ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXV, № 1, 1982 Механика

Л. Г. ПЕТРОСЯН

К ТЕОРИИ СДАВЛИВАНИЯ СЛОЯ СУСПЕНЗИИ МЕЖДУ КРУГЛЫМИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ДИСКАМИ

Тонкие слои смазки, в которых свойства смазочного материала оказываются отличными от свойств этого материала в больших объемах, играют в технике огромную роль, так как характеристика работы деталей машин в режиме граничной смазки обусловлена наличием такого тонкого слоя. Известно, что создание подобного слоя для конкретных случаев должно опираться на умении правильного выбора противозадирных присадок. Обычно выбор присадок носит эмпирический характер, и поэтому мало известно об относительно основных физических и химических процессах образования таких слоев. Вследствие развития техники эмпирический подход становится недостаточным и возникает необходимость знания механизма образования таких слоев.

Для улучшения условий работы подшипников в смазки обычно вводят присадки. Кроме того, обычно смазочные масла в подшипниках в значительной степени подвержены загрязнению пылевыми и металлическими частицами. Такая «загрязненная» смазка ведет себя как суспензия.

Эксперименты свидетельствуют о том, что присадки функционируют не только в зоне граничной смазки, но и входят в область гидродинамической смазки, постоянно благоприятствуя режиму работы тонкого слоя гидродинамической смазки [1].

Динамически нагруженные подшипники, в которых нагрузка изменяется во времени, вызывают значительный интерес и являются объектом исследований.

Многочисленные экспериментальные исследования свидетельствуют о существенных различиях гидродинамических свойств суспензий и обычных вязких жидкостей. Течение суспензий, как правило, сопровождается расслоением на твердую и жидкую фазы. В случае пуазейлевского течения в круглой трубе для суспензий наблюдаются два эффекта — приосевой (миграция взвешанных частиц к оси трубы) и пристеночный (соответствующее понижение концентрации твердой фазы вблизи стенок) [2—5]. Детальный анализ экспериментального материала убеждает, что последовательное развитие теоретических представлений о реологии суспензий можно осуществить на моделях, учитывающих внутреннее вращение частиц и моментные напряжения [6—9].

Накоплено много результатов, свидетельствующих о том, что на базе классической теории континуума невозможно точно рассчитать характеристики течения таких суспензий в особенности при рассмотрении течения смазки в подшипниках, где величина зазора может быть сравнима со средним размером частиц или молекул смазки.

Особенностью граничных-пристенных смазочных слоев является (как это выяснено рентгено-структурным и электронографическим анализом) ориентированное расположение в них молекул, имеющих удлиненную форму, обращенных в мономолекулярном слое своими активными концами перпендикулярно к твердой поверхности [10]. В полимолекулярных пристенных слоях молекулярные слои расположены так, что каждый последующий слой является зеркальным отображением предыдущего [10].

В настоящее время, по результатам исследований Б. В. Дерягина и его сотрудников, смазка в граничном слое характеризуется ярко выраженной ориентированной структурой и слоистым строением. Каждый слой состоит из ряда ориентированных одинаково молекул. От объема жидкости смазка отделена резкой границей [10].

Указанные исследования граничных-пристенных смазочных слоев выполнены для покоящихся поверхностей (для покоящихся смазочных веществ).

Все более очевидно, что разработанные в последнее тридцатилетие теории структурных жидкостей [11—16 и др.] могут успешно описывать неньютоновские поведения реальных жидких суспензий.

В работах [15—16] была построена система уравнений двухжидкостной гидродинамики в приближении взаимопроникающих континуумов; среда характеризуется асимметрическим тензором напряжений.

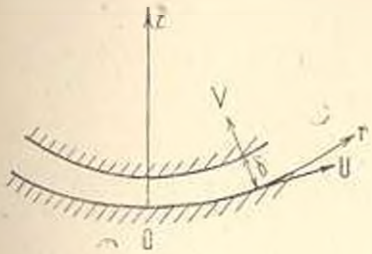
В рамках неравновесной термодинамики была построена замкнутая система уравнений, включающая в себя уравнения диффузии и момента количества движения и позволяющая определить пространственное распределение концентрации и угловой скорости вращения частиц.

В настоящей статье применена теория двухжидкостного континуума с несимметричным тензором напряжений к сдавливанию слоя суспензии между круглыми параллельными дисками.

Применение указанной теории позволяет получить распределение концентрации твердых частиц, облегчает правильный выбор противозадирных присадок. При рассмотрении распределения концентрации суспензии наблюдаются пристеночный и приосевой эффекты.

1. Приближенные уравнения осесимметричного течения смазочного слоя суспензии

Рассмотрим установившееся осесимметричное течение вязкой суспензии с несимметричным тензором напряжений в тонком слое между приблизительно параллельными поверхностями, радиусы кривизны которых достаточно велики по сравнению со средней толщиной слоя δ(фиг. 1). Пренебрегая кривизной первой поверхности, обозначим: через r криволинейную (радиальную) координату и через z координату, отсчитываемую вдоль оси симметрии. Чтобы средняя толщина слоя оставалась малой во все время движения, необходимо положить осевую скорость V весьма малой по сравнению со скоростью U вдоль направлений r.



