

Г. Е. БАГДАСАРЯН, П. А. МКРТЧЯН

УСТОЙЧИВОСТЬ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Задачи устойчивости сверхпроводящих токнесущих цилиндрических оболочек рассмотрены в работах [1—3].

В данной работе выведены уравнения возмущенного движения сверхпроводящей цилиндрической оболочки в стационарном неоднородном магнитном поле. На основе этих уравнений исследуется поведение оболочки в начальном однородном магнитном поле, вектор напряженности которого перпендикулярен к оси цилиндра. Установлена возможность потери устойчивости невозмущенного состояния. Получена формула для определения критического значения напряженности внешнего магнитного поля.

1. Пусть изотропная замкнутая цилиндрическая оболочка постоянной толщины $2l$ и радиуса серединой поверхности R , изготовленная из сверхпроводящего материала, находится в начальном магнитном поле с заданным вектором напряженности \vec{H}_0 . Упругие свойства материала оболочки характеризуются модулем упругости E , коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ . Электромагнитные свойства среды, окружающей оболочку, эквивалентны свойствам вакуума. Влияние токов смещения на характеристики устойчивости оболочки пренебрегается.

Оболочка отнесена к триортогональной системе координат (α, β, γ) так, что координатные линии α и β совпадают с линиями кривизны средней поверхности, откладываемые соответственно вдоль образующей и по дуге.

В отношении тонкой оболочки считается справедливым гипотеза недеформируемых нормалей.

Известно [4], что при помещении сверхпроводящего тела в магнитное поле на тонком приповерхностном слое появляются экранирующие токи, препятствующие проникновению магнитного поля внутрь тела. Вытеснение магнитного поля приводит к изменению напряженности магнитного поля в области вне тела. Это изменение является результатом наложения на начальное поле \vec{H}_0 магнитного поля \vec{H}^e , создаваемого экранирующими токами. Поэтому невозмущенное магнитное поле $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}^e$ определяется из решения следующей задачи магнитостатики во внешней области [5]:

$$\text{rot } \vec{H}^e = 0, \text{ div } \vec{H}^e = 0 \quad (1.1)$$

$$\vec{n}_0(\vec{H}_0 \pm \vec{H}^0) = 0 \quad \text{при } (z, \beta, \gamma) \in S \quad (1.2)$$

$$\vec{H}^0 = 0 \quad \text{при } |r| \rightarrow \infty \quad (1.3)$$

где \vec{n}_0 — единичный вектор внешней нормали к недеформированной поверхности S тела, r — радиус-вектор рассматриваемой точки.

Вследствие того, что магнитное поле не проникает в область, занимаемую оболочкой, на поверхности оболочки компоненты тензора напряжений Максвелла претерпевают разрыв. Этим разрывом обусловлено появление магнитного давления \vec{P}_0 , определяемого формулой

$$\vec{P}_0 = \vec{n}_0 T^0 \quad (1.4)$$

где T^0 — тензор напряжений Максвелла

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(H_i H_k - \frac{\delta_{ik}}{2} H^2 \right) \quad (1.5)$$

δ_{ik} — символ Кронекера.

В силу (1.2) из (1.4) и (1.5) для поверхностной нагрузки получается выражение [5]

$$\vec{p}_0 = - \frac{H^2}{8\pi} \vec{n}_0 \quad (1.6)$$

Под действием нагрузки \vec{p}_0 в оболочке устанавливается начальное невозмущенное состояние, характеризующееся вектором перемещения \vec{u}_0 и тензором упругих напряжений σ . Исходное состояние оболочки, как обычно, определяется из линейных уравнений теории упругости при поверхностных условиях, написанных без учета деформации поверхностей, ограничивающих оболочку. Тогда характеристики невозмущенного состояния будут определяться из следующих уравнений равновесия и граничных условий на поверхности оболочки:

$$\text{div } \sigma^0 = 0 \quad (1.7)$$

$$\vec{n}_0 \cdot \sigma^0 = \vec{p}_0 \quad \text{при } (z, \beta, \gamma) \in S \quad (1.8)$$

