

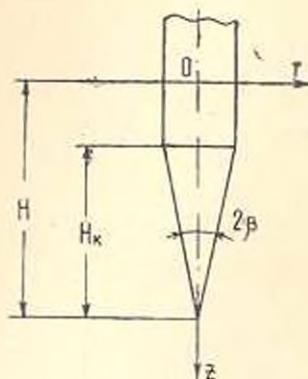
ПРОНИКАНИЕ В ВЕСОМУЮ ЖИДКОСТЬ ТОНКОГО КОНУСА,
 ПЕРЕХОДЯЩЕГО В ТОНКИЙ ЦИЛИНДР

АВАГЯНИ С. Г.

§ 1. Рассматривается задача о проникании тонкого конуса, переходящего в тонкий цилиндр, в весоую жидкость. Получены давление на конусе и сила сопротивления жидкости прониканию. Рассматривается также свободное проникание тонкого конечного конуса в жидкость.

При такой постановке задачи особый интерес представляет тот случай, когда тело уже погружено на глубину $H > H_k$ (фиг. 1). При $H \leq H_k$ решение совпадает с решением для бесконечного конуса [4]. Потенциал скоростей φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad (1.1)$$



Фиг. 1.

Цилиндрическая система координат выбрана, как показано на фиг. 1. Решение задачи ищем методом источников, распределенных по конической части тела. Начальные условия

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (1.2)$$

На свободной поверхности имеет место условие

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

Граничное условие на теле имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \begin{cases} -H \frac{\partial r_1}{\partial z} & \text{при } H - H_k < z < H \\ 0 & \text{при } 0 < z < H - H_k, z > H \end{cases} \quad (1.3)$$

где H — скорость проникания, r_1 — уравнение образующей конуса $r_1 = \beta(H - z)$, β — угол полураствора конуса. Можно полагать

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \quad (1.4)$$

где φ_0 соответствует решению задачи о движении тела в безграничной среде $-\infty < z < \infty$, а φ_1 — отражению от свободной поверхности. φ_0 ищем в виде

$$\varphi_0 = -\frac{1}{4\pi} \int_{H-H_2}^H \frac{q(z_1, t) dz_1}{V(z_1 - z)^2 + r^2} \quad (1.5)$$

где $q(z_1, t)$ — интенсивность источника. Для малых r имеем

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r \rightarrow 0} = \frac{1}{2\pi} \frac{q(z, t)}{r} \quad (1.6)$$

Из граничного условия (1.3) и (1.6) получим, что

$$q(z_1, t) = \begin{cases} 2\pi\beta^2 H(H - z_1) & H - H_k < z_1 < H \\ 0 & 0 < z_1 < H - H_k, \quad z_1 > H \end{cases} \quad (1.7)$$

Для удобства рассмотрим решение φ^0 от действия отдельных источников, где

$$\varphi = \int_0^{\bar{z}} \varphi^0 dz_1 \quad (1.8)$$

Для φ_0^0 получится

$$\varphi_0^0 = -\frac{q(z_1, t)}{4\pi V(z_1 - z)^2 + r^2} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\bar{k}} e^{-k(z_1 - t)} J_0(kr) q(z_1, t) dk \quad (1.9)$$

Тогда отраженные волны φ_1^0 можно искать в виде

$$\varphi_1^0 = \int_0^{\bar{k}} e^{-k(z_1 + z)} J_0(kr) A(k, t) dk \quad (1.10)$$

Обозначим

$$c = -\frac{q(z_1, t)}{4\pi} h(H - z_1) h(z_1 - H + H_k)$$

где h — единичная функция

$$h(H - z_1) h(z_1 - H + H_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } H - H_k < z_1 < H \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Из граничного условия на поверхности жидкости $z = 0$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

из (1.10) и (1.9) после преобразований по Лапласу по t получим

$$A = \frac{gk - s^2}{gk + s^2} c \quad (1.11)$$

где s обозначает преобразование Лапласа.

