сосредоточенных нагрузок, приложенных к точкам $(0, +0)$ и $(0, -0)$.

Вне $\sqrt{h}$-окрестности точки $(0, 0)$ асимптотику вектор-функции u^h будем искать в виде

$$u^h(x) \sim D_1G^1(x) + D_2G^2(x) + u^{\cdot}(x) \qquad (2.9)$$

Найдем постоянные A_j, B_j и D_j, $j = 1, 2$, из условия совпадения асимптотик (2.7) и (2.9) вектора u^h в зоне $r \sim \sqrt{h}$. Рассмотрим, например, компоненту u_1^h при $x_2 > 0$. Правая часть выражения (2.9) принимает вид

$$u_1^+ + D_1(\log r + (1-\nu)^{-1}\sin^2\theta/2) - D_2(1-\nu)^{-1}[(1-2\nu)\theta + \sin\theta\cos\theta]/2 + D_1g_1^{1+} + D_2g_1^{2+} + O(\sqrt{h}) \qquad (2.10)$$

а правая часть (2.7) — вид

$$B_1 + A_1(\log r + (1-\nu)^{-1}\sin^2\theta/2) - A_2(1-\nu)^{-1}[(1-2\nu)\theta + \sin\theta\cos\theta]/2 + A_1(\gamma_1^1 - \log h) + A_2\gamma_1^2 + O(\sqrt{h}) \qquad (2.11)$$

Необходимым условием совпадения главных членов в (2.10) и (2.11) являются равенства $A_j = D_j$, $j = 1, 2$. Приравнивая оставшиеся постоянные, получим уравнение

$$A_1(-\log h + \gamma_1^1 - g_1^{1,+}) + A_2(\gamma_1^2 - g_1^{2,+}) + B_1 = u_1^+ \tag{2.12}$$

Аналогично, рассматривая u_1^+ при $x_2 < 0$ и u_2^+ при $x_2 > 0$ или при $x_2 < 0$, имеем

$$\begin{gathered} A_1(\log h - \gamma_1^1 - g_1^{1,-}) + A_2(\gamma_1^2 - g_1^{2,-}) + B_1 = u_1^- \\ A_1(\gamma_2^1 - g_2^{1,+}) + A_2(-\log h + \gamma_2^2 - g_2^{2,+}) + B_2 = u_2^+ \\ A_1(\gamma_2^1 - g_2^{1,-}) + A_2(\log h - \gamma_2^2 - g_2^{2,-}) + B_2 = u_2^- \end{gathered} \tag{2.13}$$

Решением алгебраической системы (2.12), (2.13) являются постоянные

$$\begin{gathered} A_1 = \{(u_1^- - u_1^+)P_2(h) - (u_2^- - u_2^+)Q_1\}(P_1(h)P_2(h) - Q_1Q_2)^{-1} \\ A_2 = \{(u_2^- - u_2^+)P_1(h) - (u_1^- - u_1^+)Q_2\}(P_1(h)P_2(h) - Q_1Q_2)^{-1} \\ B_1 = \{u_1^+ + u_1^- + (g_1^{1,+} + g_1^{1,-})A_1 + (g_1^{2,+} + g_1^{2,-} - 2\gamma_1^2)A_2\}/2 \\ B_2 = \{u_2^+ + u_2^- + (g_2^{1,+} + g_2^{1,-} - 2\gamma_2^1)A_1 + (g_2^{2,+} + g_2^{2,-})A_2\}/2 \end{gathered} \tag{2.14}$$

где

$$\begin{gathered} P_1(h) = 2\log h - 2\gamma_1^1 + g_1^{1,+} - g_1^{1,-}, \quad Q_1 = g_1^{2,+} - g_1^{2,-} \\ P_2(h) = 2\log h - 2\gamma_2^2 + g_2^{2,+} - g_2^{2,-}, \quad Q_2 = g_2^{1,+} - g_2^{1,-} \end{gathered} \tag{2.15}$$

3. *Асимптотика смещений u^h*. Выберем в качестве асимптотического решения задачи (1.1), (1.2) вектор-функцию U^h, определяемую равенствами

$$\begin{gathered} U^h(x) = \chi_1(rh^{-1})[u^0(x) + A_1G^1(x) + A_2G^2(x)] + \\ + \chi_2(r)[(B_1, B_2) + A_1\Gamma^1(xh^{-1}) + A_2\Gamma^2(xh^{-1})] - \\ - \chi_1\left(\frac{r}{h}\right)\chi_2(r)\begin{cases} M_1 \\ M_2 \end{cases} \end{gathered} \tag{3.1}$$