Характеристики возмущенного движения $(\vec{u}_0 + \vec{u}, \sigma^0 + \sigma, \vec{p}_0 + \vec{p}, \vec{H} + \vec{h})$ должны удовлетворять нелинейным уравнениям и краевым условиям на деформированной поверхности оболочки. Принимая возмущения малыми, эти уравнения и граничные условия аналогично работам [6—8] линеаризуются. В результате получаются следующие линейные уравнения возмущенного движения:

в области, занимаемой оболочкой

$$\operatorname{div}(\dot{\vec{z}} + \dot{\alpha}^0 \vec{\tau} u) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1.9)$$

в области вне тела оболочки

$$\operatorname{rot} \vec{h} = 0, \operatorname{div} \vec{h} = 0 \quad (1.10)$$

Решения уравнений (1.9) и (1.10) связаны следующими линеаризованными условиями на поверхности S :

$$\dot{\vec{z}} \cdot \vec{n}_0 = \dot{\rho} \quad (1.11)$$

$$\vec{n}_0 (\vec{h} + H \vec{\tau} u) = 0 \quad (1.12)$$

Здесь

$$\dot{\vec{z}} = \frac{E}{2(1-\nu)} \left[\frac{2\nu}{1-2\nu} (\operatorname{div} \vec{u}) \vec{E} + \vec{\tau} u + (\nabla \vec{u})^* \right] \quad (1.13)$$

$$\dot{\rho} = \dot{T} \cdot \vec{n}_0, T_{ij} = \frac{1}{4\pi} (H_k h_l + h_k H_l) - \frac{h_{ik}}{4\pi} \vec{h} \cdot \vec{H} \quad (1.14)$$

где \vec{E} — единичный тензор, $\vec{\tau}$ — набла-оператор Гамильтона, $(\nabla \vec{u})^*$ — транспонированный тензор $\nabla \vec{u}$, \dot{T} — тензор напряжения Максвелла возмущенного состояния.

Заметим, что граничное условие (1.12) является следствием условия непроникновения магнитного поля в толщу оболочки.

2. Согласно гипотезам Кирхгофа—Лява для оболочки имеем следующие известные соотношения:

$$u_1 = u - \gamma \frac{\partial w}{\partial z}, u_2 = \left(1 + \frac{\gamma}{R}\right) v - \gamma \frac{\partial w}{\partial \beta}, u_3 = w(z, \beta, t) \quad (2.1)$$

где $u(z, \beta, t)$, $v(z, \beta, t)$, $w(z, \beta, t)$ — искомые перемещения срединной поверхности оболочки.

В силу (2.1) поверхностное условие (1.12) принимает вид

$$h_i^+ = H_i^+ \frac{\partial w}{\partial z} + H_j^+ \frac{\partial w}{\partial \beta} \quad (2.2)$$

где индексами $+$ и $-$ отмечены значения соответствующих величин на поверхностях оболочки $\gamma = h$ и $\gamma = -h$.