Фиг. 1.

Уравнения неразрывности, количества движений, момента количества движения и диффузии одного из компонентов системы для случая несжимаемой, нетеплопроводной двухжидкостной системы с несимметричным тензором напряжений имеют вид [15]

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \quad \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla\cdot\tau, \quad \rho I\frac{d\omega}{dt} = \nabla\cdot\mu + \tau\times\mathbf{I}$$

$$\rho\frac{dc_1}{dt} = -\nabla\cdot\mathbf{J}_1 \tag{1.1}$$

Здесь ρ — плотность жидкости, $\mathbf{v}$ — скорость центра масс элемента жидкости, τ — диада силовых напряжений, ω — вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума, I — среднее значение момента инерции на единицу массы частиц, составляющих систему, μ — диада моментных напряжений, $\mathbf{I}$ — единичная пространственная диада, $d(\ldots)/dt$ — полная производная по времени, ∇ — пространственный градиент, c_1 и $\mathbf{J}_1 = \rho_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v})$ — соответственно концентрация и диффузионный поток вещества $k = 1$, а ρ_1 и $\mathbf{v}_1$ — соответственно плотность и скорость, операции $(\times)$ означает, что левые множители диад перемножаются векторно, а правые — скалярно.

Предполагается, что внешние массовые силы и моменты отсутствуют.

Феноменологические уравнения для этого случая запишутся в виде [16]

$$\pi_0 = \eta_0\nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \quad \pi^d = 2\eta_s(\nabla\mathbf{v})^d, \quad \mu_0 = c_0\nabla\cdot\omega$$

$$\mu^d = 2c_d(\nabla\omega)^d, \quad \mathbf{P}^a = \eta_r(\nabla\times\mathbf{v} - 2\omega)$$

$$\rho D(\nabla c_1 + k_p\nabla p) = \mathbf{J}_1 + a_1a_2\mathbf{J}_1\times(\omega - \Omega) + a_1a_3(\nabla\times\omega) +$$
$$+ a_1a_4[(\nabla\times\omega)\times(\omega - \Omega)]$$

$$-\mathbf{d} = a_3\mathbf{J}_1 + a_4\mathbf{J}_1\times(\omega - \Omega) + a_5(\nabla\times\omega) + a_6[(\nabla\times\omega)\times(\omega - \Omega)] \tag{1.2}$$

В выражениях (1.1) и (1.2)

$$\tau = -p\mathbf{I} + \pi = (\pi_0 - p)\mathbf{I} + \pi^a + \pi^d, \quad \mu = \mu_0\mathbf{I} + \mu^a + \mu^d$$

$$\mathbf{P}^a = \frac{1}{2}\tau\times\mathbf{I}, \quad \mu^a = -\mathbf{I}\times d, \quad \Omega = \frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{v}, \quad k_p = \frac{a_1\eta}{\rho D} \tag{1.3}$$

При получении (1.3) были произведены замены диады π^a на эквивалентный ей псевдовектор $\mathbf{P}^a$ и диады $(\nabla\mathbf{v})^a$ — на псевдовектор $\frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{v}$.

В уравнениях (1.2) и (1.3) p — равновесное давление, π — вязкая диада напряжений, π_n и μ_n соответственно равно одной трети следов диад π и μ, индексом a отмечены антисимметричные диады, индексом d — симметричные диады с нулевым следом, $\mathbf{d}=\frac{1}{2}\mu\times\mathrm{I}$ — полярный псевдовектор, эквивалентный псевдодиаде μ^a; феноменологические коэффициенты η_0, η, η_r, c_0, c_d, D, γ, a_i — скаляры, характеризующие изотропные свойства среды, в частности, η_0 — второй коэффициент вязкости, η — динамическая ньютоновская вязкость, η_r — динамическая вращательная вязкость, c_0, c_d — коэффициенты моментной вязкости, D — коэффициент диффузии, $k_p D$ — коэффициент бародиффузии и т. д. Заметим, что коэффициенты a_i и γ не интерпретируются столь простым образом.