где

$$M_1 = (1-\nu)\{A_1\bar{T}^1(r, 0) + A_2\bar{T}^2(r, 0)\}/2 + A_1g^{1,+} + A_2g^{2,+} + u^+$$

при $x_2 > 0$

$$M_2 = (\nu - 1)\{A_1\bar{T}^1(r, -0) + A_2\bar{T}^2(r, -0)\}/2 + A_1g^{1,-} + A_2g^{2,-} + u^-$$

при $x_2 < 0$

Здесь χ_1 и χ_2 — срезающие функции из $C^\infty(R^1)$ такие, что

$$\chi_1(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t > 4, \\ 0 \text{ при } t < 2, \end{cases} \quad \chi_2\left(\frac{t}{\min(a, b)}\right) = \begin{cases} 0 \text{ при } t > 1/2 \\ 1 \text{ при } t < 1/4 \end{cases}$$

Из результатов работ [1], [4] вытекает

Теорема 1. *а) Справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\Omega_h} \varepsilon_{ij}(u^h - U^h)\,\varepsilon_{ij}(u^h - U^h)\,dx < ch^2$$

в котором постоянная c *не зависит от* h, *а* u^h — *любое решение задачи* (1.1), (1.2).

б) Выполняется оценка

$$\max |R_h^\delta(x)\,\sigma_{ij}(u^h - U^h)| \leqslant c(\delta)\,h, \; ij = 1, 2 \tag{3.2}$$

где $R_h^\delta(x) = \min\{1,\; d_1^{(1+\delta)/2},\; d_2^{(1+\delta)/2},\; h + r,\; [hd_3(h)]^{(1+\delta)/2},\; [hd_4(h)]^{(1+\delta)/2}\}$, d_1, d_2, r, $d_3(h)$, $d_4(h)$ — *расстояния от точки* x *до точек* $(-b, 0)$, $(a, 0)$, $(0, 0)$, $(-h, 0)$ *и* $(h, 0)$ *соответственно;* δ — *произвольное положительное число; постоянная* $c(\delta)$ *зависит от* δ, *но не от* h.

в) Предположим, что векторы u^h *и* U^h *подчинены условиям*

$$\int\limits_{\Omega_h} (u^h - U^h)\,dx = 0, \qquad \int\limits_{\Omega_h} \operatorname{rot}(u^h - U^h)\,dx = 0 \tag{3.3}$$

Тогда имеет место формула

$$\max|u^h - U^h| \leqslant ch$$

Здесь постоянная c *не зависит от* h.

Отметим, что неравенство (3.2) означает, что вне фиксированных окрестностей точек $(0, 0)$, $(-b, 0)$ и $(a, 0)$ модуль разности напряжений, построенных по векторам u^h и U^h есть величина $O(h)$.

Формула (3.1) содержит рациональные функции от $\log h$. Асимптотические разложения такого вида в задачах о малых возмущениях границы области возникали в работах [5], [2]. Асимптотика решений эллиптических систем в областях с малыми локальными возмущениями границы получена в [1].

4. *Асимптотика коэффициентов интенсивности.* Выведем из формулы (3.1) для приближенного решения U^h задачи (1.1), (1.2) асимптотику по h коэффициентов интенсивности смещений u^h в вершинах трещин. Достаточно рассмотреть лишь правую трещину, то есть точки $(a, 0)$ и $(h, 0)$.

Обозначим через $K_a^j(V)$, $j = 1, 2$, коэффициенты в асимптотике вектора смещений

$$V(x) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + K_a^1(V)\,\frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{d}{2\pi}}\begin{pmatrix} \cos(\varphi/2)\,(1 - 2\nu + \sin^2(\varphi/2)) \\ \sin(\varphi/2)\,(2 - 2\nu - \cos^2(\varphi/2)) \end{pmatrix} +$$

$$+ K_a^2(V)\,\frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{d}{2\pi}}\begin{pmatrix} \sin(\varphi/2)\,(2 - 2\nu + \cos^2(\varphi/2)) \\ \cos(\varphi/2)\,(1 - 2\nu + \sin^2(\varphi/2)) \end{pmatrix} + O(d), \quad d \to 0 \tag{4.1}$$

где $c_j = \text{const}$, (d, φ) — полярная система координат с центром в точке $(a, 0)$ такая, что берега разреза M задаются уравнениями $\varphi = \pm \pi$.