Подставляя (1.13), (2.1) в (1.9) и усредняя полученные при этом уравнения по толщине оболочки, с учетом известных допущений относительно углов поворота [6] и условий (2.2) получим следующую систему дифференциальных уравнений устойчивости оболочки:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \beta} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} =$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1-\nu^2}{2Eh} \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha} T_2^0 + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} N_1^0 + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} N_2^0 - \frac{1}{4\pi} \left[(H_a^+)^2 - (H_a^-)^2 \right] \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{4\pi} (H_a^+ H_b^+ - H_a^- H_b^-) \frac{\partial w}{\partial \beta} \right\} = 0 \\
& \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \\
& - \frac{h}{3R} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{w}{R^2} \right) + \frac{1-\nu^2}{2Eh} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha} S^0 - \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} N_1^0 - \right. \\
& - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{w}{R^2} \right) N_2^0 + \frac{1}{4\pi} [(H_b^+)^2 - (H_b^-)^2] \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{1}{4\pi} (H_a^+ H_b^+ - \\
& \quad \left. - H_a^- H_b^-) \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right] = 0 \tag{2.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D \left[\Delta^2 w + \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{3}{Rh^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + \nu \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{w}{R} \right) \right] + \\
& + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} T_1^0 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} S^0 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{w}{R^2} \right) T_2^0 + \\
& + \frac{1}{4\pi} (H_a^+ h_a^+ - H_a^- h_a^- + H_b^+ h_b^+ - H_b^- h_b^-) + \frac{h}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \left[(H_a^+)^2 - (H_a^-)^2 \right] \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \right. \\
& + (H_a^+ H_b^+ - H_a^- H_b^-) \frac{\partial w}{\partial \beta} \left. \right\} - \frac{h}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ (H_a^+ H_b^+ - H_a^- H_b^-) \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \right. \\
& \quad \left. + [(H_b^+)^2 - (H_b^-)^2] \frac{\partial w}{\partial \beta} \right\} = 0
\end{aligned}$$

В уравнениях (2.3) T_1^0 , T_2^0 , S^0 , N_1^0 , N_2^0 — усилия, характеризующие начальное невозмущенное состояние оболочки. Указанные параметры невозмущенного состояния определяем, решая задачу (1.7) — (1.8). Отметим также, что начальное невозмущенное состояние оболочки в общем случае является моментным.

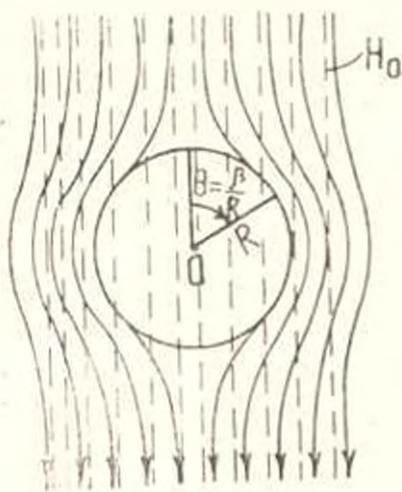
Рассматривая систему уравнений (2.3), замечаем, что она не замкнута. В нее входят неизвестные граничные значения тангенциальных составляющих индуцированного магнитного поля h_a^+ , h_b^+ на поверхностях оболочки. Их определяем, решая уравнения (1.10) при условии (1.12) и условии затухания возмущений на бесконечности.

3. Рассмотрим задачу устойчивости сверхпроводящей цилиндрической оболочки бесконечной длины в однородном магнитном поле, вектор напряженности которого перпендикулярен к оси цилиндра (фиг. 1).

$$\vec{H}_0 = H_0 \left(\sin \frac{\beta}{R} \vec{e}_3 - \cos \frac{\beta}{R} \vec{e}_r \right), \quad H_0 = \text{const} \tag{3.1}$$

где \vec{e}_3 и \vec{e}_r — единичные векторы по направлениям соответствующих координатных линий.

Добавочное магнитное поле H^* , обусловленное экранирующими токами, определяется из решения задачи (1.1)—(1.3) и имеет вид



Фиг. 1.

$$\vec{H}^* = H_0 \left(\frac{R+h}{R+\gamma} \right)^2 \left(\sin \frac{\beta}{R} \cdot \vec{e}_\beta + \cos \frac{\beta}{R} \cdot \vec{e}_r \right) \quad (\gamma \geq h) \quad (3.2)$$