Ограничимся анализом неплоского двумерного (осесимметричного) установившегося течения жидкости. Итак, скорость $\mathbf{v}$, скорость вращения частиц ω, давление p, диффузионный поток $\mathbf{J}_1$ и завихренность Ω имеют форму

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}\,[v_r(r,z),\,0,\,v_z(r,z)],\quad \omega=\omega\,[0,\,\omega_\varphi(r,z),\,0]$$

$$\mathbf{J}_1=\mathbf{J}_1\,[J_{1r}(r,z),\,0,\,J_{1z}(r,z)],\quad \Omega=\Omega\,[0,\,\Omega_\varphi(r,z),\,0] \tag{1.4}$$

Уравнения движения (1.1) с учетом (1.2) и (1.3) сводятся к виду

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial(r\,v_r)}{\partial r}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \tag{1.5}$$

$$\rho\left(v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_z\,\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}+(\eta+\eta_r)\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{v_r}{r^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right)-$$

$$-2\,\eta_r\,\frac{\partial\omega_\varphi}{\partial z} \tag{1.6}$$

$$\rho\left(v_r\,\frac{\partial v_z}{\partial r}+v_z\,\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+(\eta+\eta_r)\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)+$$

$$+2\,\eta_r\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial\,(r\,\omega_\varphi)}{\partial r}\right] \tag{1.7}$$

$$\rho I\left(v_r\,\frac{\partial\omega_\varphi}{\partial r}+v_z\,\frac{\partial\omega_\varphi}{\partial z}\right)=2\eta_r\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+4\eta_r\,\omega_\varphi+$$

$$+c_d\left(\frac{\partial^2\omega_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial\omega_\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\omega_\varphi}{\partial z^2}-\frac{\omega_\varphi}{r^2}\right)-(\nabla\times\mathbf{d})_\varphi \tag{1.8}$$

где

$$-(\nabla\times\mathbf{d})_\varphi=a_3\left(\frac{\partial J_{1r}}{\partial z}-\frac{\partial J_{1z}}{\partial r}\right)-a_4\left[J_{1z}\left(\frac{\partial\omega_\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\Omega_\varphi}{\partial z}\right)+\frac{\partial J_{1z}}{\partial z}(\omega_\varphi+\Omega_\varphi)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial J_{1r}}{\partial r}(\omega_\varphi+\Omega_\varphi)+J_{1r}\left(\frac{\partial\omega_\varphi}{\partial r}+\frac{\partial\Omega_\varphi}{\partial r}\right)\right]-a_5\left(\frac{\partial^2\omega_\varphi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\omega_\varphi}{\partial r^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r}\,\frac{\partial\omega_\varphi}{\partial r}-\frac{\omega_\varphi}{r^2}\right)-a_6\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\omega_\varphi}{r}\,\frac{\partial(r\omega_\varphi)}{\partial r}\right)-\frac{\partial}{\partial r}\left(\omega_\varphi\,\frac{\partial\omega_\varphi}{\partial z}\right)\right]+$$

$$+ a_6 \left| \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Omega_z}{r}\frac{\partial (r\omega_\varphi)}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\Omega_z \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial z}\right)\right| \tag{1.9}$$

В данной работе ограничимся случаем постоянных $\varkappa_t$, $\varkappa_r$, c_d и $a_i = 0$. В дальнейшем при решении задачи большинство коэффициентов будем считать постоянными и лишь некоторые будут функцией концентрации, обращающимися в нуль при значениях концентрации, равных нулю и единице.

В виду малости δ кривизной координатных линий будем пренебрегать и примем, что для течения в рассматриваемом вязком слое суспензии остаются справедливыми уравнения (1.5)—(1.9).

Среднее значение радиусов кривизн рассматриваемых поверхностей (фиг. 1) обозначим L. На основании вышеизложенного предположения толщина слоя δ должна считаться достаточно малой по сравнению со средним радиусом кривизны L. Отношение этих величин обозначим через ε

$$\frac{\delta}{L} = \varepsilon \tag{1.10}$$

Параметр ε, равный отношению толщины слоя к среднему радиусу кривизны поверхности, заведомо считается малой величиной $\varepsilon \ll 1$.

Введем безразмерные переменные с учетом того, что порядок координаты и скорости в направлении нормали к первой поверхности мал по сравнению с порядком координат и скоростей в направлении r

$$r = Lr^*, \quad z = \delta z^*$$

$$v_r = U v_r^*, \; v_z = V v_z^* \tag{1.11}$$

Подставляя эти выражения в уравнение неразрывности (1.7), получим

$$\frac{1}{r^*}\frac{\partial (r^* v_r^*)}{\partial r^*} + \frac{VL}{\delta U}\frac{\partial v_z^*}{\partial z^*} = 0 \tag{1.12}$$

Так как все слагаемые в уравнении неразрывности имеют один и тот же порядок величины, то необходимо положить

$$\frac{V}{\delta}\frac{L}{U} = 1$$

откуда следует, что

$$\varepsilon = \frac{V}{U} \tag{1.13}$$

Имея в виду (1.12), дополнительно введем следующие безразмерные переменные:

$$v_{1r} = U v_{1r}^* \text{ и } v_{1z} = V v_{1z}^*$$

тогда

$$f_{1r} = \rho U f_{1r}^* \text{ и } f_{1z} = \rho V f_{1z}^* \tag{1.14}$$

Характерное число Рейнольдса, безразмерные давление и скорость вращения частиц введем следующим образом:

$$R_e = \frac{\rho U L}{\eta + \eta_r}, \quad p = \frac{(\eta + \eta_r)\, UL}{\delta^2}\, p^* = \frac{\rho U^2}{\varepsilon^2 R_e}\, p^*, \quad \omega_z = \frac{U}{\delta}\, \omega^* \tag{1.15}$$