Обозначим коэффициенты в разложении V вида (4.1) вблизи точки $(h, 0)$ через $K_h^1(V)$ и $K_h^2(V)$. Еще понадобятся коэффициенты $\tilde{K}_1^j(\Gamma^i)$ для векторов $\Gamma^1(\xi)$ и $\Gamma^2(\xi)$ в точке $(1, 0)$.

Следствием теоремы 1 является

Теорема 2. *Справедливы формулы*

$$K_a^j(u^h) = K_a^j(U^h) + A_1 K_a^j(G^1) + A_2 K_a^j(G^2) + O(h)$$

$$K_h^j(u^h) = h^{-1/2}\{A_1 \tilde{K}_1^j(\Gamma^1) + A_2 \tilde{K}_1^j(\Gamma^2)\} + O(h^{1/2})$$

Здесь $j = 1, 2$; постоянные A_1 и A_2 определены равенствами (2.14), (2.15).

Аналогичные формулы имеют место и для коэффициентов интенсивности в точках $(-b, 0)$ и $(-h, 0)$. Для того, чтобы получить их из (4.2) нужно заменить $\tilde{K}_1^j$ на $\tilde{K}_{-1}^j$, а индекс a на $-b$.

5. *Построение матрицы* Γ. В этом разделе будет найдена матрица Γ, столбцы которой являются решениями задач (2.4), и числовая матрица γ из формулы (2.5). При этом используется метод построения однородных решений задач теории упругости, приведенный в [6]. А именно, рассматривается задача

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = iN\Theta(x_1), \quad z \in \partial\Pi \tag{5.1}$$

где $z = x_1 + ix_2$, φ, ψ — функции Гурса, Θ — функция Хевисайда, а N — некоторая комплексная постоянная. При помощи преобразования Жуковского $2z = \zeta + \zeta^{-1}$ перейдем* из области Π в верхнюю полуплоскость C^+ комплексной переменной $\zeta \in C$. Задача (5.1) в переменных $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$ перепишется в виде

$$\varphi_*(\zeta) + \overline{\psi_*(\zeta)} = \begin{cases} iN, & \zeta_1 > 0, \quad \zeta_2 = 0 \\ 0, & \zeta_1 < 0, \quad \zeta_2 = 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

Здесь

$$\begin{gathered} \varphi_*(\zeta) = \varphi(z(\zeta)), \\ \psi_*(\zeta) = \psi(z(\zeta)) + \varphi_*'(\zeta)(\zeta^2 + 1)(\zeta^2 - 1)^{-1}\zeta \end{gathered} \tag{5.3}$$

Решением задачи (5.2) являются функции

$$\varphi_*(\zeta) = -\frac{N}{2\pi}\log\zeta + S_1, \quad \psi_*(\zeta) = \frac{\overline{N}}{2\pi}\log\zeta + S_2 \tag{5.4}$$

где S_1, S_2 — произвольные комплексные постоянные такие, что $S_1 + \overline{S_2} = iN$. Из (5.3) и (5.4) следует

* При этом нижний берег разреза $\{x \in R^1 : x_2 = 0,\ x_1 > 1\}$ трансформируется в отрезок $\{\zeta \in C : \zeta_2 = 0,\ \zeta_1 \in (0, 1)\}$, а верхний переходит в себя.

$$\varphi(z) = -(2\pi)^{-1} N \log(z + \sqrt{z^2 - 1}) + S_1$$

$$\psi(z) = \frac{\overline{N}}{2\pi} \log(z + \sqrt{z^2 - 1}) + \frac{Nz}{2\pi\sqrt{z^2 - 1}} + S_2$$