Невозмущенное магнитное поле во внутренней области ($\gamma < h$) равно нулю, а во внешней области ($\gamma > h$) является результатом наложения полей (3.1) и (3.2). Следовательно,

$$\vec{H} = \begin{cases} 0 & \text{при } \gamma < h \\ H_0 \left[1 + \left(\frac{R+h}{R+\gamma} \right)^2 \right] \sin \frac{\beta}{R} \times \\ \times \vec{e}_\beta - H_0 \left[1 - \left(\frac{R+h}{R+\gamma} \right)^2 \right] \times \\ \times \cos \frac{\beta}{R} \cdot \vec{e}_r & \text{при } \gamma \geq h \end{cases} \quad (3.3)$$

Из (1.6), согласно (3.3), замечаем, что поверхностная нагрузка p_0 не изменяется вдоль образующих цилиндра. Поэтому из усилий невозмущенного состояния отличными от нуля являются только N_2^0 и T_{20}^0 . Осредняя по толщине оболочки уравнения (1.7), с учетом (1.6), (1.8), (3.3) для определения указанных неизвестных усилий получим следующие уравнения:

$$\frac{dT_2^0}{d\beta} + \frac{N_2^0}{R} = 0, \quad \frac{dN_2^0}{d\beta} - \frac{T_2^0}{R} = \frac{H_0^2}{2\pi} \sin^2 \frac{\beta}{R} \quad (3.4)$$

Решая уравнения (3.4), найдем

$$T_2^0 = -\frac{RH_0^2}{12\pi} \left(3 - \cos \frac{2\beta}{R} \right), \quad N_2^0 = \frac{RH_0^2}{6\pi} \sin \frac{2\beta}{R} \quad (3.5)$$

В дальнейшем будем рассматривать частный случай, когда возмущения не зависят от координаты u (образующие цилиндра остаются прямолинейными). Тогда введением потенциальной функции Φ посредством

$$\vec{h} = \text{grad } \Phi \quad (3.6)$$

задача определения возмущенного магнитного поля \vec{h} во внешней области, согласно (1.10), (2.2), (2.3) приводится к решению следующей внешней задачи Неймана для круга ($\gamma > h$):

$$\begin{cases} \Delta_1 \Phi = \frac{1}{R+\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[(R+\gamma) \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right] - \frac{R^2}{(R+\gamma)^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma^2} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} = 2H_0 \sin \frac{\beta}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta} \quad \text{при } \gamma = h \end{cases} \quad (3.7)$$

Решение задачи (3.7) представляется посредством интеграла Дирихле [9]

$$\Phi = \frac{(R+h)H_0}{\pi R} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left| 1 + \left(\frac{R+h}{R+\gamma} \right)^2 - 2 \frac{R+h}{R+\gamma} \cos \left(\frac{\beta}{R} - \xi \right) \right| \sin \xi \frac{\partial w}{\partial \xi} d\xi \quad (3.8)$$

Из (3.6) в силу (3.8) для h_{β}^+ найдем

$$h_{\beta}^+ = \frac{H_0}{\pi R} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \left(\frac{\beta}{R} - \xi \right) \sin \xi}{1 - \cos \left(\frac{\beta}{R} - \xi \right)} \frac{\partial w}{\partial \xi} d\xi \quad (3.9)$$

Подстановкой (3.3), (3.5) и (3.9) в (2.3) рассматриваемая задача устойчивости сводится к исследованию следующей системы интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{h^2}{3R} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{w}{R^2} \right) + \frac{(1-\nu^2)RH_0^2}{12\pi Eh} \left| \frac{6}{R} \sin^2 \frac{\beta}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{w}{R^2} \right) \sin \frac{2\beta}{R} \right| = 0 \quad (3.10)$$

$$D \left| \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{3}{Rh^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R} \right) \right| + 2\gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{RH_0^2}{4\pi} \left| \left(1 + \frac{1}{3} \cos \frac{2\beta}{R} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{w}{R^2} \right) + \frac{4h}{R} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sin^2 \frac{\beta}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{2}{-R^2} \sin \frac{\beta}{R} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \left(\frac{\beta}{R} - \xi \right) \sin \xi}{1 - \cos \left(\frac{\beta}{R} - \xi \right)} \frac{\partial w}{\partial \xi} d\xi \right| = 0$$

Решение системы уравнений устойчивости (3.10) будем искать в виде

$$v = e^{i\omega t} \sum_{n=2}^{\infty} v_n \sin \frac{n\beta}{R} \quad (3.11)$$

$$w = e^{i\omega t} \sum_{n=2}^{\infty} w_n \cos \frac{n\beta}{R}$$

где ω — частота колебаний оболочки, v_n и w_n — неизвестные коэффициенты.