Тогда для $\bar{\varphi}_1^0$ имеем

$$\bar{\varphi}_1^0 = \int_0^{\infty} e^{-k(z_1+z)} J_0(kr) \frac{gk - s^2}{gk + s^2} c dk \quad (1.12)$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, найдем

$$\varphi_1^0 = -\frac{c}{V(z_1+z)^2+r^2} + \int_0^{\infty} 2e^{-k(z_1+z)} J_0(kr) \sqrt{gk} \left[\int_0^{t-z_1/V_0} \frac{q(z_1, t-t')}{4\pi} \sin \sqrt{gk} t' dt' \right] dk \quad (1.13)$$

Исходя из (1.8), получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \int_{H-H_k}^H \frac{\partial z^2}{\partial t} dz_1 \quad (1.14)$$

Согласно (1.4)

$$\frac{\partial \varphi^0}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_0^0}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1^0}{\partial t}$$

Для простоты рассмотрим тот случай, когда проникание происходит с постоянной скоростью, то есть $H = V_0 t$. Из (1.9) и (1.13) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^0}{\partial t} = & \frac{\beta^2 V_0^2 h(z_1 - V_0 t + H_k) h(V_0 t - z_1)}{2V(z_1+z)^2+r^2} - \\ & - \frac{\beta^2 V_0^3 (t - z_1/V_0) \delta(z_1 - V_0 t + H_k) h(V_0 t - z_1)}{2V(z_1+z)^2+r^2} + \\ & + \frac{\beta^2 V_0^3 (t - z_1/V_0) \delta(V_0 t - z_1) h(z_1 - V_0 t + H_k)}{2V(z_1+z)^2+r^2} - \\ & - \frac{\beta^2 V_0^2 h(z_1 - V_0 t + H_k) h(V_0 t - z_1)}{2V(z_1-z)^2+r^2} + \\ & + \frac{\beta^2 V_0^3 (t - z_1/V_0) \delta(z_1 - V_0 t + H_k) h(V_0 t - z_1)}{2V(z_1-z)^2+r^2} - \\ & - \frac{\beta^2 V_0^3 (t - z_1/V_0) \delta(V_0 t - z_1) h(z_1 - V_0 t + H_k)}{2V(z_1-z)^2+r^2} - \\ & - \int_0^{\infty} e^{-k(z_1+z)} J_0(kr) \beta^2 V_0^2 \left[1 - \cos \sqrt{gk} \left(t - \frac{z_1}{V_0} \right) \right] dk \quad (1.15) \end{aligned}$$

где δ — импульсная функция. После разложения подынтегрального выражения по степеням g до первого порядка дает вычисление интеграла в (1.14)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = & -\frac{\beta^2 V_0^2}{2} \ln \frac{V_0 t - z + \sqrt{(V_0 t - z)^2 + r^2}}{V_0 t - H_k - z + \sqrt{(V_0 t - H_k - z)^2 + r^2}} + \\ & + \frac{\beta^2 V_0^2}{2} \ln \frac{V_0 t + z + \sqrt{(V_0 t + z)^2 + r^2}}{V_0 t - H_k + z + \sqrt{(V_0 t - H_k + z)^2 + r^2}} + \\ & + \frac{\beta^2 V_0^2 H_k}{2 \sqrt{(V_0 t - H_k - z)^2 + r^2}} - \frac{\beta^2 V_0^2 H_k}{2 \sqrt{(V_0 t - H_k + z)^2 + r^2}} - \\ & - \frac{g \beta^2}{2} \left| \frac{H_k^2}{\sqrt{(V_0 t - H_k + z)^2 + r^2}} \right. \\ & - 2(V_0 t + z) \ln \frac{V_0 t + z + \sqrt{(V_0 t + z)^2 + r^2}}{V_0 t - H_k + z + \sqrt{(V_0 t - H_k + z)^2 + r^2}} + \\ & \left. + 2(\sqrt{(z + V_0 t)^2 + r^2} - \sqrt{(V_0 t - H_k + z)^2 + r^2}) \right] \quad (1.16) \end{aligned}$$

Давление внутри жидкости вычисляется по формуле

$$\frac{p}{\rho_0} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + gz + \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{V^2}{2} \quad (1.17)$$