Используя соотношения между компонентами смещений W_1, W_2 и функциями Гурса, получим

$$\begin{gathered} W_1 = \frac{1}{4\pi\mu}\Big\{-(1+\varkappa) N_1 \log|z + \sqrt{z^2-1}| + 2N_1 x_2 \operatorname{Im} \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} + \\ + 2N_2 x_2 \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} + N_2(\varkappa - 1)\arg(z + \sqrt{z^2-1})\Big\} + \\ + \frac{1}{2\mu}(\varkappa \operatorname{Re} S_1 - \operatorname{Re} S_2) \\ W_2 = \frac{1}{4\pi\mu}\Big\{-(1+\varkappa) N_2 \log|z + \sqrt{z^2-1}| - 2N_2 x_2 \operatorname{Im} \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} + \\ + 2N_1 x_2 \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} - N_1(\varkappa - 1)\arg(z + \sqrt{z^2-1})\Big\} + \\ + \frac{1}{2\mu}(\varkappa \operatorname{Im} S_1 + \operatorname{Im} S_2) \end{gathered} \tag{5.5}$$

где μ — коэффициент Ламе, $\varkappa = 3 - 4\nu$. Правые части выражений (5.5) зависят от трех комплексных постоянных: $N = N_1 + iN_2$, S_1 и S_2. Выбирая их надлежащим образом, получим выражения для компонент матрицы Г:

$$\begin{gathered} (\Gamma_1^1, \Gamma_2^1) = (W_1, W_2) \text{ при } N = -\frac{\pi\mu}{1-\nu}, \quad S_1 = -\frac{i\pi\mu}{(1-\nu)(\varkappa+1)} \\ S_2 = \frac{i\pi\mu\varkappa}{(1-\nu)(\varkappa+1)} \\ (\Gamma_1^2, \Gamma_2^2) = (W_1, W_2) \text{ при } N = -\frac{i\pi\mu}{1-\nu}, \quad S_1 = \frac{\pi\mu}{(1-\nu)(\varkappa+1)} \\ S_2 = \frac{\pi\mu\varkappa}{(1-\nu)(\varkappa+1)} \end{gathered} \tag{5.6}$$

Сравнивая (5.6) с асимптотической формулой (2.5), получим

$$\gamma_1^1 = \log 2; \quad \gamma_1^2 = \gamma_2^1 = 0; \quad \gamma_2^2 = \log 2 - 1/2(1-\nu) \tag{5.7}$$

Кроме того, вычисляя коэффициенты интенсивности $\widetilde{K}_1^i(\Gamma^j)$ векторов Γ^1 и Γ^2 в точке (1, 0), имеем

$$\widetilde{K}_1^2(\Gamma^1) = \widetilde{K}_2^1(\Gamma^2) = \frac{\sqrt{\pi}\,\mu}{1-\nu}; \quad \widetilde{K}_1^1(\Gamma^1) = \widetilde{K}_1^2(\Gamma^2) = 0 \tag{5.8}$$

6. *Две трещины в плоскости.* Пусть Ω — плоскость R^2. При помощи формул, приведенных в книге [7] § 2, гл. XI, построим матрицу G (см. п. 2 и (2.8)). Ее столбец G^1 (или G^2) является решением задачи о трещине M под действием касательных антисимметричных (или нормальных симметричных) нагрузок, сосредоточенных в точке 0. Введем функции комплексного аргумента z:

$$Z(z) = -\mu\sqrt{ab}\,(1-\nu)^{-1} z^{-1} (z^2 - z(a-b) - ab)^{-1/2}$$

$$Z^0(z) = -\frac{i\mu}{1-\nu}\left\{-\log z - \log(a+b) + i\,\mathrm{arctg}\frac{2\sqrt{ab}}{a-b} + \right.$$

$$\left. + \log\left[-2\sqrt{ab}\sqrt{ab+(a-b)z-z^2} + 2ab + z(a-b)\right]\right\} \qquad (6.1)$$

Эти функции исчезают на бесконечности и связаны соотношением $Z = dZ^0/dz$. Положим

$$G = \frac{1}{2\mu}\begin{pmatrix} 2(1-\nu)\,\mathrm{Im}\,Z^0 + y\,\mathrm{Re}\,Z, & (1-2\nu)\,\mathrm{Re}\,Z^0 - y\,\mathrm{Im}\,Z \\ -(1-2\nu)\,\mathrm{Re}\,Z^0 - y\,\mathrm{Im}\,Z & 2(1-\nu)\,\mathrm{Im}\,Z^0 - y\,\mathrm{Re}\,Z \end{pmatrix} \qquad (6.2)$$