Представления (3.11) удовлетворяют условиям замкнутости оболочки по координате β .

Подставляя (3.11) в (3.10) и используя обычный процесс ортогонализации, после некоторых преобразований приходим к следующей бесконечной системе алгебраических уравнений:

$$k v_k + w_k + \frac{h^2}{3R^2} (k^2 - 1) w_k = \frac{(1 - v^2) RH_0^2}{24\pi E h} \sum_{n=2}^{\infty} a_{nk} w_n$$

$$k v_k + w_k + \frac{h^2}{3R^2} [k^2 (k^2 - 1) - \bar{\omega}^2] w_k = \frac{(1 - v^2) RH_0^2}{8\pi E h} \sum_{n=2}^{\infty} b_{nk} w_n \quad (3.12)$$

$$(k = 2, 3, 4, \dots)$$

где

$$a_{nk} = \frac{1}{k} [(n^2 - 1 + 3n) \delta_{n, k-2} - (n^2 - 1 - 3n) \delta_{n, k+2} - 6n \delta_{nk}]$$

$$b_{nk} = (n^2 - 1 - 2n) \delta_{nk} + \left(n + \frac{n^2 - 1}{6} \right) (\delta_{n, k-2} + \delta_{n, k+2})$$

$$\bar{\omega} = \omega R^2 \sqrt{\frac{2\rho h}{D}}$$

При получении (3.12) было установлено и учтено, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(\theta - \xi) \sin \frac{\theta}{2} \sin n\xi}{1 - \cos(\theta - \xi)} d\xi = -2\pi \sin \theta \cos n\theta \quad (3.13)$$

Исключая v_k из системы уравнений (3.12), получим следующую бесконечную систему относительно w_k :

$$(\omega_k^2 - \bar{\omega}^2) w_k - \bar{H}^2 \sum_{n=2}^{\infty} \bar{b}_{kn} w_n = 0 \quad (3.14)$$

Здесь

$$\omega_k = k^2 - 1, \quad \bar{H}^2 = \frac{3(1 - v^2) R^3 H_0^2}{8\pi E h^3}$$

$$\bar{b}_{kn} = (k - 1)^2 \delta_{kn} + \left[\frac{n^2 - 1}{6} \left(1 + \frac{2}{k} \right) + n \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right] \delta_{n, k+2} +$$

$$+ \left[\frac{n^2 - 1}{6} \left(1 - \frac{2}{k} \right) + n \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right] \delta_{n, k-2} \quad (3.15)$$

Невозмущенное состояние оболочки устойчиво, если все корни уравнения

$$(\omega_k^2 - \bar{\omega}^2) \delta_{kn} - \bar{H}^2 \bar{b}_{kn} = 0 \quad (3.16)$$

лежат в верхней полуплоскости.

Рассмотрим сходимость бесконечного определителя, входящего в уравнение (3.16). С этой целью, следуя [7], представим указанный определитель в виде

$$\Delta = |\delta_{kn} + c_{kn}| \quad (3.17)$$

где

$$c_{kn} = - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega_k \omega_n} \delta_{kn} - \frac{\bar{H}^2}{\omega_k \omega_n} \bar{b}_{kn} \quad (3.18)$$

Бесконечный определитель (3.17) сходится, если сходится двойной ряд [7, 10]

$$\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} |c_{kn}| \quad (3.19)$$

В силу (3.18) легко получить

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} |c_{kn}| = \bar{\omega}^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k^2-1)^2} + \bar{H}^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} + \\ + \frac{\bar{H}^2}{6} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k+5)}{(k-1)(k+2)(k^2+4k+3)} + \frac{\bar{H}^2}{6} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k+2)(k^2+10k-3)}{k(k^2-1)(k^2+4k+3)} \end{aligned} \quad (3.20)$$

откуда следует, что определитель (3.17) относится к классу сходящихся (нормальных) определителей.