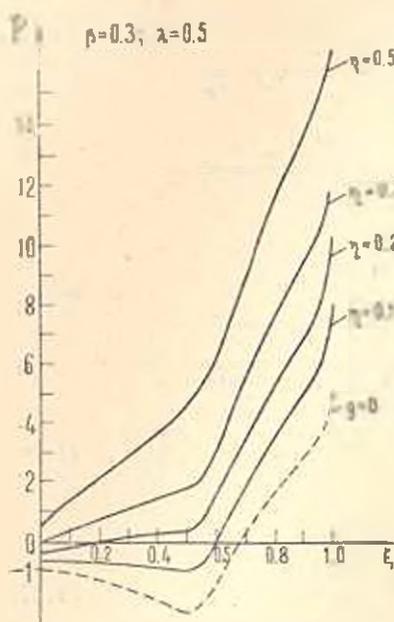
График зависимости $P = 2(p - p_0)/(\rho_0 \beta^2 V_0^2)$ от $\xi = z/V_0 t$ дан на фиг. 2. Из графика видно, что давление принимает также и отрицательные значения, что наименьшее давление имеет место у основания конуса. Следует отметить, что при проникании бесконечного конуса всюду давление имеет положительное значение. Сила сопротивления со стороны жидкости на конус вычисляется по формуле

$$Q = -2\pi \rho_0 \beta^2 \int_{V_0 t - H_k}^{\infty} (V_0 t - z) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - gz + \frac{\beta^2 V_0^2}{2} \right) dz \quad (1.18)$$

После подстановки значения $\partial \varphi / \partial t$ из (1.16) и вычисления интеграла получим

$$\begin{aligned} F = & \frac{\Gamma^2}{4} \left(\ln \frac{4}{\beta^2} - 1 \right) - (\lambda - 1) \ln \frac{2 - \lambda}{2(1 - \lambda)} + \ln \frac{2 - \lambda}{2} - \\ & - \frac{\lambda}{2} (2 - \lambda) \ln \frac{2(2 - \lambda)}{2(1 - \lambda) + \sqrt{4(1 - \lambda)^2 + \beta^2}} + \\ & + \frac{\lambda^2}{2} \ln \frac{2}{\beta \lambda} + \frac{\gamma \lambda^2}{2\beta^2} \left(1 - \frac{2}{3} \lambda \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\gamma}{2} \left[-\lambda^2(2-\lambda) \ln \frac{2(2-\lambda)}{2(1-\lambda) + \sqrt{4(1-\lambda)^2 + \beta^2}} + \frac{8}{3} \ln \frac{2}{2-\lambda} + \right. \\
 & + \frac{2}{3} \lambda^2 - \frac{1}{3} \lambda^3 + 2(1-\lambda) \ln \frac{2(1-\lambda)}{2-\lambda} + \frac{2}{3} (1-\lambda)^2 \ln \frac{2-\lambda}{2(1-\lambda)} + \\
 & \left. + \frac{4}{3} (1-\lambda^2) \ln \frac{2(1-\lambda)}{2-\lambda} \right] \quad (1.19)
 \end{aligned}$$



Фиг. 2

где

$$F = \frac{Q}{2\pi r_0 \beta^3 V_0^2 t^2} \cdot \lambda = \frac{H_k}{V_0 t}, \quad \eta = \frac{gt}{V_0}$$

Анализ (1.19) показывает, что сила сопротивления по сравнению с бесконечным конусом получается меньше. При $\lambda = 1$ получится выражение

$$\begin{aligned}
 F &= -\frac{1 + \ln 4\beta^2}{4} + \\
 &+ \frac{\gamma}{2} \left(\ln \frac{2}{\beta} - \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3\beta^2} \right)
 \end{aligned}$$

которое совпадает с результатом решения для бесконечного конуса.

§ 2. Свободное проникание конечного тонкого конуса в несжимаемую жидкость.

В этой задаче тоже важен тот случай, когда тело проникает на глубину $H \geq H_k$, где H_k — высота конуса. Когда глубина проникания получается меньше высоты конуса, задача уже решена [5] и доказано, что при таком условии получается колебательное движение. Граничное условие на теле будет

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \begin{cases} H\dot{z} & \text{при } H - H_k < z < H \\ 0 & \text{при } 0 < z < H - H_k, \quad z > H \end{cases}$$

где H — глубина проникания, \dot{H} — скорость проникания. Здесь не учитывается кавитация. Проведем соответствующие выкладки, как и в § 1, и сохраняя члены, содержащие первую степень g , получим