Сопоставляя формулы (6.1), (6.2) с асимптотическим представлением (2.8) матрицы G, получим, что компоненты числовых матриц $g^{\pm}$ задаются равенствами

$$g_1^{1,+} = -g_1^{1,-} = -\log\frac{4ab}{a+b}, \quad g_2^{2,+} = -g_2^{2,-} = -\log\frac{4ab}{a+b} - \frac{1}{2(1-\nu)}$$

$$g_2^{1,+} = -g_1^{2,-} = -g_1^{2,+} = g_2^{1,-} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\,\mathrm{arctg}\frac{2\sqrt{ab}}{a-b} \qquad (6.3)$$

Кроме того, вычисляя коэффициенты интенсивности $K_a^j(G^p)$ векторов G^1 и G^2 в точке $(a, 0)$, имеем

$$K_a^2(G^1) = K_a^1(G^2) = -\frac{\mu}{1-\nu}\sqrt{\frac{2\pi b}{a(a+b)}}, \quad K_a^1(G^1) = K_a^2(G^2) = 0 \qquad (6.4)$$

Итак, для того, чтобы воспользоваться формулами (3.1) и (4.2) для асимптотики решения и коэффициентов интенсивности напряжений, необходимо найти значения $u^{\pm}$ (см. формулы (2.3), (2.14), (2.15)). Для определенности рассмотрим задачу о растяжении трещин $[-b, -h]$ и $[h, a]$ нормальной симметричной нагрузкой $q \in C([-b, a])$. Тогда [7] справедливо представление

$$u = \frac{1}{2\mu}\begin{pmatrix} (1-2\nu)\,\mathrm{Re}\,\tilde{Z}^0 - y\,\mathrm{Im}\,\tilde{Z} \\ 2(1-\nu)\,\mathrm{Im}\,\tilde{Z}^0 - y\,\mathrm{Re}\,\tilde{Z} \end{pmatrix} \qquad (6.5)$$

где

$$\bar{Z}(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{(z-a)(z+b)}} \int_{-b}^{a} \frac{q(\xi)\sqrt{(a-\xi)(b+\xi)}}{z-\xi}\, d\xi$$

$$\bar{Z}^0(z) = \frac{i}{\pi} \int_{-b}^{a} q(\xi) \Big| \log h \Big\{ \frac{2(a-\xi)(\xi+b)}{z-\xi} - 2\xi + a - b -$$

$$- 2\big((a-\xi)(b+\xi)\big((a-\xi)(b+\xi)(z-\xi)^{-2} - (2\xi+b-a)(z-\xi)^{-1} -$$

$$- 1\big)\big)^{1/2}\Big\} - \log\Big\{-2i\sqrt{(a-\xi)(b+\xi)} - 2\xi + a - b\Big\} \Big| \, d\xi$$

Вектор $u^{\pm}$ вычисляется как предел правой части равенства (6.4), при $z \to \pm i0$. Отметим, что $u_1^- = u_1^+$.

Приведем, наконец, выражение для коэффициентов интенсивности в вершинах трещин $[h, a]$ и $[-b, -h]$ и при постоянной нагрузке $q(x) = q^0$. Из формул (2.14), (2.15), (4.2), (5.7), (5.8), (6.3) и (6.4) получим

$$K_a^1 = q^0 \sqrt{\pi\frac{a+b}{2}} \left\{1 + \frac{2b}{a+b}\left(\log\frac{8ab}{h(a+b)}\right)^{-1}\right\} + O(h) \tag{6.6}$$

$$K_h^1 = q^0 \sqrt{\pi\frac{ab}{h}} \left(\log\frac{8ab}{h(a+b)}\right)^{-1} + O(\sqrt{h}) \tag{6.7}$$

$$K_{-b}^1 = q^0 \sqrt{\pi\frac{a+b}{2}} \left\{1 + \frac{2a}{a+b}\left(\log\frac{8ab}{h(a+b)}\right)^{-1}\right\} + O(h) \tag{6.8}$$

$$K_{-h}^1 = q^0 \sqrt{\pi\frac{ab}{h}} \left(\log\frac{8ab}{h(a+b)}\right)^{-1} + O(\sqrt{h}) \tag{6.9}$$