4. Рассматривая (3.15), легко заметить, что бесконечная система алгебраических уравнений (3.14) распадается на две независимые бесконечные системы. Одна из них содержит $\bar{\omega}_k$ только с четными индексами, а вторая — с нечетными индексами. Определитель первой системы в силу (3.16) имеет вид

$$\begin{vmatrix} \Omega_{22} - \bar{\omega}^2 & d_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{42} & \Omega_{44} - \bar{\omega}^2 & d_{46} & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & d_{62} & \Omega_{66} - \bar{\omega}^2 & d_{68} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & d_{84} & \Omega_{88} - \bar{\omega}^2 & d_{810} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & d_{106} & \Omega_{1010} - \bar{\omega}^2 & d_{1012} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{1210} & \Omega_{1212} - \bar{\omega}^2 & d_{1214} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad (4.1)$$

где

$$\Omega_{kn} = \bar{\omega}_k^2 \bar{a}_{kn} - d_{kn}, \quad d_{kn} = \bar{H}^2 \bar{b}_{kn} \quad (4.2)$$

Определитель второй системы получается из (4.1), если ко всем индексам элементов определителя (4.1) прибавить единицу. Условием существования нетривиального решения является равенство нулю нормального определителя (4.1). Из указанного условия получается уравнение для определения частоты $\bar{\omega}$. Это уравнение в первом приближении ($n=2$) имеет вид

$$\bar{\omega}^2 - \Omega_{22} = 0 \quad (4.3)$$

Для второго и третьего приближений имеем соответственно

$$\bar{\omega}^4 - (\Omega_{22} + \Omega_{44}) \bar{\omega}^2 + \Omega_{22} \Omega_{44} - d_{24} d_{42} = 0 \quad (4.4)$$

$$\bar{\omega}^6 - (\Omega_{22} + \Omega_{44} + \Omega_{66}) \bar{\omega}^4 + (\Omega_{22}\Omega_{44} + \Omega_{22}\Omega_{66} + \Omega_{44}\Omega_{66} -$$

$$-d_{43}d_{44} - d_{24}d_{13}) \bar{\omega}^2 + \Omega_{22}d_{43}d_{44} + \Omega_{66}d_{43}d_{63} - \Omega_{22}\Omega_{34}\Omega_{66} = 0$$

Используя условие статической устойчивости $\omega = 0$, из (4.3)–(4.5) получим следующие уравнения для определения критического значения напряженности магнитного поля:

в случае первого приближения

$$\bar{b}_{22} \bar{H}^2 - \omega_1^2 = 0 \quad (4.6)$$

в случае второго приближения

$$(\bar{b}_{21}\bar{b}_{42} - \bar{b}_{22}\bar{b}_{44}) \bar{H}^3 + (\bar{b}_{22}\omega_4^2 + \bar{b}_{44}\omega_2^2) \bar{H} - \omega_2^2\omega_1^2 = 0 \quad (4.7)$$