Подставляя в уравнения (1.6)—(1.9) значения безразмерных переменных из (1.11), (1.14) и (1.15), получим

$$\begin{aligned} v_r^* \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} + v_z^* \frac{\partial v_r^*}{\partial z^*} = &- \frac{1}{\varepsilon^2 R_e} \frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 v_r^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} - \right. \\ &\left. - \frac{v_r^*}{r^{*2}} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 v_r^*}{\partial z^{*2}} \right) - 2N^2 \frac{1}{\varepsilon^2 R_e} \frac{\partial \omega^*}{\partial z^*} \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} v_r^* \frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} + v_z^* \frac{\partial v_z^*}{\partial z^*} = &- \frac{1}{\varepsilon^4 R_e} \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 v_z^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 v_z^*}{\partial z^{*2}} \right) + 2N^2 \frac{1}{\varepsilon^2 R_e} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial (r^* \omega^*)}{\partial r^*} \right] \end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} \left(v_r^* \frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} + v_z^* \frac{\partial \omega^*}{\partial z^*} \right) = &\; 2N^2 \frac{\varepsilon^2}{R_e} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial v_r^*}{\partial z^*} - \frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} \right) - 4N^2 \frac{1}{R_r} \omega^* + \\ &+ \frac{1}{R_r} \left(\frac{\partial^2 \omega^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial z^{*2}} - \frac{\omega^*}{r^{*2}} \right) - \frac{1}{F} \left\{ f_{1z}^* \left[\frac{\partial \omega^*}{\partial z^*} + \right. \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v_r^*}{\partial z^{*2}} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_z^*}{\partial r^* \partial z^*} \right) \right] + \left(\frac{\partial f_{1z}^*}{\partial z^*} + \frac{\partial f_{1r}^*}{\partial r^*} \right) \left[\omega^* + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r^*}{\partial z^*} - \varepsilon^2 \frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} \right) \right] + \\ &\left. + f_{1r}^* \left[\frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v_r^*}{\partial r^* \partial z^*} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_z^*}{\partial r^{*2}} \right) \right] \right\} + \frac{1}{G} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} + \frac{\omega^*}{r^*} \right) \times \right. \\ &\times \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 v_r^*}{\partial z^{*2}} - \frac{\partial^2 v_z^*}{\partial r^* \partial z^*} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \omega^*}{\partial z^*} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 v_r^*}{\partial r^* \partial z^*} - \frac{\partial^2 v_z^*}{\partial r^{*2}} \right) + \\ &\left. + \frac{1}{2} \frac{1}{r^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial z^*} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial v_r^*}{\partial z^*} - \frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} \right) - 2 \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\omega^*}{r^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial z^*} \right] \end{aligned} \tag{1.18}$$

Здесь

$$R_r = \frac{\rho U L^2}{c_0 + c_d}, \quad E = \frac{L^2}{I}, \quad F = \frac{L^2}{\alpha_4}, \quad G = \frac{\rho L^2}{\alpha_6}$$

$$N = \left(\frac{\eta_r}{\eta + \eta_r} \right)^{1/2}, \quad c_0 = -\alpha_5 = \mathrm{const} \tag{1.19}$$

Полученные дифференциальные уравнения движения несимметричной суспензии в тонком слое содержат безразмерные параметры ε и R_r.

Примем видоизмененное число Рейнольдса по своему порядку обратно пропорциональным значению параметра ε, то есть

$$R_e \approx \frac{1}{\varepsilon} \quad (\text{или } \varepsilon^2 R_e \ll 1) \tag{1.20}$$

В зависимости от соотношений между комплексами R_e, R_r, E, F, G возможны различные типы уравнений для смазочного слоя.

Если R_e и $\sqrt{R}$ имеют одинаковые порядки при условии, что $E \gg R_e$, $F \gg R_e$, $\sqrt{G} \gg R_e$, то дифференциальные уравнения (1.16) — (1.18) при использовании (1.20) и сохранении слагаемых, имеющих наибольший порядок величины, в размерных переменных принимают следующий вид:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = (\eta + \eta_r)\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - 2\eta_r \frac{\partial \omega}{\partial z} \tag{1.21}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \tag{1.22}$$

$$(c_a + c_d)\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} - 2\eta_r\left(2\omega - \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) = 0$$

$$(\omega_\varphi = \omega) \tag{1.23}$$

Здесь c_a — коэффициент моментной вязкости.

Из уравнения (1.22) следует, что в тонком смазочном слое суспензии давление не изменяется по толщине слоя.