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\frac{\beta^2 H}{2} \left[(H-z) \ln \frac{4(z+H_k-H)}{\beta^2(H-z)} - (H+z) \ln \frac{H+z}{H-H_k+z} \right] - \\
 &- \frac{\beta^2 H^2 H_k}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{(H-H_k+z)^2 + r^2}} - \frac{1}{\sqrt{(H-H_k-z)^2 + r^2}} \right) - \\
 &- \frac{\gamma H^2}{2} \left(\ln \frac{4(z+H_k-H)}{\beta^2(H-z)} - \ln \frac{H+z}{H-H_k+z} \right) +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{\beta^2 g}{2} \left| 2(z + H) \ln \frac{H + z}{H - H_k + z} - 2H_k - \frac{H_k^2}{\sqrt{(H - H_k + z)^2 + r^2}} \right|$$

Силу сопротивления вычислим по формуле

$$Q = -2\pi r_0 \beta^2 \int_{H-H_k}^H \left(\frac{\partial z}{\partial t} - gz + \frac{H \rho_0^2 z}{2} \right) (H - z) dz \quad (2.1)$$

Исходя из закона Ньютона

$$mH = mg - Q$$

и учитывая (2.1), найдем скорость проникания

$$H = \pm \sqrt{M}$$

$$M = e^{-2 \int_{H_k}^H \frac{a_2}{a_1} dH} \left[\int_{H_k}^H \frac{2a_2}{a_1} e^{\int_{H_k}^H \frac{a_2}{a_1} dH} dH + \frac{mV_0^2 + 2g \left(mH_k - \frac{H_k^4}{4} \Delta \right)}{m + aH_k^3} \right] e^{-2 \int_{H_k}^H \frac{a_2}{a_1} dH}$$

Отсюда найдем ту глубину H_1 , где тело останавливается. Имеем

$$\int_{H_k}^{H_1} \frac{2a_2}{a_1} e^{\int_{H_k}^H \frac{a_2}{a_1} dH} dH + \frac{mV_0^2 + 2g \left(mH_k - \frac{H_k^4}{4} \Delta \right)}{m + aH_k^3} = 0$$

где a_1 , a_2 , a_3 , a_4 — функции, зависящие от H , а α , Δ — постоянные. Качественный анализ показывает, что такая глубина реально существует и для этого необходимо, чтобы было $\lambda > \sqrt{\frac{m}{\pi r_0 \beta^2}}$. Значит, свободно проникающее в несомую жидкость тело всегда останавливается при указанном условии.

В заключение автор выражает благодарность А. Г. Багдоеву за внимание к работе и ее полезное обсуждение.

ՐԱՐԱԿ ԳԼԱՆԻ ՓՈՒՆԱՆՑՎՈՂ ՐԱՐԱԿ ԿՈՆԻ ՔԱՓԱՆՑՈՒՄԸ
ԿՇԻՌ ՈՒՆԵՑՈՂ շԵՂՈՒԿԻ ՄԵՁ

Ս. Յ. ԱՎԱԳՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Գիտարկվում է կշիռ ունեցող հեղուկի մեջ բարակ դյանի փոխանցվող բարակ կոնի թափանցման խնդիրը:

Որոշվում են ճնշումը կոնի վրա և թափանցմանը հեղուկի դիմադրության ուժը: Գիտարկվում է նաև բարակ կոնի աղաս թափանցումը հեղուկի մեջ:

THE PENETRATION IN PONDERABLE FLUID OF A THIN
CONE PASSING INTO A THIN CYLINDER

S. G. AVAGIAN

S u m m a r y

The pressure on the cone and the resistance force of fluid to penetration are obtained. The free penetration of a thin finite cone in fluid is also considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А. Г. Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван, изд-во АН Арм.ССР, 1961.
2. Сагомолян А. Я. Проникание. Изд-во Моск. ун-та, 1974.
3. Деві Г. Руководства к практическому применению преобразования Лапласа. М. Изд-во «Наука», 1965.
4. Авагян С. Г., Багдоев А. Г. Некоторые задачи проникания тел в несомую жидкость. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1980, т. XXXIII, № 4.
5. Исследования по механике твердого деформируемого тела. Ереван: Изд-во АН Арм.ССР, 1981. с. 10—16.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
10. IV. 1981