в случае третьего приближения

$$\begin{aligned} &(\bar{b}_{22}\bar{b}_{44}\bar{b}_{66} - \bar{b}_{21}\bar{b}_{42}\bar{b}_{66} - \bar{b}_{22}\bar{b}_{44}\bar{b}_{66}) \bar{H}^3 + [(\bar{b}_{43}\bar{b}_{64} - \\ &- \bar{b}_{44}\bar{b}_{66}) \omega_2^2 - \bar{b}_{22}\bar{b}_{66} \omega_4^2 + (\bar{b}_{21}\bar{b}_{42} - \bar{b}_{22}\bar{b}_{44}) \omega_6^2] \bar{H}^2 + \\ &+ (\bar{b}_{66} \omega_2^2 \omega_4^2 + \bar{b}_{44} \omega_2^2 \omega_6^2 - \bar{b}_{22} \omega_4^2 \omega_6^2) \bar{H} - \omega_2^2 \omega_1^2 \omega_6^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Из условий (4.6)–(4.8) в силу (3.15) найдены следующие приближения критического значения напряженности магнитного поля, при котором сверхпроводящая оболочка теряет устойчивость:

$$\bar{H}_c = \begin{cases} 3 & \text{для первого приближения} \\ 2.4916 & \text{для второго приближения} \\ 2.4878 & \text{для третьего приближения} \end{cases} \quad (4.9)$$

Отметим, что найдено также четвертое приближение \bar{H}_c , которое с приведенной здесь точностью совпало с третьим приближением.

Аналогичное исследование проведено относительно второй бесконечной системы алгебраических уравнений с нечетными индексами. В результате получены следующие значения соответствующих приближений величины \bar{H}_c :

$$\bar{H}_c = \begin{cases} 4 & \text{для первого приближения} \\ 3.5503 & \text{для второго приближения} \\ 3.5424 & \text{для третьего приближения} \\ 3.5424 & \text{для четвертого приближения} \end{cases} \quad (4.10)$$

Сравнивая (4.9) и (4.10), замечаем, что последовательные приближения достаточно быстро сходятся и в качестве критического значения \bar{H} следует брать 2.4878. Тогда на основе (3.15) для критического значения внешнего магнитного поля получим формулу

$$H_0^* = \frac{4.98 h}{R} \sqrt{\frac{2\pi E h}{3(1-\nu^2)R}} \quad (4.11)$$

Известно [4, 5], что для каждого сверхпроводника существует критическое магнитное поле H_c , превышение которого приводит к разруше-

нию сверхпроводящего свойства материала. Поэтому напряженность магнитного поля, определяемая формулой (4.11), должна быть меньше, чем H_1 . Следовательно, в зависимости от того напряженность внешнего магнитного поля удовлетворяет условию $H_0 < H_0' < H_1$ или условию $H_0' < H_0 < H_1$ сверхпроводящая оболочка будет устойчивой или неустойчивой.

Условие $H_0' < H_1$ для каждого конкретного сверхпроводящего материала налагает ограничение на относительную толщину оболочки и определяет класс оболочек, для которых имеет смысл исследование вопроса устойчивости в магнитном поле. Оболочки, которые могут терять устойчивость в сверхпроводящем состоянии, должны иметь толщину, не превышающую h^* , определяемую из условия $H_0' < H_1$ по формуле

$$\frac{2h^*}{R} = \left[\left(\frac{H_k}{2.49} \right)^2 \frac{3(1-\nu^2)}{\pi E} \right]^{1/2} \quad (4.12)$$

На основании формулы (4.12) в табл. 1 приведены значения $2h^*/R$ для некоторых сверхпроводников. При расчете для материалов, у которых коэффициент Пуассона неизвестен, приближенно принято $\nu = 0.3$. Для сплавов Nb_3Sn и V_3Ga в качестве модуля Юнга принято $E = 15.6 \cdot 10^{11}$ дин/см² и $E = 14.8 \cdot 10^{11}$ дин/см² соответственно.