Уравнения (1.21)—(1.23) совместно с уравнением неразрывности (1.5) являются дифференциальными уравнениями смазочного слоя суспензии. Эти уравнения смазочного слоя суспензии содержат члены, характеризующие несимметричность диад силовых и моментных напряжений.

2. Приближенные уравнения распределения концентрации

Закон распределения концентрации находим из уравнений (1.1) и (1.2) с учетом (1.3), (1.4) и (1.22), которые сводятся к виду

$$\rho D\frac{\partial c_1}{\partial r} + \rho D k_p \frac{\partial p}{\partial r} = J_{1r} - \left[a_1 a_2 J_{1z} + a_1 a_4 \frac{1}{r}\frac{\partial (r\omega)}{\partial r}\right] \times$$

$$\times \left[\omega - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right] \tag{2.1}$$

$$\rho D\frac{\partial c_1}{\partial z} = J_{1z} + \left[a_1 a_2 J_{1r} - a_1 a_4 \frac{\partial \omega}{\partial z}\right]\left[\omega - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right] \tag{2.2}$$

Подставляя в уравнения (2.1) и (2.2) значения безразмерных переменных из (1.11), (1.14) и (1.15), получим

$$\frac{1}{R_D}\frac{\partial c_1}{\partial r^*} + \frac{1}{\varepsilon^2 \Phi R_e}\frac{\partial p^*}{\partial r^*} = J^*_{1r} - \left[\frac{1}{M}J^*_{1z} + \frac{1}{\varepsilon^2 Q}\frac{1}{r^*}\frac{\partial (r^*\omega^*)}{\partial r^*}\right] \times$$

$$\times \left[\omega^* - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^*_r}{\partial z^*} - \varepsilon^2\frac{\partial v^*_z}{\partial r^*}\right)\right] \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{R_D}\frac{\partial c_1}{\partial z^*} = \varepsilon^2 J^*_{1z} + \left[\frac{1}{M}J^*_{1r} - \frac{1}{\varepsilon^2 Q}\frac{\partial \omega^*}{\partial z^*}\right]\left[\omega^* - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^*_r}{\partial z^*} - \varepsilon^2\frac{\partial v^*_z}{\partial r^*}\right)\right] \tag{2.4}$$

Здесь

$$R_D=\frac{LU}{D},\quad M=\frac{L}{a_1a_2U},\quad \Phi=\frac{L}{\rho UD\,k_p},\quad Q=\frac{\rho L^2}{a_1a_4\,U} \tag{2.5}$$

В зависимости от соотношений между комплексами R_e, R_D, M, Φ, Q возможны различные типы уравнений для отыскания концентрации.

Если R_e, R_D, M, Φ и Q имеют одинаковые порядки, то дифференциальные уравнения (2.3) и (2.4) при использовании (1.20) и сохранении слагаемых, имеющих наибольший порядок величины, в размерных переменных принимают следующий вид:

$$\rho Dk_p\frac{\partial p}{\partial r}=j_{1r} \tag{2.6}$$

$$\rho D\frac{\partial c_1}{\partial z}=\left|\,a_1a_2\,j_{1r}-a_1a_4\frac{\partial\omega}{\partial z}\,\right|(\omega-\Omega_z) \tag{2.7}$$

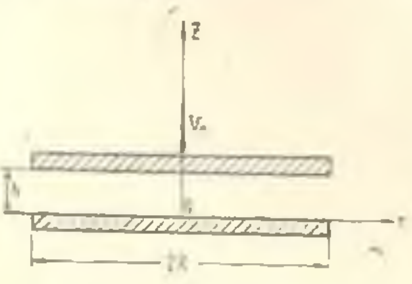
где Ω_z после отбрасывания малых членов по сравнению с другими имеет вид $\Omega_z=\Omega-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v_r}{\partial z}$.

Для закона распределения концентрации c_1 вещества $k=1$ из (2.6) и (2.7) имеем

$$\rho D\frac{\partial c_1}{\partial z}=\left|\,a_1a_2\,\rho Dk_p\frac{\partial p}{\partial r}-a_1a_4\frac{\partial\omega}{\partial z}\,\right|(\omega-\Omega_z) \tag{2.8}$$

3. Сдавливание слоя суспензии между круглыми дисками

Пусть имеем две одинаковые горизонтальные круглые пластины, расположенные параллельно друг к другу так, что соединяющая линия их центров перпендикулярна пластинам. Допустим, что между пластинами находится суспензия. Нижняя пластина пусть будет неподвижной, а верхняя пусть перемещается поступательно с постоянной скоростью V_0 в направлении к нижней; тогда находящееся между пластинами вязкое вещество будет вдавливаться в стороны (фиг. 2).



Фиг. 2.

Применим к рассматриваемой задаче дифференциальные уравнения (1.5), (1.21)—(1.23).