7. ***Некоторые замечания:***

i) В случае $\Omega = R^2$ и трещин одинаковой длины (то есть $a = b$) известны [8], [9] точные формулы для коэффициентов интенсивности

$$K_a^1 = q^0 \sqrt{\frac{\pi a}{s}} \left(1 - \frac{E(s)}{K(s)}\right) \tag{7.1}$$

$$K_h^1 = q^0 \sqrt{\frac{\pi}{h}}\, \frac{a^2 E(s) K(s)^{-1} - h^2}{\sqrt{a^2 - h^2}} \tag{7.2}$$

где $s = \sqrt{1 - ha^{-2}}$; K, E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Используя асимптотические представления [10], с. 919, для этих интегралов, находим

$$\frac{E(s)}{K(s)} = \frac{1}{\log(4ah^{-1})} + O(h^2|\log h|)$$

Отсюда видно, что выражения в (6.6) и (6.7) являются асимптотиками величин (7.1) и (7.2) даже с повышенными точностями $O(h^2|\log h|)$ и

$O(h^{3/2}|\log h|)$, соответственно. Отметим, что в случае несимметричной области Ω оценки $O(h)$ и $O(\sqrt{h})$ в формулах (6.6)—(6.9) точны.

ii) При определении асимптотик существенно использовалась удаленность трещин от внешнего контура на конечное (независящее от h) расстояние. В случае, когда расстояние от вершин $(-b, 0)$ и $(a, 0)$ трещины имеет порядок $O(h)$, то в их окрестности необходимо использовать аналогичную схему сращивания. Для задачи кручения цилиндрической области с продольной трещиной, близко расположенной к границе, асимптотика решения найдена в [11]. Общая схема построения асимптотических разложений приведена в [1].

ԵՐԿՈՒ ԿՈԼԻՆԵԱՐ ՃԱՔԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ՄԻՋՆՈՐՄԻ ՔԱՅՔԱՅՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ ԻՆՏԵՆՍԻՎՈՒԹՅԱՆ ԳՈՐԾԱԿՑԻ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ս. Ա. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՅՈՒ. Ա. ՌՈՄԱՇԵՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է երկու կոլինեար ճաքերով թուլացված Ω տիրույթի համար դասական առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը, երբ ճաքերի միջև միջնորմները բարակ են։ Կառուցվում է խնդրի համար ասիմպտոտական լուծում (երբ $h\to 0$)։ Ուսումնասիրվում է ճաքերի գագաթներում գործակիցների ինտենսիվության անալիտիկ կապը h-ից։ Երբ $\Omega = R^2$ այդ դեպքում լուծման և գործակիցների համար ստացվել են ակնհայտ բանաձևեր։

THE CHANGING OF STRESS INTENSITY FACTORS BY THE RUPTURE OF A BRIDLE BETWEEN TWO COLLINEAR CRACKS

S. A. NAZAROV, Ju. A. ROMASHEV

S u m m a r y

The classical plane elasticity problem for an area Ω, weakened by two collinear cracks, is considered in this paper. The width $2h$ of the bridle vanishes. An asymptotical (as $h \to 0$) solution of the problem is constructed. The stress intensity factors are investigated as functions of h. The formulae for the solutions and the factors are given in explicit form for $\Omega = R^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Об асимптотике решений эллиптических краевых задач при нерегулярном возмущении области.— Проблемы математического анализа. 1981. № 8, с. 72—153.
2. *Ильин А. М.* Краевая задача эллиптического уравнения второго порядка в области с щелью. 2. Область с малым отверстием.— Мат. сборник, 1977, т. 103, № 2, с. 265—284.

3. *Найфе А. Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
4. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* Оценки в L_p и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда—Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе.— Mathematiche Nachrichten, 1978, Bd. 81, s. 25—82.
5. *Лебедев Н. Н., Скальская И. П.* Применение парных интегральных уравнений к электростатическим задачам для полого проводящего цилиндра конечной длины.— ЖТФ, 1973, т. 43, в. 1, с. 44—51.
6. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
7. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 2. М.: Наука, 1976.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1960. 707 с.
9. *Парис П., Си Дж.* Анализ напряженного состояния около трещин. Сб. «Вязкость разрушения». М.: Мир, 1968, с. 64—142.
10. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
11. *Агаларян О. Б., Назаров С. А.* Об изменении коэффициентов интенсивности при запайке продольной трещины в призматическом стержне.— Докл. АН АрмССР, 1981, т. 72, № 1, с. 18—21.

Ленинградский государственный
университет им. А. А. Жданова

Поступила в редакцию
8.II.198[illegible]