Таблица 1

Материал оболочки	$E, 10^{11} \frac{\text{дин}}{\text{см}^2}$	ν	$\frac{2h^*}{R}, 10^{-3}$
Свинец (Pb)	1.6	0.44	8
Никобий (Nb)	15.6	—	7
Ванадий (V)	14.8	—	6
Титан (Ti)	18.6	—	3.8
Олово (Sn)	5.3	0.33	2.85
Алюминий (Al)	7	0.34	1.25
Nb_3Sn	—	—	185
V_3Ga	—	—	165

Критические значения напряженности магнитного поля H_0' для оболочек, изготовленных из этих материалов, при различных значениях $2h^*/R$ приведены в табл. 2. Здесь черточки означают, что разрушение сверхпроводимости материала оболочки для соответствующих толщин наступает раньше, чем потеря статической устойчивости. Из этой таблицы видно, что для достаточно тонких оболочек существенным является потеря устойчивости под действием магнитного давления.

В заключение отметим, что если оболочка изготовлена из обычного проводящего материала и покрыта тонким слоем сверхпроводящего сплава (напр., Nb_3Sn), то разрушение сверхпроводимости магнитным полем пра-

Материал оболочки	H_0^* , 10^3 э					H_k , 10^3 э
	$2h/R = 1/50$	$1/100$	$1/200$	$1/500$	$1/1000$	
Nb	—	—	1.18	0.30	0.11	1.94
Pb	—	—	0.40	0.10	0.036	0.80
V	—	—	1.15	0.29	0.010	1.31
S_n	—	—	—	0.18	0.062	0.31
Nb_3S_n	8.6	3.04	1.08	0.27	0.096	245
V_3Ca	9.20	3.20	1.15	0.29	0.010	210

критически невозможно ($H_k \approx 2 \cdot 10^3$ э) и поэтому остается проблема статической устойчивости.

Институт механики
АН Армянской ССР
Ленинаканский филиал
ЕрПИ

Поступила 20 III 1981

Գ. Ե. ԲԱԳԴԱՍԱՐՅԱՆ, Պ. Ա. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ԳԵՐՀԱՂՈՐԴԻՄ ԳԿԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՏՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ
ՄԱԳՆԵՒԱԿԱՆ ԳԱՇՏՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ու լ մ

Աշխատանքում արտածված են անհամասեռ մագնիսական դաշտում գտնվող գերհաղորդիչ գլանային թաղանթի զրգռված վիճակի հավասարումները: Այդ հավասարումների հիման վրա ուսումնասիրված է թաղանթի վարքը սկզբնական համասեռ մագնիսական դաշտում, որի լարվածության փեկտորը ուղղահայաց է գլանի առանցքին: Ապացուցված է շրջոված վիճակի կայունության կորստի հնարավորությունը: Ստացված է բանաձև արտաքին մագնիսական դաշտի լարվածության կրիտիկական մեծության որոշման համար:

STABILITY OF A SUPERCONDUCTING CYLINDRICAL SHELL IN MAGNETIC FIELD

G. E. BAGDASARIAN, P. A. MKRTCHIAN

S u m m a r y

The equations of perturbation motion are deduced for a superconducting cylindrical shell in a non-homogeneous stationary magnetic field.

Based on these equations the shell's behaviour is investigated in the primary magnetic field whose magnetic intensity vector is perpendicu-

far to shell's axis. The possibility of shell's non-perturbed state stability loss is determined which is a momentum one due to non-homogeneity of the non-perturbed magnetic field. The formula is obtained for critical value of the external magnetic field intensity.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев М. И. О полях конечной амплитуды в токонесущей сверхпроводящей коаксиальной линии. ЖТФ, 1975, т. 45, вып. 2 (382).
2. Овсянник Р. Н. Об устойчивости цилиндрической токонесущей оболочки бесконечной проводимости. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1969, т. 22, № 4.
3. Овсянник Р. Н. Об устойчивости коаксиальной системы сверхпроводящих оболочек. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1979, т. 32, № 3.
4. Брукс В. Сверхпроводимость. М., «Мир», 1975.
5. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
6. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. М., Гостехиздат, 1948.
7. Бологин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
8. Ашбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М., «Наука», 1977.
9. Кошляков Н. С., Глинск Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М., «Высшая школа», 1970.
10. Канторович А. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М., Гостехиздат, 1952.