Граничные условия таковы:

$$v_r=0,\ v_z=0,\ \omega=0 \quad \text{при } z=0$$

$$v_r=0,\ v_z=-V_0,\ \omega=0 \text{ при } z=h$$

$$p=p_0 \quad \text{при} \quad r=R. \tag{3.1}$$

Здесь p_0 — давление на внешнем крае пластины, R — радиус пластины.

Выражения для скорости v_r, угловой скорости вращения частиц ω и закона распределения давления p вдоль радиуса находим из решений уравнений (1.5), (1.21)—(1.23) при граничных условиях (3.1)

$$v_r = \frac{z}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial r}(z-h) + \frac{N^2 h}{2\eta k}\frac{\partial p}{\partial r}\left| \operatorname{sh} kz - \frac{(\operatorname{ch} kz - 1)(\operatorname{ch} kh - 1)}{\operatorname{sh} kh} \right| \qquad (3.2)$$

$$\omega = -\frac{h}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial r}\left| \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} kh} - \frac{z}{h} \right| + \frac{h \operatorname{sh} kz}{4\eta}\frac{\partial p}{\partial r}\left| \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{sh} kz} - \frac{\operatorname{ch} kh - 1}{\operatorname{sh} kh} \right| \qquad (3.3)$$

$$p - p_0 = \frac{\eta V_0 (R^2 - r^2)}{4h^3 \left| \frac{1}{12} + \frac{l^2}{h^2} - \frac{Nl}{2h} \operatorname{cth} \frac{kh}{2} \right|} \qquad (3.4)$$

где

$$l = \left(\frac{c_a + c_d}{4\eta} \right)^{1/2}, \quad k = \frac{N}{l} \qquad (3.5)$$

Здесь параметр l — характерная материальная длина.

Выражения для несущей способности слоя суспензии W и времени реакции t имеют вид

$$W = 2\pi \int_0^R (p - p_0)\, r\, dr = \frac{\pi\eta V_0 R^4}{8h^3 \left| \frac{1}{12} + \frac{l^2}{h^2} - \frac{Nl}{2h} \operatorname{cth} \frac{kh}{2} \right|} \qquad (3.6)$$

$$t = -\frac{3\pi\eta R^4}{4W} \frac{1}{6} \int_{h_0}^{h} \frac{dh}{h^3 \left[\frac{1}{12} + \frac{l^2}{h^2} - \frac{Nl}{2h} \operatorname{cth} \frac{kh}{2} \right]} \qquad (3.7)$$

При получении (3.7) из (3.6) нагрузка предполагалась постоянной и, кроме того, было принято $V_0 = -\frac{dh}{dt}$, где h_0 — начальная толщина слоя, h — заданное значение слоя.

Заметим, что вид уравнения смазочного слоя совпадает с уравнениями смазки микрополярных жидкостей [17].

В работе [17] подробно исследованы зависимости безразмерных несущей способности и времени реакции от безразмерной толщины пленки $H = \frac{h}{h_0}$ при различных значениях параметров N и $L = \frac{h_0}{l}$. Эти исследования показывают, что чем меньше толщина слоя, тем более явно выражено влияние подструктуры, вызывающее существенное возрастание эффективной вязкости. При снижении H наблюдается возрастающее расхождение между ньютоновской жидкостью ($L = \infty$) и микрополярной жидкостью. Расхождение становится ощутимым при $H < 0{,}3 \div 0{,}5$, то есть в области граничной смазки. В работе [17] приводится сопоставление полученных результатов с экспериментальными данными Нидса [18], что и дало превосходное качественное соответствие.

Для отыскания концентрации воспользуемся формулой (2.8), которая в безразмерном виде записывается так:

$$\frac{dc_1}{dz^*} = -\left(A + B\frac{d\omega^*}{dz^*}\right)(\omega^* - \Omega^*) \tag{3.8}$$

где

$$A = \frac{1}{8\eta} a_1 a_2 k_p h^2 p_{,r}, \quad B = \frac{1}{64\,\rho D\eta^2} a_1 a_1 h^4 p^2_{,r},$$

$$\Omega^* = \frac{\Omega h}{v_{r0}} = 2(1-2z^*) - 2N^2\left[\operatorname{ch}\lambda z^* - \frac{\operatorname{ch}\lambda - 1}{\operatorname{sh}\lambda}\operatorname{sh}\lambda z^*\right]$$

$$\omega^* = \frac{\omega h}{v_{r0}} = 2\left[\frac{\operatorname{sh}\lambda z^*}{\operatorname{sh}\lambda}(1+\operatorname{ch}\lambda) - (\operatorname{ch}\lambda z^* - 1)\right] - 4z^*$$

$$z^* = \frac{z}{h},\ p_{,r} = \frac{\partial p}{\partial r},\ v_{r0} = -\frac{h^2}{8\eta}\frac{\partial p}{\partial r},\ \lambda = kh \tag{3.9}$$

Будем считать заданной среднюю по сечению (кольцевому) концентрацию массы $k = 1$ компонента

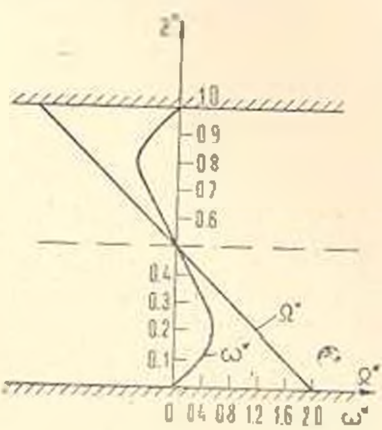
$$\bar{c} = \frac{1}{h}\int_0^h c_1\,dz \quad (0 \leq \bar{c} \leq 1) \tag{3.10}$$

или в безразмерном виде

$$\bar{c} = \int_0^1 c_1 dz^* \quad (0 \leq \bar{c} \leq 1) \tag{3.11}$$

Из равенства (3.8) видно, что диффузионные процессы определяются коэффициентами диффузии A и B, которые имеют различные значения в различных сечениях.

На фиг. 3 приведены графики функции $\omega^*(z^*)$ и $\Omega^*(z^*)$ (было принято $\lambda = 5$, $\eta_r/\eta = 0$).



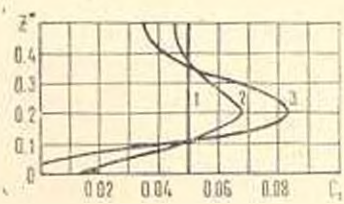
Фиг. 3.

Выясним влияние (качественно) величины коэффициентов A и B на распределение концентрации c_1. Пусть сначала $B = 0$. Так как течение симметрично относительно оси, проходящей на высоте $h/2$, достаточно рассмотреть лишь нижнюю его половину. Будем считать A положительным. Так как $(\omega^* - \Omega^*) \leq 0$ (фиг. 3), то из уравнения (3.8) следует, что $dc_1/dz^* \geq 0$ при $z^* \geq 0$. У оси симметрии на высоте $h/2$ $\omega^* = \Omega^* = 0$, следовательно, $dc_1/dz^* = 0$. Наоборот, при приближении к стенке разность $\omega^* - \Omega^*$ увеличивается по абсолютной величине (оставаясь отрицательной), значит, и концентрация падает при приближении к стенке (наблюдается пристеночный эффект). Для того, чтобы решения (3.8) имели физический смысл, необходимо, чтобы коэффициент A (а также B) обращался в нуль при $c_1 = 0$ и 1. Зависимость коэффициентов A и B от концентрации должна определяться либо теоретически путем решения кинетических уравнений, либо экспериментальным путем. В качестве простейшей зависимости можно выбрать [19]

$$A = \alpha c_1 (1 - c_1)$$

На фиг. 4 приведены кривые распределения концентрации при различных значениях параметра α ($\bar{c} = 0.5$, $\lambda = 5$, $\eta_r/\eta_l = 0$. Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям $\alpha = 0$; 20; 50). В этом случае теория дает значительное понижение концентрации твердой фазы вблизи стенок.

Фиг. 4.



Фиг. 5.

Положим $A = 0$, $B > 0$. В этом случае производная dc_1/dz^* равна произведению $-B(\omega^* - \Omega^*)\dfrac{d\omega^*}{dz^*}$. Очевидно,

$$dc_1/dz^* > 0 \text{ при } 0 < z^* < z_m^* \qquad (d\omega^*/dz^* > 0,\ \omega^* - \Omega^* < 0)$$

$$dc_1/dz^* < 0 \text{ при } 0{,}5 > z^* > z_m^* \qquad (d\omega^*/dz^* < 0,\ \omega^* - \Omega^* < 0)$$

$$dc_1/dz^* = 0 \text{ при } z^* = 0{,}5 \quad (\omega^* = \Omega^* = 0),\ \ z^* = z_m^* \ (d\omega^*/dz^* = 0)$$

Таким образом, в этом случае помимо пристеночного эффекта имеет место также приосевой эффект, то есть повышение концентрации твердой фазы в некоторой внутренней точке. Из экспериментов известно, что приосевой эффект наблюдается лишь при малых значениях средней концентрации [4, 5]. Чтобы решения удовлетворяли этому условию, коэффициент B должен быть отличен от нуля только при малых значениях концентрации, например, [19]

$$B = \beta c_1 (1 - c_1)^n$$

На фиг. 5 показано влияние β на развитие приосевого эффекта ($\bar{c} = 0{,}05$; $n = 10$; $\lambda = 5$; $\eta_r/\eta = 0$; кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям $\beta = 0$; 10, 30).

В реальных условиях, по-видимому, оба коэффициента A и B отличны от нуля.

Приведенный выше пример демонстрирует способность теории двухжидкостной системы объяснить некоторые явления в тонких пленках и показывает перспективность дальнейших исследований. По-видимому, исследования граничных-пристенных смазочных слоев необходимо вести в динамических условиях.

Ереванский государственный
университет

Поступила 9 VII 1980

Լ. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ԿԼՈՐ ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՍԿԱՎԱՌԱԿՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ՍՈՒՍՊԵՆԶԻԱՅԻ ՇԵՐՏԻ ՍԵՂՄՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Կիրառված է երկհեղուկ ոչ սիմետրիկ լարման տենզոր ունեցող կոնտինուումի տեսությունը կլոր զուգահեռ թիթեղների միջև սուսպենզիայի շերտի սեղմման համար։ Ստացված են սուսպենզիայի յուղման շերտի և կոնցենտրացիայի բաշխման հավասարումները։

Կոնցենտրացիայի բաշխման դեպքում նկատվում են էֆեկտներ պատի և առանցքի շրջակայքերում։ Ստացվել են անալիտիկ արտահայտություններ շերտի սեղմման հաշվարկային բնութագրերի համար։

ON THE SQUEEZING THEORY OF THE SUSPENSION LAYER BETWEEN PARALLEL CIRCULAR DISKS

L. G. PETROSIAN

S u m m a r y

The two-liquid continuum theory with the asymmetric tensor of stresses is applied to the squeezing of the suspension layer between parallel circular disks. The equations of the lubricating suspension layer and the distribution of the concentration are derived. Upon the concentration of distribution the at-wall and at-axis effects ,are detected. The analytical expressions for the calculating characteristics of the sqeezing layer are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прокаш, Кристенсен.* Микроконтинуальная теория входной области упругогидродинамических контактов. Тр. американского общ. инженеров-механиков, серия F. Проблемы трения и смазки, 1977, т. 99, № 1, с. 24—30.
2. *Bayliss L. E.* The flow of suspensions of red blood cells in capillary tubs. Changs in the "cell-free" marginal sheath with changes in the shearing stress. The Journal of Physiology, Cambridge University Press. London — N. Y., 1965, vol. 179, № 1, p. 1—25.
3. *Goldsmith H. L., Mason S. G.* Physical Aspects of the Flow of Biological Suspensions through Tubs. 4-th Intern. Congr. Rheol. Providence, Intersci. Publ. N. Y.— London — Sudney, 1965 p. 85—88.
4. *Segre G., Silberberg A.* Radial particle displacementsion Poiseuille flow of suspensions. Nature, 1961, vol. 189, № 4760, p. 209—210.
5. *Segre G., Silberberg A.* Behavior of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow J. of Fluid Mechanics, 1962, vol. 14, part I, II, p. 115—157.
6. *Meixner J.* Der Drehimpulssatz in der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse. Zeitschrift für Physik, 1961, Band 164, 1 Heft, p. 145—155.
7. *Bugliarello G., Hayden J. W.* High—Speed Microcinematographic Studies of. Blood Flow in Vitro.—Science, 1962, vol. 138, № 3544, p. 981—983.

8. *Kline K. A., Allen S. J., De Silva C. N.* A Continuum approach to blood flow. Biorheology, 1968, vol. 5, № 1, p. 111—118.

9. *Бреннер Г.* Реология двухфазных систем. Реология суспензий (сб. статей). М., «Мир», 1975, с. 11—67.

10. *Коровчинский М. В.* Теоретические основы работы подшипников скольжения. М. Машгиз, 1959, 403 с.

11. *Grad H.* Statistical Mechanics. Thermodynamics and fluid dynamics of systems with an arbitrary number of Integrals. Commun. pure appl. math., 1952, vol. 5 № 4, p. 455—494.

12. *Эринген А. К.* Теория микрополярных жидкостей. Механика, пер. сб. переводов иностран. ст., 1969, № 4 (116), с. 79—93.

13. *Аэро Э. Л., Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В.* Асимметрическая гидромеханика. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2, с. 297—308.

14. *Нгуен Ван Дьеп, Листров А. Т.* О неизотермической модели несимметричных жидкостей. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5, с. 132—136.

15. *Петросян Л. Г.* Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжения. 1. Основные уравнения. Ученые записки ЕГУ, 1976, № 3, с. 56—63.

16. *Петросян Л. Г.* Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжения. 2. Феноменологические уравнения. Перекрестные эффекты. Ученые записки ЕГУ, 1977, № 2, с. 74—80.

17. *Пракаш, Синха.* Теория сдавливания пленок микрополярных жидкостей. Тр. американского общ. инженеров-механиков, серия F, Проблемы трения и смазки 1976, т. 98, № 1, с. 147—154.

18. *Needs S. J.* Boundary Film Investigations. Trans. ASME, 1940, vol. 62, p. 331—345.

19. *Попель А. С.* О гидродинамике суспензии. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4, с. 24—30.